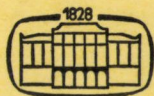


MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

55. KÖTET
1-2. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1978

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, HELLER LÁSZLÓ, KÉZDI ÁRPÁD, VÁMOSTIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia

Műszaki Tudomány

1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 84 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Prohászka János—Müller László: A gyors hőkezelés néhány elméleti és technológiai problémája</i>	1
<i>Singer Dénes: Műszaki rendszerek egységes bondgráf reprezentációja és állapotmodelljeinek előállítása II.</i>	19
<i>Tarnai Tibor: Tartók kifordulásának vizsgálata a kvadratikus operátornyalábok elmélete alapján</i>	39
<i>Gádor László: A hálózati feszültségszabályozás néhány kérdése</i>	59
<i>Gáspár Zsolt: Terhelt, ideálisan rugalmas térbeli rúd érintő-merevségi mátrixának meghatározása</i>	77
<i>Jankó László: Eljárás merev testek „táncolási” rezgését (galloping vibration) megindító legkisebb szélesség meghatározására</i>	93
<i>Reményi Károly: A hazai lignitvagyon erőművi felhasználásának kérdéséhez</i>	109
<i>Scharle Péter—Vörös Gábor: A mechanika variációs elveihez kapcsolódó elméleti és alkalmazott kutatás áttekintése</i>	133
<i>Ijjas György: A szál-mátrix tapadási hibák hatásának vizsgálata</i>	147
<i>Terplán Sándor: Az Otto-motorokkal kapcsolatos hazai fejlesztő tevékenység 1945-ig</i> ..	159
<i>Bogárdi János—Petravits Imre: A Nemzetközi Öntözési és Vízrendezési Szövetség Magyar Nemzeti Bizottságának 10 éves tevékenysége</i>	165
<i>Fuchs Erik: IX. Kohászati Anyagvizsgáló Napok</i>	177
<i>Bohus Miklós—Csibi Sándor: A folyóirat és könyvkiadás a távközlés szakterületén</i> ...	179

KÖNYVISMERTETÉS

<i>Betontechnische Berichte 1976 (Dr. Goschy B.)</i>	185
<i>Franz G.: Beton-Kalender 1977 (Dr. Csonka, P.)</i>	186
<i>Kézdi Árpád: Talajmechanika-példák és esettanulmányok (Dr. Rétháti L.)</i>	187
<i>Zementaschenbuch (Dr. Palotás L.)</i>	187
<i>Eckstein, Hans-Joachim: Technologie der Wärmebehandlung von Stahl (Dr. Fuchs E.)</i> ..	188
<i>Kozák Miklós és munkatársai: Hidraulikai példatár (Dr. Czibere, T.)</i>	189
<i>Kézdi Árpád: Fragen der Bodenphysik (A talajfizika kérdései) (Dr. Starosolszky Ö.)</i> ..	190
<i>Mälmeisters, A.—Tamuzs, V.—Teters, G.: Mechanik der Polymerwerkstoffe (Műanyagok mechanikája) (Dr. Kalinszky, S.)</i>	190
<i>Rétháti László: Talajvíz a mélyépítésben (Héjj H.)</i>	191
<i>Verő József—Káldor Mihály: Fémtan (Dr. Fuchs, E.)</i>	192
<i>Zimmermann, R., Günther, K.: Metallurgie und Werkstofftechnik, ein Wissensspeicher Band 1—2. (A metallurgia és az anyagtechnológia egy enciklopédiája (Dr. Fuchs, E.)</i> ..	192

CONTENTS

<i>Prohászka, J.—Müller, L.</i> : Some Theoretical and Technological Problems of Rapid Heat Treatment	1
<i>Singer, D.</i> : Unified Bondgraph Representation of Dynamic Systems II.	19
<i>Tarnai, T.</i> : Investigation of the Lateral Buckling of Beams with the Aid of the Theory of Quadratic Operator Pencils	39
<i>Gádor, L.</i> : Some Questions of Network Voltage Regulation	59
<i>Gáspár, Zs.</i> : Establishment of the Tangent Stiffness Matrix of an Ideally Elastic Space Bar	77
<i>Jankó, L.</i> : The Minimal Wind Velocity Causing Coupled Bending-Torsional Galloping Vibration of a Rigid Body	93
<i>Reményi, K.</i> : Contribution to the Question of the Utilization of the Hungarian Lignite	109
<i>Scharle, P.—Vörös, G.</i> : A Survey on the Theoretical and Applied Research Work to the Principles of the Variation of Mechanics	133
<i>Ijjas, Gy.</i> : Investigation of the Adherence Defects of the Fibre Matrix	147
<i>Terplán, S.</i> : Development on the Otto Engines in Hungary up to 1945	159
<i>Bogárdi J.—Petrasovits, I.</i> : 10 Years Work of the Hungarian Committee of the International Commission on Irrigation and Drainage	165
<i>Fuchs, E.</i> : IX. Testing of Materials in Metallurgy	177
<i>Bohus, M.—Csibi, S.</i> : Publishing of Periodicals and Books on Telecommunication	179

BOOK REVIEW

<i>Betontechnische Berichte, 1976 (Goschy, B.)</i>	185
<i>Franz, G.</i> : Beton-Kalender 1977 (Csonka, P.)	186
<i>Kézdí, A.</i> : Talajmechanika-példák és esettanulmányok (Rétháti, L.)	187
<i>Zementaschenbuch 1976/77 (Palotás, L.)</i>	187
<i>Eckstein, Hans-Joachim</i> : Technologie der Wärmebehandlung von Stahl (Fuchs, E.)	188
<i>Kozák, M.</i> : Hidraulikai példatár (Czibere, T.)	189
<i>Kézdí, A.</i> : Fragen der Bodenphysik (Starosolszky, Ö.)	190
<i>Mälmeisters, A.—Tamuzs, V.—Teters, G.</i> : Mechanik der Polymerwerkstoffe (Kalinszky, S.)	190
<i>Rétháti, L.</i> : Talajvíz a mélyépítésben (Héjj, H.)	191
<i>Verő, J.—Káldor, M.</i> : Fémten (Fuchs, E.)	192
<i>Zimmermann, R.—Günther, K.</i> : Metallurgie und Werkstofftechnik, ein Wissensspeicher Band I II; (Fuchs, E.)	192

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1978. IX. 28. — Terjedelem: 17,15 (A/5) ív

79.6367 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A GYORSHŐKEZELÉS NÉHÁNY ELMÉLETI ÉS TECHNOLÓGIAI PROBLÉMÁJA

PROHÁSZKA JÁNOS*

AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

és

MÜLLER LÁSZLÓ**

[Beérkezett 1978 május 22.-én]

Az alábbiakban egy olyan eljárásnak a lehetőségeit mutatjuk be, amelynek gazdaságossága már az iparban is bebizonyosodott. Jelenleg számos helyen végeznek kísérleteket arra, hogy miként lehet a még meglevő nehézségeket kiküszöbölni. Úgy véljük, hogy már ma elértünk oda, hogy nagyon sok helyen sikeresen megvalósítható a gyors hőkezelési technológia, melynek az anyagokra vonatkozó hatásait ismertettük. A gazdaságosságra csak utaltunk, de a hatásokra vonatkozó adatok egyértelműen bizonyítják, hogy minden helyen, ahol jelenleg is villamosfűtésű kemencékben hőkezelnek, a gyorsíztítás igen nagy gazdasági előnyt jelent amellett, hogy a termékek tulajdonságai állják a versenyt a hagyományosan hőkezelt anyagokkal.

Az utóbbi időben a technológia valamennyi ágában nagy figyelmet szenteltek azoknak az eredményeknek, amelyek segítségével a gyártási kapacitás növelhető és a termékek minősége javítható. A fémek előállításának és technológiájának egyik leggyakoribb eljárása a hőkezelés. Ez a művelet gyakorlatilag valamennyi termék előállításában — sok esetben többször is — előfordul. Ez az oka annak, hogy a hőkezelési folyamatok megértésén kívül sok energiát fordítunk a már ismert folyamatok gyorsítására is. Mint minden technológiát gyorsító eredménynek számos olyan részlete van, mely részben a már ismert alapelveken nyugszik. Az új eredmények pedig új megválaszolandó kérdéseket vetnek fel. A következők a hőkezelési eljárások gyorsításának legfontosabb elvi és gyakorlati kérdéseit és néhány jellegzetes vonását mutatják be.

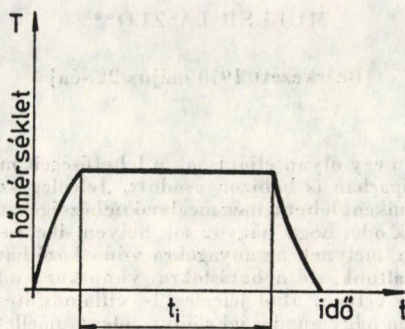
1. A hőkezelési folyamatok gyorsításának lehetősége

A hőkezelés olyan folyamat, melynek során a hőkezelendő anyagnak a hőmérsékletét meghatározott időprogram szerint változtatjuk azért, hogy végül annak tulajdonságai kívánságainknak megfelelően változzanak meg. Az 1. ábra mutat egy ilyen hőmérséklet-idő programot. A $T(t)$ program végrehajtása során az anyag szerkezete megváltozik és ez a tulajdonságokat módosítja.

* Prof. Dr. Prohászka János. 1016 Bp. Tigris u. 46.

** Müller László

A 2. ábra szemlélteti, hogy a 80%-os hideghengerlés után az E 99,7 Al huzal szilárdsága és nyúlása hogyan változik meg annak a hőkezelésnek a hatására, melyet az 1. ábra szerinti $T(t)$ hőmérséklet-időprogramnak megfelelően kezeltünk, úgy hogy a t_i izzítási idő mindig állandó volt, de az egyes mérésekhez tartozó T_i (izotermikusnak feltételezett) hőmérsékletet változtattuk. Ez a t_i érték olvasható le a 2. ábra vízszintes tengelyén.



1. ábra

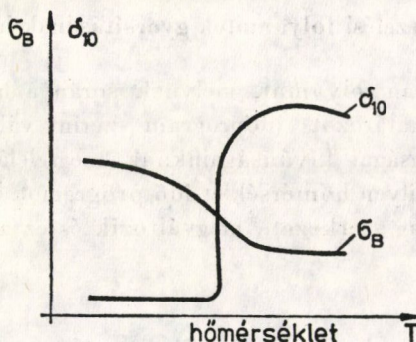
A tulajdonságokat módosító szerkezetváltozás egy, vagy több termikusan aktivált folyamat eredménye, melyeknek v_i sebességét a hőmérséklet függvényében az ilyen folyamatokra jellemző összefüggés adja meg

$$v_i = A_i \exp \left(-\frac{Q_i}{RT} \right), \quad (1)$$

ahol A_i és Q_i az i -edik folyamatra jellemző (rendszerint a hőmérséklettől függetlennek feltételezett) paraméterek.

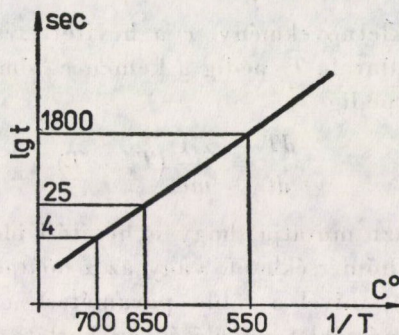
Az 1. összefüggésből első pillanatra kiderül, hogy a folyamat tetszés szerint gyorsítható a hőmérséklet növelésével.

Így pl. feltételezve, hogy a képlékenyen alakított acél újrakristályosodásának a leírására az (1) összefüggés jó közelítéssel használható, annak Q aktivá-



2. ábra

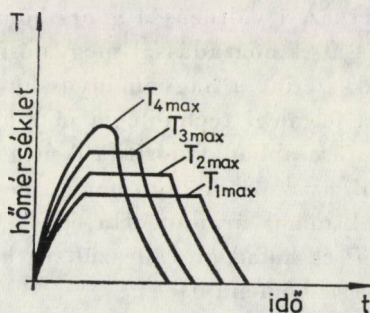
lási energiája 65 000 cal/g atom. Ha az újrakristályosodás 550 °C-on 1800 s alatt végbemegy, akkor 650 °C-on csak 25 s-ra van szükség, míg 700 °C-on az újrakristályosodás már 4 s alatt befejeződik. (3. ábra.) (A hőmérsékletet tovább növelve, már a másodperc tört részei alatt is végbemehet az újrakristályosodás még akkor is, ha az A_1 hőmérsékletet túlléptük. Ha a hevítés



3. ábra

és a hűtés elég gyors, akkor még az A_1 felett is végrehajtható az újrakristályosodás anélkül, hogy jelentős mennyiségű Fe_3C elbomlana, ill. a ferrit—ausztenit—ferrit átalakulás végbemenne.)

A fenti példához hasonlóan bármely hőkezelő művelet ideje tetszés szerint lerövidíthető feltéve, hogy annak sebessége a hőmérséklettel exponenciálisan nő. A hőmérséktemeléssel azonban sajnos nem oldódik meg valamennyi nehézség. Nézzük meg az 1. ábrán vázolt eljárás időszükségletét nagyobb hőmérsékleten a 4. ábra segítségével. Bár kétségtelen, hogy a hőkezelés izotermikus szakasza valóban lecsökkent a várakozásnak megfelelően, a teljes időigény a fűtési és a hűtési szakasz következtében még így is jelentékeny maradt. Mivel a hűtési szakasz energiát nem igényel és legtöbbször egyszerűen a környezet hűtőhatásának tesszük ki a darabot, rendszerint a fűtési szakasz hevítési sebessége szabja meg az elérhető időnyereséget. Nézzük meg tehát, milyen lehetőségek vannak a hevítési sebesség növelésére. A hevítési sebesség



4. ábra

nagysága attól függ, hogy dt idő alatt az m tömegű és A felületű testtel milyen dQ hőmennyiség közölhető. A külső paraméterek és a felsorolt mennyiségek között a Newton-törvény teremt kapcsolatot (ha a hevítés a környezet hőátadásának a hatására megy végbe, pl. egy kemencében), mely szerint

$$dQ = mc dT = \alpha A (T_K - T) dt, \quad (2)$$

ahol dT a hőmérsékletnövekmény, c a hevített test fajhője, α a hőátadási tényező, T a munkadarab, T_K pedig a kemence hőmérséklete.

A hevítési sebesség pedig

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha A}{mc} (T_K - T). \quad (3)$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a hevítési idő csökkentése érdekében, vagy a kemence T_K hőmérsékletét, vagy az α hőátadási tényezőt kell növelni (esetleg mindkettőt), mivel a többi paramétert a munkadarab megszabja.

A kemencehőmérséklet növelését az korlátozza, hogy vele a munkadarab felülete és magja közötti hőmérsékletkülönbség nő, mely a tulajdonságok homogenitását rontja, ugyanakkor a kemence élettartama is csökken. Az α hőátadási tényező a hőközlő anyag helyes kiválasztásával növelhető. Az előbbi az áthúzókemencékben valószínűsíthető, míg az utóbbi a fém, vagy sófürdők előnye. A viszonylag hosszú — sokszor a 100 m-t is meghaladó — áthúzó kemencékben az állandó keresztmetszetű hőkezelendő anyagot v sebességgel folyamatosan húzzák át. Minél nagyobb a v áthúzó sebesség, annál hosszabb kemencére van szükség, hogy a munkadarab az előírt hőmérsékletet felvegye. Az ilyen kemencékben a hőmérséklet rendszerint nagyobb, mint a munkadarab maximális hőmérséklete, azért, hogy az átfutási idő ne legyen túl hosszú. Ezek a kemencék az utóbbi időben egyre jobban terjednek rendkívül nagy termelékenyséjük miatt. A fém, vagy sófürdők annak ellenére, hogy hőátadási tényezőjük többszöröse a gázközegű kemencéknek, csak korlátozott mértékben terjednek. Ennek oka részben az ömledék nagy oxidációs vesztesége, részben pedig az, hogy az ömledék maradványaitól a benne hőkezelt anyagok felületét nehéz teljesen megtisztítani. Gyakorlatilag csak ott terjedtek el, ahol valamilyen anyagszerkezeti változás a gyors hőmérsékletváltozást megköveteli. Ezzel a sugárzással és hőátadással megvalósítható lehetőségek ki is merültek. Az elmondottak szerint a hagyományos hevítési eljárások teljesítményének felső határát a jelenlegi technológia már hasznosítja.

A hevítés sokkal hatásosabban valósítható meg elektromos energiának közvetlen felhasználásával, azaz oly módon, hogy a hevítendő munkadarabon vezetjük keresztül az elektromos áramot. Ha egy R elektromos ellenállású munkadarabon I áramerősség halad át U feszültség hatására dt ideig, akkor a munkadarabban keletkező hőmennyiség

$$dQ = mc dT = IU dt = I^2 R dt, \quad (4)$$

és így a hevítési sebesség

$$\frac{dT}{dt} = \frac{IU}{mc} = \frac{I^2 R}{mc} . \quad (5)$$

Ezzel a hevítési móddal a hevítési sebesség növelésének nincs korlátja, semmi akadálya, hogy a hevítési sebességet akár $10^6 \div 10^7$ °C/s értékre növeljük, szemben a hagyományos hevítésnél elérhető $1 \div 100$ °C/s-hoz képest. A továbbiakban csak azokkal a hőkezelésekkel foglalkozunk, melyeknél a hevítésre és az esetleges hőntartásra fordított összidő 1 min-nál kisebb.

2. A hőkezelés gyorsításának fémtani problémái

A hagyományos hőkezelés kézbentartásának alapja az, hogy tapasztalatból tudjuk, hogy adott anyagban milyen szerkezetváltozások mennek végbe a hőmérséklet növelése során. Ugyanezek a folyamatok szabják meg a gyorshőkezelés eredményességét is. Semmi okunk annak feltételezésére, hogy gyorshőkezelésnél a nagyon rövid idő miatt más változások mennek végbe. Az biztos azonban, hogy a változások egymáshoz viszonyított szerepének a fontossága más. Így pl. az eddigi tapasztalatok szerint az újrakristályosodásnál normális körülmények között a szemcsehatármozgás sebessége szabja meg a krisztallitok méretét, míg gyorshőkezelésnél a magképződési gyakoriság lép előtérbe.

A hőkezelési folyamatok gyorsításának az a problémája, hogy a feltételezett szerkezetváltozások végbemennek-e a másodperc törtrésze alatt? Bár az (1) összefüggés szerint ez megtörténik, nincs bizonyíték arra, hogy meddig érvényes az. Ezért vagy elvi megfontolással kell valószínűsíteni, vagy kísérletekkel kell bizonyítani, hogy a folyamatok a másodperc törtrészei alatt is végbemennek. A következőkben mindkét bizonyítási lehetőséget kihasználjuk.

A hőkezelő műveleteket két csoportba soroljuk. Az elsőbe a képlékeny alakváltozás hatásainak a megszüntetésére irányuló, míg a másodikba a fázisátalakulásokat is tartalmazó eljárásokat soroljuk. Az első csoportba tartozónak tekintünk minden olyan eljárást is, mely az anyagban a maradék mechanikai feszültségek eltüntetésére irányul, függetlenül attól, hogy az milyen módon jött létre. Az újrakristályosodást azonban a fázisátalakulások közé soroljuk, azért, mert leírásának formális elmélete azonos az egykomponensű rendszerek fázisátalakulásának a leírásával.

Az első csoport jellegzetes hőkezelése a képlékeny alakítás hatásainak a megszüntetése. Ennek során tűnnek el az anyagban az egyensúlyinál nagyobb számú különböző ponthibák és az ellentétes előjelű diszlokációk, míg végül az újrakristályosodás megy végbe.

Egy üres rácshely élettartamát egy rácspontban az atomok rezgési frekvenciája és az üres rácshely ugrási valószínűsége szabja meg. Ha az atomok

rezgési frekvenciáját $\nu_0(10^{13} \text{ s}^{-1})$ megszorozzuk az üres rácshelyek mozgására jellemző Q aktiválási energiát tartalmazó exponenciális taggal, az üres rácshelyek ugrási gyakoriságát kapjuk, azaz

$$\nu = \nu_0 \exp \left(-\frac{Q}{kT} \right).$$

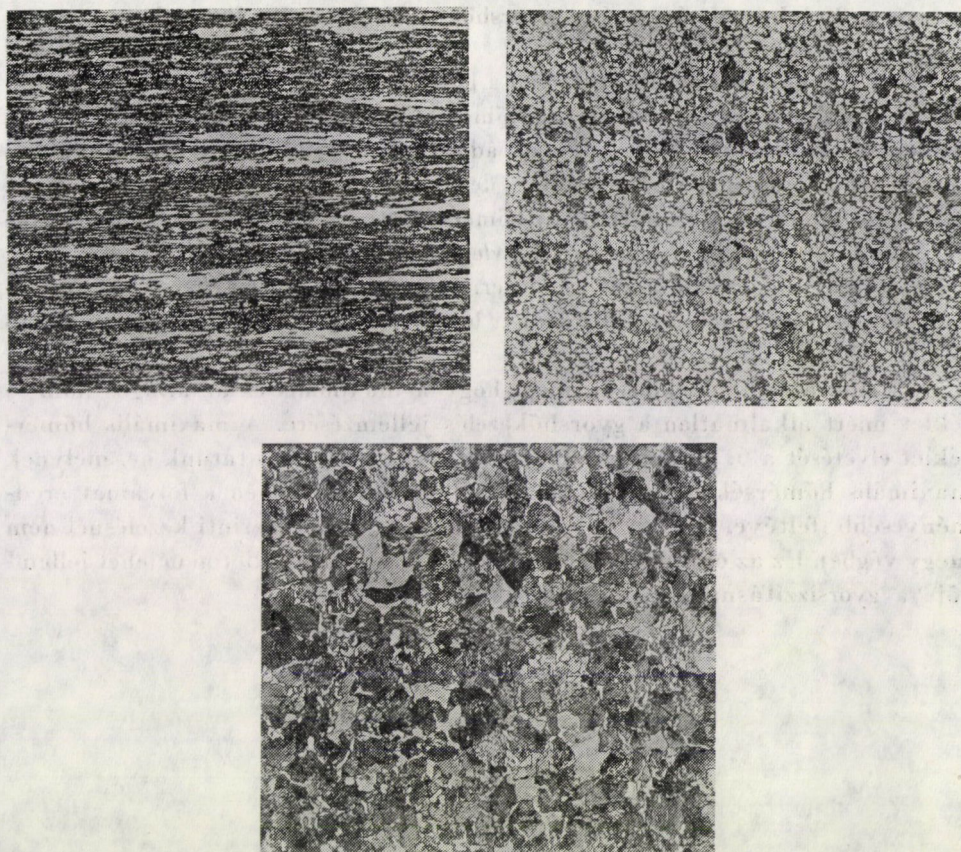
Itt k a Boltzmann állandó.

Ennek reciproka az élettartam. Behelyettesítve a rézre vonatkozó értéket a $Q_{\text{Cu}} \times 0,88 \text{ eV}$ az üres rácshelyek mozgásához szükséges aktiválási energiát és kiszámolva az értéket 900°C -ra azt kapjuk, hogy ebben a fémekben az üres rácshelyek 10^9 -szer változtatják a helyüket másodpercenként. Egy ugrásnál éppen a Cu névleges atomátmérőnek ($2,5508 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$) megfelelő távolsággal mozdulnak el és így egy sec alatt $10^9 \cdot 2,5508 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ utat tehetnek meg.

A ponthibák legvalószínűbb nyelőinek az éldiszlokációkat kell tekinteni, mert azok vannak hozzájuk a legközelebb. A legközelebbi diszlokációk távolsága 10^{-3} cm , ha a diszlokációsűrűség 10^6 cm^{-2} . A fenti sebességet figyelembe véve az adódik, hogy az üres rácshelyek a rézben mintegy 10^{-4} s alatt eljuthatnak a nyelőig. Ezek szerint a ponthibáknak az eltűnése még a leggyorsabb melegítésnél is biztosított, mert ha felmelegítünk egy vékony testet 900°C -ra, ilyen rövid időt azon a hőmérsékleten mindenképpen eltölt. Az interszticiósoknak és a kettős ponthibáknak a mozgásához szükséges aktiválási energiája kisebb, mint az üres rácshelyeké és ezért eltűnésük időigénye kisebb.

Az ellentétes előjelű diszlokációk eltűnéséhez szükséges időt úgy becsülhetjük meg, hogy a diszlokációk mozgási sebességét vesszük alapul. Ennek maximális nagysága azonos a rugalmas feszültségi hullám terjedési sebességével. Ez utóbbinak értéke nagyságrendileg $10^3 \text{ m/s} = 10^5 \text{ cm/s}$. Így a diszlokációk még ha sebességüket $1000 \times$ kisebbnek is vesszük, mint a lehetséges maximumot, mintegy 100 cm -t tehetnek meg másodpercenként. Ezért, hogyha olyan mérsékelt diszlokációsűrűséget választunk, mint az előbbi esetben, az ellentétes előjelű diszlokációk mintegy 10^{-5} s alatt érik el egymást. (Itt természetesen csak azokat az egyszerű eseteket vettük számításba, amikor az ellentétes előjelű diszlokációk azonos csúszósíkokon vannak és közöttük mozgásukat kizáró akadály nincsen.)

A fázisátalakulásokhoz szükséges időtartam becslése helyett bemutatunk néhány képet annak bizonyítására, hogy — legalábbis a $0,57\%$ C-t tartalmazó acélban — az 1 s -nál rövidebb. Az 5. ábraszorozat ennek az acélnak a próbatestjeiről készült különböző állapotokban. Az 5a. ábra a hidegen húzott állapotot mutatja, az 5b. ábra azt szemlélteti, hogy az anyagban az ausztenitesedés éppen megindult, de az újrakristályosodás teljesen végbement, míg az 5c. ábra olyan anyagról készült, melyben az egész szerkezetben végbement az ausztenites átalakulás. Valamennyi próbatestnek a teljes hevítési ideje 1 s volt. Ez azt



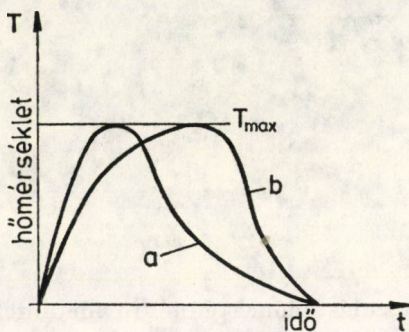
5. ábra

jelenti, hogy az átalakulási időnek ennél rövidebbnek kellett lennie. A képek egyértelműen bizonyítják, hogy a fázisátalakuláshoz is elég a sec törtrésze, legalábbis az ilyen acélokban. Végül olyan hőkezelésekről is beszélnünk kell, melyeknek a gyorsítása nem valósítható meg. Azokról a folyamatokról van szó, melyek során az alkotók koncentrációját kell kiegyenlíteni. Sajnos, ennek a homogenizálásnak az idejét csak különleges körülmények között lehet rövidíteni. Bár a folyamatot megszabó diffúzió a hőmérséklettel gyorsítható, mégis a nagy hőmérséklet ebben az esetben a krisztallitméretet is növeli. Ez a fémes anyagok túlnyomó többségében káros. A homogenizálási hőmérséklet csak akkor növelhető, ha azt még jelentős mértékű képlékeny alakítás, vagy kézbentartható fázisátalakulás, vagy átalakulások követik.

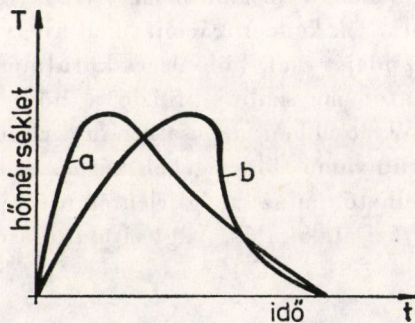
3. A hagyományos és a gyors hőkezelések közötti kapcsolat

Az eddigiek során alig esett szó a hőmérsékletről. Kérdés, hogy a gyorsizzítás során, amikor a munkadarab hőmérséklete az idővel állandóan változik, milyen hőmérsékletet kell jellemző adatként elfogadni. Ez nyilvánvalóan nem lehet a maximális hőmérséklet, de amint majd bizonyítjuk, nem lehet az átlagos hőmérséklet sem. Egy új hőmérsékleti érték definiálására van szükség. Ezt a hőmérsékletet nevezzük *tényleges*, vagy *effektív hőmérsékletnek*, mely definíció szerint egyenlő azzal az izotermikus hőmérséklettel, mely az anyagban pontosan ugyanolyan változásokat biztosít, mint a gyors hőkezelés változó hőmérséklettel.

Előbb azonban tekintsük meg, hogy a maximális és az átlagos hőmérséklet miért alkalmatlan a gyors hőkezelés jellemzésére. A maximális hőmérséklet elvetését a 6. ábra igazolja. Itt két olyan görbét mutatunk be, melynek maximális hőmérséklete azonos, ennek ellenére a *b* görbén a folyamat eredményesebb (feltéve, hogy az egész változás az *a* görbe szerinti kezelésnél nem megy végbe). Ez az oka annak, hogy a maximális hőmérséklet nem lehet jellemzője a gyorsizzításnak.



6. ábra



7. ábra

A 7. ábrán két olyan görbét mutatunk be, melyeknél mind a maximális, mind az átlagos hőmérséklet azonos, mégis a b görbe szerinti hőkezelés eredményesebb. Mivel ezek a hőkezelések is megvalósíthatók, ez biztosítéka annak hogy az átlagos hőmérséklet sem fogadható el jellemző adatként. Bár nem tartozik teljesen ide, de megemlítjük, hogy az átlagos hőmérséklet még azoknak az izotermikus hőkezeléseknek a pontos jellemzésére sem alkalmas, melyeket a gyakorlatban mindig változó hőmérsékleten végzünk a szabályozás tökéletlensége miatt. *Az átlagos hőmérsékletre vonatkozó jellemzésnél ugyanis azt tételezzük fel hallgatólágon, hogy a folyamatok sebessége lineárisan változik a hőmérséklettel.*

A változó hőmérsékletű folyamatok jellemzésére csak az effektív hőmérséklet a T_{eff} lehet alkalmas, mely az a hőmérséklet, mely az anyagban ugyanazt a változást hozza létre, mint az az izotermikus folyamat azonos idő alatt.

Az 1. összefüggést úgy írhatjuk, hogy

$$v = \frac{dx}{dt} = A \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right). \quad (6)$$

Itt x a térfogatnak azt a hányadát jelenti, melyben a folyamat végbement. Ennek nagysága

$$x(t) = \int_0^t A \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right) dt. \quad (7)$$

Ha feltételezzük, hogy $dA/dT = dQ/dT = 0$ akkor izotermikus folyamatra

$$x(t) = A \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right) \int_0^t dt. \quad (8)$$

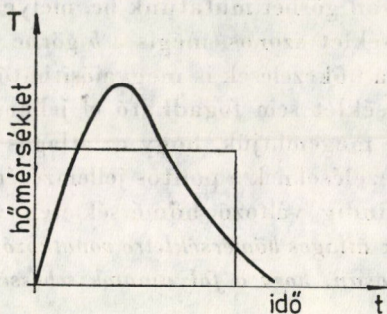
Vagy ugyanazokkal a feltételezésekkel, mint fent, de változó hőmérsékletű folyamatokra

$$x(t) = A \int_0^t \exp \left[-\frac{Q}{RT(t)} \right] dt. \quad (9)$$

Az effektív hőmérséklet definíciója szerint a két jobb oldal egyenlő, azaz

$$\exp \left(-\frac{Q}{RT} \right) \int_0^t dt = \int_0^t \exp \left[-\frac{Q}{RT(t)} \right] dt. \quad (10)$$

Az integrálási határok kijelölése és a pontos definíció érdekében mutatjuk be a 8. ábrát, melyen az időértéket bejelöltük. Ez az utóbbi egyenlet tulajdonképpen az effektív hőmérséklet pontos definíciója, és ez az egyenlőség jelenti a hagyományos és gyors hőkezelések közötti kapcsolatot is.



8. ábra

A (10) egyenletből az effektív hőmérséklet tényleges értéke is meghatározható, melynek nagysága

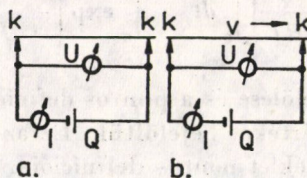
$$T_{eff} = \frac{Q}{R} \frac{1}{\ln \int_0^t dt - \ln \int_0^t \exp \left[-\frac{Q}{RT(t)} \right] dt} \quad (11)$$

A (11) egyenlet az integrálás felső határának a függvénye, mely először monoton nő, majd ugyancsak folytonosan csökken. Nyilván a tényleges hatását a gyors hőkezelésnek az a (11) egyenlettel kiszámított érték adja, melynél a T_{eff} maximumként adódik.

4. A gyors hőkezelés megvalósításának a lehetőségei

A gyors hőkezelés megvalósításának két változatát mutatja a 9. ábra. A 9a. vázlat az l hosszúságú egyedi darabok, míg a 9b. vázlat a folyamatosan v sebességgel haladó hosszú termékek hőkezelésének az elvi elrendezését szemlélteti. A k kontaktusokon kapcsolódik a termék a Q szabályozható áramforráshoz, a termék hőkezeléséhez szükséges áramerősség az I ampermérőn a feszültség pedig az U voltmérőn olvasható le.

A megvalósításnak a lehetőségeit az korlátozza, hogy az elektromos áram átadása sok nehézséggel jár, annak ellenére, hogy megoldására számos szabá-



9. ábra

dalom van. A megoldás — véleményünk szerint — sokféle és minden feladatra más-más lehetőség adja a jó eredményt.

Az egyedi darabok, az 5–10 m-nél nem hosszabb termékek hőkezelésénél az elektromos feszültséget a termék két végére kell kötni. Ez két egyszerű befogás, olyan kontaktusok felhasználásával, melyek az anyag maximális T_{\max} hőmérsékletén is elég szilárdak ahhoz, hogy maradó alakváltozást ne szenvedjenek és, hogy azzal ne is hegedjenek össze. A befogás méretezését úgy kell végezni, hogy a kontaktus mindenkor hőmérséklete a munkadarabéval legyen azonos. Nagy hőmérsékletkülönbségnél a munkadarab végeinek a tulajdonságai eltérnek az átlagostól. Úgy véljük az ilyen hőkezelések kialakítása nem okoz gondot. Sokkal több nehézséget okoz a — nagyobb jelentőségű — folyamatosan v sebességgel mozgó végtelenített, vagy nagyon hosszú termékek hőkezelése. Ebben az esetben a kontaktusok és a termék közötti relatív elmozdulás miatt csak nehezen adható át az elektromos áram úgy, hogy annak felületét ne károsítsa. A kontaktusoknál a termékre sokszor több ezer amper erősségű áram adódik át. Ez csak úgy lehetséges, hogy a kontaktus és a termék közötti illeszkedés biztosítja a közel egyenletes árameloszlást. Ha az árameloszlásban nagy csúcsok keletkeznek, akkor azon a helyen a termék, esetleg a kontaktus is megolvad. Ennek elkerülésére a legkülönbözőbb kontaktusanyagokat használják.

A kontaktusok anyaga lehet gáznemű, folyékony, vagy szilárd. A gáznemű kontaktusok igen ideális áramátadást biztosítanak. Ilyen kontaktusok a plazmák. Ezek rendkívül nagy előnye, hogy a munkadarabot mechanikusan nem terhelik és nem szennyezik. Hátrányuk azonban, hogy vezetőképességük a feszültséggel ugrás szerint változik. Amíg a feszültség kicsi, addig az áramátadás viszonylag nagy felületen valósul meg. Egy bizonyos — a plazmaégő jellegzetességeitől függő — feszültségnél a plazmában egy vékony fonálszerű térfogatban igen nagy áramerősség alakul ki és ez szállítja az áram nagy részét. Ez a nagy áramsűrűség a termék felületét roncsolja. Késztermék hőkezelésére így csak ott használható, ahol a felületi finomság ezt a roncsolódást nem zárja ki. A plazma kontaktuskénti felhasználását tovább korlátozza az, hogy a plazmaégő működésének a fenntartására is energiát kell fordítani. Ennek következtében a gyorsíztítás egyik legnagyobb előnye, a jó termikus hatások elveszik.

A folyadék halmazállapotú vezető anyagok az olvadt fémek és sók, valamint a kisebb vezetőképességű elektrolitoldatok. A folyékony fémek kitűnő vezetőképességűek, a terméket mechanikusan nem terhelik. Ezek az előnyök. Hátrányuk viszont az, hogy könnyen oxidálódnak és a fémre tapadnak. Az oxidációt a szokásos módon lehet elkerülni, míg a tapadást azzal, hogy olyan folyékony fémeket kell használni, mely a termék anyagával még az olvadáspontok felett sem képez oldatot. Az acélnál pl. ilyen az ólom és a bizmut. Folyékony kontaktusok használatánál is törekedni kell arra, hogy a kontak-

tusok hőmérséklete lehetőleg a munkadarab hőmérsékletével legyen azonos. Ezt a feltételt a különböző eutektikus rendszerekkel nem nehéz elérni, hiszen $20 \div 30^\circ\text{C}$ intervallumokban állnak rendelkezésre ilyen eutektikus ötvözetek. Ha a tapadás elkerülhető, a folyékony fém igen jó megoldásnak bizonyul. Az olvadt sók vezetőképessége ugyan elmarad a fémekétől, ennek ellenére elég jó vezetők ahhoz, hogy ilyen célra megfeleljenek. Inkább itt is a kellemetlen tulajdonságokat említjük, mert azokat kell elkerülni. A sók megtapadása a terméken nem okoz nehézséget, mert azok a termék igen kis hajlítgatásánál letörnek arról ridegségük következtében és legtöbbjük vízben könnyen oldódik. Legkellemetlenebb tulajdonságuk, hogy a fémeket korrodálják. Ez ellen a hőkezelés utáni gondos tisztítás segít. A sóolvadékok használata az egyik legjobb megoldásnak tekinthető.

Az elektrolit oldatok kontaktuskénti használatát egyrészt rossz vezetőképességük, másrészt viszonylag alacsony hőmérsékletük gátolja. Vezetőképességük nagyságrendekkel elmarad az előbb említett anyagokétól. Ezt azzal kompenzálhatjuk, hogy a kontaktusnak az anyaggal érintkező felületét kell megnövelni. Így csak vékony huzalok, szalagok stb. hőkezelésére alkalmasak. A hőmérsékletük alacsony volta jól hasznosítható akkor, ha a hőkezelés gyors hűtésben ér véget. Korrozíós veszélyt ugyanúgy jelentenek, mint a sóolvadékok.

A legtöbb ismert megoldás a szilárd kontaktusokra vonatkozik. Ezek vezetőképessége megfelelő. Használatukat mechanikai terhelhetőségük korlátozza. A kontaktus és a termék közötti illeszkedéstől függ az áramátadás minősége. Ha a két felület jól illeszkedik, akkor az áramátadás nagy felületre oszlik el és a fajlagos érték kicsi. Ha az illeszkedés rossz, vagy az időben változó, akkor alig lehet elkerülni, hogy ki ne alakuljanak a két felület között olyan pontok, ahol az áramátadás meghaladja azt a kritikus értéket, mely a termék és a kontaktus felületét megolvasztja. Ennek elkerülésére a két felületet, vagy egymásnak kell szorítani, vagy pedig a terméket úgy megfeszíteni, hogy az illeszkedés megfeleljen. Ez különösen a meleg, nagy hőmérsékletű munkadarab alakváltozására vezet. Ha az érintkezést sikerül megoldani, akkor még mindig számolni kell azzal is, hogy a szilárd kontaktust ez a terhelés attól függően veszi igénybe, hogy csúszó, gördülő, vagy csúszvagördülő kontaktust használunk.

A csúszó és a csúszvagördülő kontaktusoknál a terhelés mind mechanikai, mind villamos szempontból nagy. A csúszó kontaktust ez állandóan, míg a csúszvagördülő kontaktust időszakosan, de a fordulatszámnak megfelelően gyakran terheli. Ugyanezt mondhatjuk a gördülő kontaktusokról is. Ezért a kontaktusokat a legtöbb esetben hűteni kell. A meleg oldalon az összehegedés elkerülése érdekében lehetőleg nagy olvadáspontú és a termékkel lehetőleg nem ötvöződő kontaktusokat kell használni. Erre a célra a legjobban a W és ötvözetei felelnek meg.

A csúszókontaktusokkal kapcsolatban még meg kell jegyezni, hogy ezek könnyen karcolják a termék felületét. Így késztermék hőkezelésénél nagyon gondosan kell eljárni. A hőkezelést követő nagy képlékeny alakváltozás ezeket a felületi hibákat eltünteti.

A megvalósításhoz tartozik még a kontaktustávolságoknak és az átfutási sebességeknek az összehangolása is. Az átfutási sebességet az időegységre jutó hőkezelendő mennyiség, míg a kontaktustávolságot az effektív hőmérséklet és az elektromos paraméterek szabják meg. Az effektív hőmérséklet amint láttuk, a $T(t)$ hőmérséklet—idő függvény szerint a korábban megadott összefüggés szerint változik. Nézzük meg, hogy l hosszúságú kontaktustávolság mellett, adott anyagnál az I áram hatására milyen lesz a kontaktusok között a v sebességgel futó anyagnak a hőmérséklete. Az anyag minden darabja az elektromos energia és a hővezetés következtében vesz fel hőmennyiséget, illetve ezek növelik a hevítési sebességet. A T hőmérsékletű anyag viszont hőmennyiséget ad le a környezetének a hőátadás és sugárzás révén. Ha a haladási sebességet is figyelembe vesszük, akkor az a hevítési sebességek értékeit minden helyen az elmozdulás miatt csökkenti. Ezeket figyelembe véve, a munkadarab hevítési sebességét az alábbi differenciálegyenlet adja meg

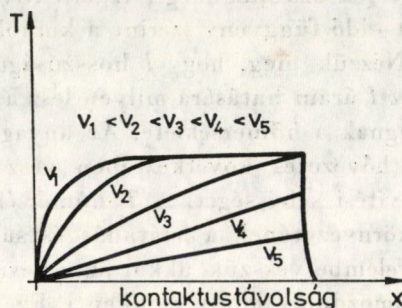
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha A(T - T_0) K \sigma B(T^4 - T_0^4) - C \frac{\partial x}{\partial t} + DI^2 R.$$

Itt β a hővezetési tényező, α a hőátadási tényező, K a szürke test sugárzására jellemző anyagi paraméter, míg σ az anyagi minőségtől független állandó. Az A , B , C és D állandók biztosítják, hogy az egyenlet minden tagjának a mértékegysége azonos. A differenciálegyenlet első tagja a hővezetésnek, a második tagja a környezetnek a hűtőhatását, a harmadik tag a sugárzás, míg a negyedik a sebességnek a hatását veszi számításba. Az ötödik tag a villamos energia hatását mutatja a hevítési sebességre.

Sajnos, a fenti differenciálegyenlet matematikai megoldása nem ismert. Bizonyos elhanyagolások mellett van megoldás. Így pl. ha a hőátadást, vagy a sugárzást elhanyagolhatjuk, akkor a megfelelő megoldás az irodalomban megtalálható. Az első alacsony hőmérsékletű, a második pedig nagy hőmérsékletű hevítéseknel ad jó közelítést. Jelenlegi számítógépes technika azonban a teljes differenciálegyenlet numerikus megoldását szolgáltatja, ha az α , β és K termikus jellemzők ismertek. A számítást még az is bonyolítja, hogy az utoljára említett paraméterek mindegyike a hőmérsékletnek is függvénye.

Nézzük meg, hogy milyen megoldásokra jutunk, ha a fenti egyenlet megfelelő megoldásait keressük. Ha a sebesség meglehetősen kicsi, akkor közel az első kontaktushoz valahol kialakul egy egyensúlyi hőmérséklet, melyet az szab meg, hogy a hőveszteségi tagok éppen egyenlők a betáplált hőmennyiségekkel. E ponttól kezdve a maximális hőmérséklet nem változik. Ezt mutatja

a 10. ábra legfelső görbéje. Ha most az átfutási sebességet megnöveljük, akkor a maximális hőmérsékletet a munkadarab egyre távolabb fogja elérni. Végül elérünk a növekedő sebesség mellett egy olyan értékhez, melynél a maximális hőmérséklet éppen a második kontaktusnál alakul ki. A sebesség további növelése mellett a betáplált energia nem képes már ugyanazt a maximális hőmérsékletet biztosítani, mint korábban, és ezért alacsonyabb hőmérsékleten hagyja el a termék a második kontaktust.



10. ábra

Azt szeretnénk még ezzel kapcsolatban megjegyezni, hogy jelenlegi tapasztalataink szerint, sokkal célravezetőbb és gyorsabb eredményt biztosít a hőkezeléshez szükséges elektromos paramétereknek a kísérleti úton való meghatározása, a számítási eljárással szemben. A megadott differenciálegyenlet megoldásához szükséges termikus paraméterek közül csak kevés ismert a kívánt pontossággal.

5. A gyors hőkezelés reprodukálhatóságának és tervezésének alapjai

A hőkezelés egyik legfontosabb feladata, hogy azonos tulajdonságú termékeket állítson elő. Ez még azonos kiinduló tulajdonságú anyagoknál is attól függ, hogy a hőkezelés termikus paramétereit milyen pontosan tudjuk beállítani és szabályozni. Tapasztalati tény, hogy még a leg gondosabban végzett hőkezelés után is az anyagok tulajdonságai szórnak. Ennek egyik oka, hogy a kemencében a hőmérséklet nem teljesen homogén, nem beszélve arról a hatásról, mely a tekercsben hőkezelt anyagoknál azért áll elő, mert a külső és a belső tekercsek $T(t)$ hőmérséklet—idő programja nem azonos. Egy több száz, vagy több ezer kilós fémtekercsben a külső menetek hőmérséklete néhány perc után alig különbözik a környezet, a kemence hőmérsékletétől. A legbelső meneteket képező anyagrészek viszont csak hosszú órák, sokszor csak $20 \div 30$ óra után érik el az izotermikusnak feltételezett hőmérsékletet. Hasonló hőmér-

sékletkülönbségek a lehülésnél is fellépnek csak most ellentétes értelemben. Így tulajdonképpen minden anyagrészhez más-más $T(t)$ hőmérséklet—idő program tartozik, mely a tulajdonságok elkerülhetetlen változását idézi elő.

A hagyományos hőkezelésnél az anyagok termikus paramétereit csak közvetve a kemence hőmérsékletének a szabályozásával tudjuk beállítani. A gyors hőkezeléseknél ugyanezeket a paramétereket a jól szabályozható elektromos értékekkel közvetlenül tartjuk kézben. Lényeges körülmény az is, hogy a termék minden keresztmetszetén ugyanaz az áramerősség ugyanannyi időn keresztül hat és ennek az az eredménye, hogy a gyorsan hőkezelt anyagoknak a tulajdonságai sokkal kevésbé szóródnak, mint a hagyományosan hőkezeltéké.

		A hőkezelés módja		
		Kemencében	Ólomfürdőben	Gyorsizzítva
σ_B [N · mm ⁻²]	legkisebb	610	750	784
	legnagyobb	790	787	821
	átlag	680	767	802
δ_{80} [%]	legkisebb	3,2	1,1	2,4
	legnagyobb	8,4	2,7	7,8
	átlag	6,2	1,8	4,5

A mellékelt táblázaton egy ilyen mérési eredményt mutatunk be. Egy ún. kötőszalag szilárdsági és nyúlási értékeit tartalmazza a táblázat. Egy tekercset kemencében, egy másikat ólomfürdőben, a harmadikat pedig gyorsan hőkezeltük. A tekercsek hossza 50 m volt és 5 m-ként vágtuk ki a próbatesteket mindhárom anyagból. A táblázatból kiderül, hogy nemcsak a szórás, de a mért két mechanikai tulajdonság is jobb a gyors hőkezelt anyagoknál.

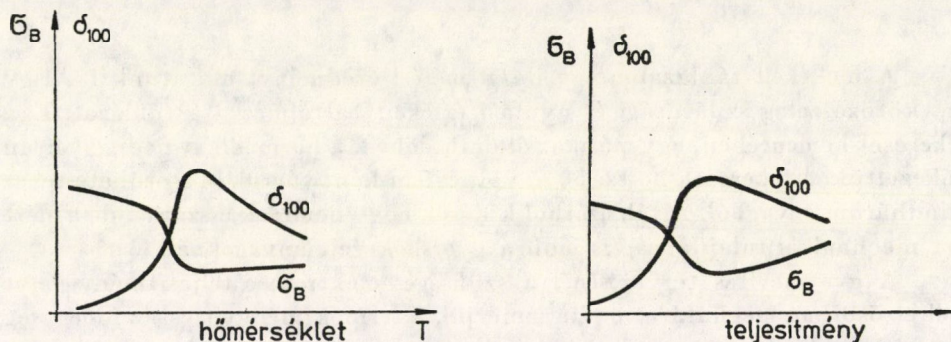
A gyorshevítés tervezésénél a szükséges elektromos teljesítményigényt kell elsősorban meghatározni. Ha ismerjük a termék méreteit és az időegység alatt hőkezelendő mennyiséget, akkor könnyen meghatározható az elektromos áramforrás minden jellemzője. A teljesítménymeghatározásnál szükséges még ismerni a maximális hőmérsékletet is, mert arra kell tervezni. A tervezéshez szükség van a berendezés hatásfokára. Eddigi tapasztalataink szerint a hatásfok 90%-nál nagyobb. Ez a gyorshevítésnek olyan előnye, melyet a mai energiaproblémákkal küzdő időkben nem hagyhatunk figyelmen kívül, nem beszélve arról az előnyről, amit az jelent, hogy a gyorsizzítás csak termikusan terheli a környezetét, égéstermékai nincsenek. Ha a termikus szennyezést számításba vesszük, tudomásul kell venni azt a tényt, hogy adott mennyiségű anyag hőkezelésénél a gyorsizzítás csak mintegy feleannyi hőmennyiséget ad át a környezetnek, mint a hagyományos. Az áramforráson kívüli részek tervezésénél a lényeges szempontokat már megemlítettük a kontaktusok, illetve a kontaktustávolságok és az effektív hőmérséklet tárgyalásánál.

6. A gyors hőkezelés tapasztalatai

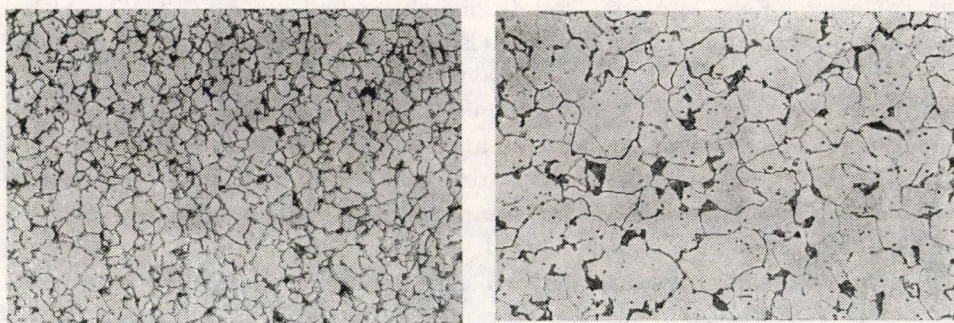
Nagyon sokféle anyagon végeztünk gyors hőkezelési kísérleteket. A legfontosabbak között szerepelt a kis és közepes szénttartalmú ötvöztelen acél, a 18/8 Cr—Ni—Fe acél, a réz és a sárgaréz, a Ni, a Konstantán és a Manganin, az alumínium stb.

Eddig csak a trafó- és dinamó-lemezek hőkezelését nem tudtuk gazdaságosan megoldani. Itt ugyanis a képlékeny alakítás hatásainak az eltüntetése mellett igen fontos, hogy egyrészt a C tartalmat a végső hőkezelésnek csökkenteni kell az anyagban, másrészt a krisztallitméretnek nagyinak kell lennie. Bár ezen feladatok elektromos árammal való hevítéssel minden különösebb nehézség nélkül megoldhatók, a jelenlegi áthúzó kemencék erre alkalmasabbak. Nem vezet gazdaságos megoldáshoz az sem, ha a homogenizáló hőkezeléseket próbálnánk gyorsíttatással megoldani.

Attól a néhány kivételtől eltekintve, melyeket felsoroltunk a gyorsíttatás igen eredményes, nagy gazdasági előnyökkel járó eljárás. Ha a kontaktusproblémák megoldódnak, mind a termelékenység növelése, mind a tulajdonságok javítása úgy oldható meg, hogy a beruházási költségek és a termelési költségek is csökkenthetők, kitűnő hatások mellett.



11. ábra



12. ábra

Végül bemutatjuk két különböző összetételű anyagnak a gyors hőkezeléssel elért mechanikai tulajdonságait és összehasonlítjuk azokat a kemencében hőkezelttekkel.

A 0,1 C%-ot tartalmazó ötvözetlen szénacél képlékeny alakítása után az izzítási hőmérséklet függvényében a 11a. ábra szerinti változásokat mutatja a mechanikai tulajdonságokban, míg ugyanennek az anyagnak a gyorsizzítása szerinti tulajdonságait a 11b. ábra szemlélteti. A gyorsizzított, illetve a kemencében hőkezelt anyagról készített képeket a 12. ábrán láthatjuk. A diagrammok azt mutatják, hogy a mechanikai tulajdonságok a két hőkezelés között lényeges különbséget nem mutatnak. Ha azonban arra gondolunk, hogy a termelékenység és a gazdaságosság a gyorsizzításnál sokkal jobb, mint a hagyományosnál, akkor feltétlenül a gyorsizzítás nyújtja a korszerűbb megoldást.

IRODALOM

- PROHÁSZKA, J., MÜLLER, L.: *Periodica Polytechnica. Electrical Engineering* 16. (1972), 219
 PROHÁSZKA J.: *Bányászati és Kohászati Lapok* 108. (1975), 61
 PROHÁSZKA, J.: *Neue Hütte* 22. (1977), 336

Some Theoretical and Technological Problems of Rapid Heat Treatment. — In the foregoing the possibilities of a method were discussed which has already proved its economy in industrial applications. At present, in many places tests are being carried out in order to eliminate the remaining difficulties. The authors believe that already nowadays in many places rapid heat treatment can be successfully realized, the effects of which on the materials have been discussed. Questions of economy have only been hinted at but data on efficiency prove without doubt that in every place where now heat treatment is carried out in electrical furnaces, the rapid annealing has very great economical advantages and that the qualities of the products are competitive with those of traditionally heat-treated materials.

Einige theoretische und technologische Probleme der Schnellwärmebehandlung. — Obenstehend wurden Möglichkeiten für ein Verfahren angeführt, dessen Wirtschaftlichkeit schon in der Industrie nachgewiesen wurde. Zur Zeit werden an zahlreichen Stellen dahingehende Versuche durchgeführt, wie die noch bestehenden Schwierigkeiten beseitigt werden können. Die Verfasser sind der Ansicht, daß schon jetzt an zahlreichen Stellen die Schnellwärmebehandlung erfolgreich verwirklicht wurde, deren Wirkung auf die Werkstoffe besprochen wurde. Auf die Wirtschaftlichkeit wurde bloß hingewiesen, aber die auf den Wirkungsgrad bezüglichen Angaben beweisen eindeutig, daß überall, wo auch jetzt die Wärmebehandlung in elektrisch geheizten Öfen durchgeführt wird, die Schnellglühung sehr große wirtschaftliche Vorteile bietet, wobei die Erzeugnisse im Wettbewerb mit den traditionell wärmebehandelten Werkstoffen bessere Eigenschaften aufweisen.

MŰSZAKI RENDSZEREK EGYSÉGES BONDGRÁF REPREZENTÁCIÓJA ÉS ÁLLAPOTMODELLJEINEK ELŐÁLLÍTÁSA II.

SINGER DÉNES*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

A bondgráf technika igazi jelentősége elsősorban olyan összetett rendszereknél mutatkozik meg, melyeknél áramlási anyag- és hőátadási, valamint kémiai folyamatok bonyolult egymásrahatásáról van szó. A munka ezen második része ilyen rendszerek bondgráf modelljeinek előállítására ad szisztematikus útmutatást, melyet tipikus műszaki berendezések példáján illusztrál.

Bevezetés

A tanulmány első részében ismertettük a fizikai rendszerek modellezésének bondgráftechnikán alapuló módszerét. A tárgyalta alkalmazási példák egyértelműen igazolták az új koncepció hasznosságát. Mivel az alkalmazások elsősorban az elvek illusztrációját szolgálták, hasonlóan más szerzőkhöz [2], [3], [5], tárgyalásunkat viszonylag egyszerű mechanikai és elektromechanikai rendszerekre korlátoztuk.

Mivel a bondgráf technika igazi jelentősége a bonyolult és a klasszikus módszerekkel nehezen kezelhető problémák megoldásánál mutatkozik meg, a tanulmány ezen második része ilyen rendszerekre összpontosítja a figyelmet. Vizsgálataink tárgyát elsősorban az ún. folytonos rendszerek képezik, mint amilyenek a hőtechnikai, kémiai, technológiai, biológiai, ekológiai stb. rendszerek, amelyeknél áramlási, anyagátadási, hőátadási és kémiai kinetikai folyamatok bonyolult egymásrahatásáról van szó.

Ezeknél a rendszereknél nemcsak a különböző jellegű folyamatok összekapcsolása alkotja a nehézségeket, hanem az a tény is, hogy a konjugált változó párok kapcsolódására érvényes Kirchhoff-féle törvények mellett más, nem energetikai jellegű feltételeket is ki kell elégíteni. Ilyen feltételeket jelentenek a változók között fennálló egyéb fizikai összefüggések, a berendezések geometriai méretei, ezek maximális terhelhetőségére vonatkozó adatok stb.

Problémák forrásai nemcsak a különböző folyamatok kapcsolódásai lehetnek, hanem maguk az alapfolyamatok is, különösen a hőtechnikai és kémiai-kinetikai folyamatok. Bár az [1]-ben a bondgráftechnikára vonatkozó megállapítások minden alapfolyamatra érvényesek, célszerű a módszer ezen területeken való alkalmazására kissé részletesebben kitérni.

* Dr Singer Dénes, 1021. Budapest, Nyéki u. 9

A hőtechnikai folyamatok bondgráf reprezentációjáról

A klasszikus termodinamika konjugált változói az abszolút hőmérséklet és a hőáram. Mivel a hőáram magában is teljesítménydimenziójú, az abszolút hőmérsékletnek dimenzió nélküli számnak kellene lennie. Ezt elkerülendő a hőáram helyett az \dot{S} entrópiaáram látszik megfelelőnek a T abszolút hőmérséklet konjugált változójaként.

Az \dot{S} -nek áramváltozóként való kezelése mindenesetre a következő nehézségek áthidalását igényli:

- a) az áramváltozók integráljai megmaradó mennyiségek, így az entrópiaáramnak a villamos árammal izomorf mennyiségnek kell lennie;
- b) az entrópia csak reverzibilis folyamatokra van definiálva;
- c) a mechanikai, hidraulikus és villamos ellenállás olyan berendezés, mely irreverzibilis módon egyébként hasznosítható energiát hővé alakít át. A hőellenállás fogalma nyilvánvalóan más értelmezést kíván.

Reverzibilis folyamatokra az S entrópia és a q villamos töltés izomorfiaja tényleg fennáll. Az entrópia definíciója:

$$S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta E_{\text{rev}}}{T(E)}, \quad (1)$$

ahol E_{rev} a rendszer által reverzibilis úton felvett vagy leadott energia, $T(E)$ az abszolút hőmérséklet a reverzibilis energia függvényében. A q villamos töltés szintén kifejezhető az (1) egyenlettel formálisan azonos kifejezéssel. A kondenzátor töltés közben felvett villamos energiája

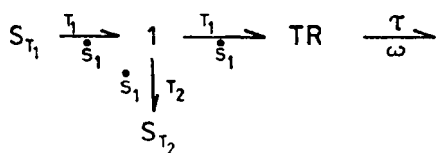
$$dE = e idt = edq, \quad (2)$$

vagyis

$$q = \int_{E_1}^{E_2} \frac{\delta E}{e(E)}. \quad (3)$$

Reverzibilis hőfolyamatok esetében tehát az entrópia és az entrópiaáram úgy tekinthető, mint töltés, ill. áram jellegű mennyiségek. A reverzibilis folyamatokra a bondgráf koncepció minden további nélkül alkalmazható. A reverzibilis hőtechnikai rendszerek egy ismert példája a Carnot-féle gép. Ez hőt konvertál mechanikai energiává, úgyhogy a rendszer entrópiája állandó marad. Az \dot{S}_1 entrópiaáram a rendszerbe T_1 hőmérsékleten lép be és T_2 hőmérsékleten lép ki. A $(T_1 - T_2)\dot{S}_1$ nagyságú hőteljesítmény emellett mechanikai teljesítménnyé alakul át. A Carnot-gép bondgráfja az 1. ábrán látható. A S_{T_1} forrás által szolgáltatott hőáram egy l -kötésen keresztül megoszlik az S_{T_2} (negatív)

* Megjegyzés. Itt a fizikai hálózatok elméletében meghonosodott kifejezéssel élünk: „entropiagenerálás” alatt entrópia növekedés értendő.



1. ábra

forrás és a tömegáramok mechanikai energiára való átalakítására szolgáló *TR* transzformátor között. Az ábráról közvetlenül leolvasható, hogy a Carnot-gép hatásfoka

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} . \quad (4)$$

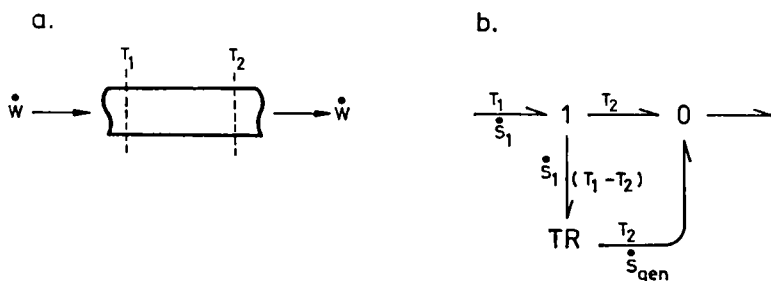
Mi a helyzet irreverzibilis folyamatokat tartalmazó rendszereknél? Minden irreverzibilis folyamat entrópiát generál a rendszer szabad energiája (available energy) rovására.* *Entrópia* a következő alapfolyamatoknál keletkezik:

- a) a hővezetésnél, véges hőmérsékletkülönbségek esetében;
- b) mechanikai vagy elektromos súrlódásnál;
- c) folyadékok keverésénél.

Mechanikai és villamos rendszerek esetében, amennyiben elvonatkoztatunk az ellenállások által termelt hőtől, nem kell az irreverzibilis folyamatokat figyelembe venni. Más a helyzet a hőfolyamatoknál. Itt az ellenállás nem okoz hasznos teljesítményvesztést, hanem *entrópiagenerátor* szerepét tölti be. A hőellenállás felfogható, mint olyan transzformátor, mely a bemeneti oldalon felvett hőáramot a kimeneti oldalon maradék nélkül leadja, miközben entrópiát termel.

A 2a. ábrán a hővezetőbe T_1 hőmérsékleten belépő \dot{W} hőáram, ebből T_2 hőmérsékleten távozik. Feltételezve, hogy a vezető palástmenti hőszigetelése tökéletes

$$\dot{W} = T_1 \dot{S}_1 = T_2 \dot{S}_2 . \quad (5)$$



2. ábra

* Megjegyzés. Itt a fizikai hálózatok elméletében meghonosodott kifejezéssel élünk: „entrópiagenerálás”-on entropia növekedés értendő.

Mivel T_2 mindig kisebb T_1 -nél, az (5) alapján $\dot{S}_2 > \dot{S}_1$, vagyis entrópia generálódik.

A $T_1 \dot{S}_1$ teljesítmény az 1-kötésnél két részre bomlik, egy elvben teljes egészében hasznosítható munkává átalakítható $T_2 \dot{S}_1$ teljesítményre és egy $(T_1 - T_2) \dot{S}_1$ nagyságú, hasznosítható munkává vissza nem alakítható teljesítményre (2b. ábra). Az utóbbi a TR transzformátor kimenő oldalán az \dot{S}_{gen} entrópiaáramot produkálja, mely egy O -kötésen keresztül hozzáadódik az \dot{S}_1 áramhoz. A 2b. ábra alapján

$$\dot{S}_{gen} T_2 = \dot{S}_1 (T_1 - T_2), \quad \text{vagyis} \quad \dot{S}_{gen} = \dot{S}_1 \frac{T_1 - T_2}{T_2} \quad (6)$$

továbbá

$$\dot{S}_2 = \dot{S}_1 + \dot{S}_{gen} = \dot{S}_1 \frac{T_1}{T_2}, \quad (7)$$

ami megegyezik az (5)-tel. További hőfolyamatok bondgráfjait illetően lásd a [2], [3]-at.

A vegyi reakciók bondgráf reprezentációja

A vegyi reakciók kinetikájának áram és erőváltozói az J kémiai reakciósebesség és az A affinitás. Definíciószerűleg

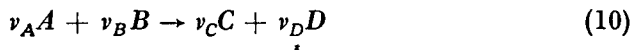
$$J \triangleq \frac{1}{v_i} \frac{dn_i}{dt}; \quad A = - \sum_i v_i \mu_i \quad (8)$$

ahol n_i és μ_i az i -edik komponens mólszáma és kémiai potenciálja, v_i ennek sztöchiometriai állandója. A reakciónál disszipálódó teljesítmény (konstans hőmérsékleten és nyomáson):

$$\dot{G} = J \cdot A = \sum_i \dot{n}_i \mu_i. \quad (9)$$

G a Gibbs-féle szabad energia. A μ_i -ket a „komponens kapacitások” potenciáljaként értelmezve, a (8) alapján könnyen belátható, hogy a kémiai reakció esetében lényegében komponenskapacitások soros kapcsolásáról van szó, mely egy a (9) teljesítmény irreverzibilis disszipációjáért felelős R reakcióellenállással hurkot képez.

Más szóval, a kémiai reakció bondgrájában a C_i komponenskapacitások és az R reakcióellenállás egy 1-kötésen keresztül kapcsolódnak. Mivel a (8) szerint minden μ_i egy v_i értékkel van súlyozva, a μ_i potenciálok összekötése v_i áttétellel bíró TR transzformátorokon, ill. girátorokon keresztül történik. A



reakció bondgráfja a 3a. ábrán látható:

$$v_i J = \frac{dn_i}{dt} = \frac{dn_i}{d\mu_i} \frac{d\mu_i}{dt} = C_i \frac{d\mu_i}{dt}, \quad (11)$$

ahol definíciószerűleg $C_i = dn_i/d\mu_i$ az i -edik komponens kapacitástényezője. Kisnyomású gázok és ritka oldatok esetében a μ_i kémiai potenciál és az n_i mólszám közt a

$$\mu_i = R_g T \ln \frac{n_i}{V} + \mu_i^{(0)} \quad (12)$$

összefüggés áll fenn, ahol V a reakcióterfogat, R_g az univerzális gázállandó, $\mu_i^{(0)}$ a bázispotenciál. Ilyen rendszereknél a C_i kapacitástényező

$$C_i = \frac{dn_i}{d\mu_i} = \frac{V}{R_g T} \exp \frac{\mu_i - \mu_i^{(0)}}{R_g T} = \frac{n_i}{R_g T}. \quad (13)$$

A kémiai reakció „ellenállásának” definíciója $R = \partial A / \partial J$. Mindenesetre egyetlen ellenállással csak az egy irányba futó reakciót lehet jellemezni. A megfordítható reakció esetében külön ellenállásokat kell bevezetni az előre, ill. hátrafutó reakciók jellemzésére. Mivel ezek egymástól nem függetlenek, a megfordítható reakciónál ennek *kétkapu* ellenállásáról kell beszélni.

Az J reakciósebesség valójában az $J^{(f)}$ előre, ill. $J^{(r)}$ visszafelé futó reakció sebességek eredője

$$J = J^{(f)} - J^{(r)}. \quad (14)$$

Ugyanez vonatkozik az A reakcióaffinitásra is

$$A = A^{(f)} - A^{(r)} \quad (15)$$

ahol $A^{(f)}$ és $A^{(r)}$ az előre, illetve hátrafutó reakciók affinitása:

$$A^{(f)} = - \sum_j v_j \mu_j; \quad A^{(r)} = - \sum_k v_k \mu_k \quad (16)$$

A j és k index a reakcióegyenlet bal, ill. jobb oldalán álló komponensekre vonatkozik. Megfordítható reakcióknál a J reakciósebesség úgy az $A^{(f)}$, mint $A^{(r)}$ függvénye

$$J = f(A^{(f)}, A^{(r)}). \quad (17)$$

Az előrefutó és visszafelé futó reakciókra külön-külön feltételezhetjük az ún. tömeghatás törvényének érvényességét. Kisnyomású gázok, ill. gyenge oldatok esetében így $J^{(f)}$ és $J^{(r)}$

$$J^{(J)} = k^{(J)} V \prod_j \left(\frac{n_j}{V} \right)^{v_j}; \quad J^{(r)} = k^{(r)} V \prod_k \left(\frac{n_k}{V} \right)^{v_k} \quad (18)$$

alakokkal bír, ahol $k^{(J)}$ és $k^{(r)}$ a megfelelő sebességi állandók [5]. Ezzel

$$J = J^{(J)} - J^{(r)} = J^{(J)} \left(1 - \frac{J^{(r)}}{J^{(J)}} \right) = J^{(J)} \left[1 - \frac{k^{(r)} \prod_k \left(\frac{n_k}{V} \right)^{v_k}}{k^{(J)} \prod_j \left(\frac{n_j}{V} \right)^{v_j}} \right]. \quad (19)$$

A termodinamikai egyensúly közelében feltételezhető, hogy $k^{(J)}$ és $k^{(r)}$ sebességi állandók aránya a termodinamikai egyensúly K_{eq} állandójával egyenlő, vagyis

$$\frac{k^{(J)}}{k^{(r)}} = K_{eq} = \exp(-G^{(0)}/R_g T), \quad (20)$$

ahol $G^{(0)}$ a reakció Gibbs-féle szabad energiája az egyensúlyi állapot közelében [6].

A (20) figyelembevételével a (19)-ből a

$$J = J^{(J)} \left[1 - K_{eq}^{-1} \prod_k \left(\frac{n_k}{V} \right)^{v_k} \prod_j \left(\frac{n_j}{V} \right)^{v_j} \right] \quad (21)$$

kifejezés adódik. A (12) és (18) alapján, továbbá

$$J = k^{(J)} \exp \left(- \sum_j v_j \mu_j^{(0)}/R_g T \right) \exp \left(\sum_j v_j \mu_j/R_g T \right) \times \\ \times \left[1 - K_{eq}^{-1} \left(- \sum_i v_i \mu_i^{(0)}/R_g T \right) \exp \left(\sum_i v_i \mu_i/R_g T \right) \right], \quad (22)$$

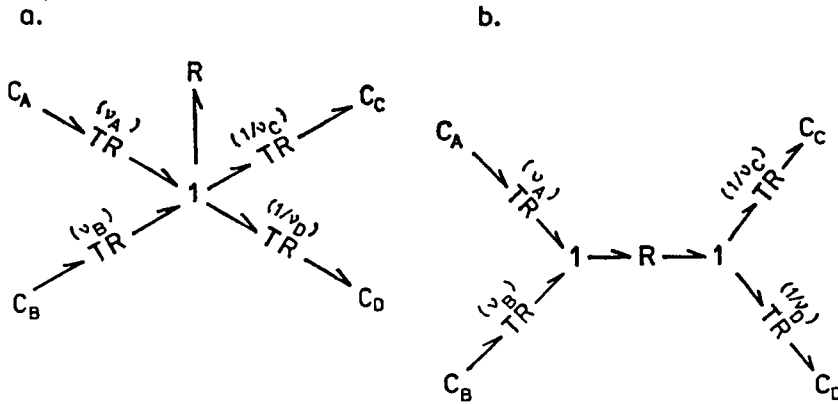
ahol $\mu_i = \mu_k - \mu_j$ jelölést alkalmaztunk. Mivel definíciószerűleg $\sum_i v_i \mu_i = G^{(0)}$, a (20) alapján a (22) a következő alakot nyeri:

$$J = k^{(J)} \exp \left(- \sum_j v_j \mu_j^{(0)}/R_g T \right) \exp (A^{(J)}/R_g T) \cdot [1 - \exp (-A/R_g T)] \quad (23)$$

lásd a (15) és (16)-ot. Vagyis:

$$J = \kappa [\exp (A^{(J)}/R_g T) - \exp (A^{(r)}/R_g T)] = f(A^{(J)}, A^{(r)}), \quad (24)$$

$$\kappa = k^{(J)} \exp \left(- \sum_j v_j \mu_j^{(0)} \right).$$



3. ábra

A kémiai reakció ellenállás kétkapuját jellemző R , ill. $R^{(r)}$ ellenállások kifejezései így

$$R^{(f)} = \left(\frac{\partial A(f)}{\partial J} \right)_{A^{(r)}} = \left(\frac{J}{A^{(f)}} \right)_{A^{(r)}}^{-1} = \frac{R_g T}{\kappa} \exp(-A^{(f)}/R_g T),$$

$$R^{(r)} = -\frac{R_g T}{\kappa} \exp(-A^{(r)}/R_g T). \quad (25)$$

Az egyirányú reakció esetében, vagyis, ha $A^{(f)} \gg A^{(r)}$, a (15) figyelembevételével a (25)

$$R^{(f)} \simeq \exp(A/R_g T) = R, \quad (26)$$

$$R^{(r)} = -\infty$$

alakba írható. A reakcióellenállás ebben az esetben egykapunak tekinthető, mint ezt a 3a. ábrán látható bondgráfnál feltételeztük.

Összetett műszaki rendszerek modellezése

Minden műszaki rendszer bizonyos standard modulokból áll. Így egy kémiai technológiai rendszer standard moduljai a keverők, reaktorok, abszorberek, desztillációs készülékek stb. A modulberendezések modelljei a vázolt bondgráfós módszerrel energetikai elemekből felépíthetők és így a műszaki rendszer is energetikai elemek hálózataként fogható fel. A műszaki rendszerre, mint hálózatra az jellemző, hogy a tömeg, komponens és energiaáramok az egyes moduloknak megfelelő részhálózatokba bizonyos meghatározott pontokban lépnek be, ill. ki.

Hálózatelméleti megfontolások előnyeire nagy műszaki rendszerek modellezésénél a szerző már korán rámutatott [7], [8]. Felhívta a figyelmet arra, hogy a műszaki rendszerek változói két csoportba oszthatók: ezek ener-

getikai viszonyait visszatükröző konjugált változó párokra és nem-konjugált változókra. Az utóbbiak felfoghatók, mint olyan irányító változók, melyek teljesítmény leadása nélkül befolyásolhatják a konjugált változó párok között fennálló konstitutív relációkat.

A vázolt koncepció nagy mértékben összhangban van a bondgráf koncepcióval, azzal az eltéréssel, hogy az utóbbi a konstitutív relációk teljesítmény nélkül történő befolyásolását csakis a transzformátornál és girátornál engedi meg. A bondgráf módszer, másrészt a mondottak pontosítására és kiszélesítésére is lehetőséget nyújt. Megengedi több-kapú elemek alkalmazását és ami a leglényegesebb, leegyszerűsíti az összefüggések grafikus ábrázolását.

A bondgráf technika segítségével a műszaki rendszerek modelljeinek felépítése a következőképpen történik. A rendszert részrendszerekre bontjuk, majd a részrendszerekre vonatkozólag felírjuk a tömeg, komponens, energia stb. mérlegeket. Az ezekben szereplő változókat ezután megfelelően választott konjugált változókkal cseréljük fel. A konjugált változók bevezetésével adódó összefüggéseket fizikai elemek konstitutív relációjaként értelmezve felvázolható a bondgráf alapkonfigurációja. Ehhez kapcsoljuk az irreverzibilis folyamatokat tükröző ellenállásokat.

A modellszerkesztés további lépése a nem-konjugált változók hatását reprezentáló vezérelt transzformátorok, girátorok és nullorelemek beiktatása. Végül a részrendszerek összekapcsolása következik, ami ideális kapcsolóelemek — O - és 1 -kötések —, ill. transzformátorok és girátorok segítségével történik.

Bonyolultabb rendszerek bondgráfmodelljeinek megszerkesztéséhez lényeges segítséget nyújthat olyan viszonylag egyszerű rendszerek bondgráfjainak ismerete, amelyeknél ez lényegileg egyetlen mérleget tükröz, pl. a tömegáramét vagy a komponensáramét. Ilyen sémák n számú változóra történő általánosításával a tömeg, komponens, hő és reakciókomponensek dinamikus egyensúlyának általános bondgráfjai nyerhetők.

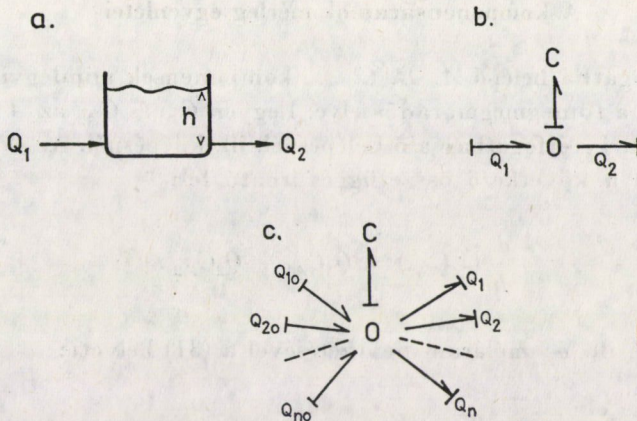
A tömegáram mérleg egyenlete

A 4a. ábrán látható egyszerű hidraulikus rendszer tömegáram mérlegére a

$$\frac{d\gamma V}{dt} = \gamma(Q_1 - Q_2) \quad (26)$$

összefüggés írható fel; V a tartályban levő folyadék térfogata, Q_1 és Q_2 a be-, ill. kimenő térfogatáramok, γ a fajsúly. Bevezetve az A keresztmetszetet és a h magasságot a (26) helyett:

$$\frac{d\gamma h}{dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{\gamma}{A}(Q_1 - Q_2) \quad (27)$$



4. ábra

írható, ahol $\gamma h = P$ folyadékoszlop nyomása. Mivel P és Q konjugált változó-párok, a (27) egy $C = A/\gamma$ tényezőjű kapacitás konstitutív relációját reprezentálja. A megfelelő bondgráf a 4b. ábrán látható.

Azon általános esetben, amikor a tartályhoz N -számú bemenő, ill. ki-menőáram kapcsolódik, a dinamikus tömegmérleget a

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{C(h)} \sum_{i=1}^N Q_i \quad (28)$$

összefüggés fejezi ki, ahol az általánosság kedvéért az A és így a C tényező a folyadék magasság függvénye. A 4c. ábrán adott séma a folyadék tömegmérleg általános bondgráfjának tekinthető. Ugyanez gázáramoknál is használható, amennyiben az ideális gáztörvény érvényesnek tételezhető fel. A dinamikus tömegmérleg kifejezése ebben az esetben

$$\frac{dn}{dt} = \sum_i Q_i \quad (29)$$

n a tartályban levő gáz mólszáma. A

$$PV = nRT$$

gáztörvény alapján ez a

$$\frac{dP}{dt} = \frac{RT}{V} \sum_i Q_i = \frac{1}{C} \sum_i Q_i \quad (30)$$

alakba írható; $C = V/RT$. A (30) formálisan azonos a (28)-al, csupán a C kapacitástényező alakja változott.

A komponensáramok mérleg egyenletei

A V térfogatba belépő A, B, C, \dots komponensek mindegyikére külön-külön érvényes a tömegmegmaradás elve. Legyen C_{A1} és C_{A2} az A komponens koncentrációja a V térfogatba való belépésnél, ill. kilépésnél. Az A komponens megmaradására a következő összefüggés írható fel:

$$\frac{d}{dt}(VC_{A2}) = Q_1 C_{A1} - Q_2 C_{A2}. \quad (31)$$

Az n_A mólszám, ill. \dot{n}_A móláram bevezetésével a (31) helyett:

$$\frac{d}{dt}(n_{A2}) = \dot{n}_{A1} - \dot{n}_{A2} \quad (32)$$

írható.

Vezessük be a (32) bal oldalán az n_{A2} helyett az \dot{n}_A -hoz tartozó konjugált változót, a μ_A kémiai potenciált. Alacsony nyomású gázok és gyenge oldatok esetében ez az n/V logaritmusikus függvénye:

$$\mu = \chi \left(\frac{n}{V} \right) = \mu^{(0)} + R_g T \ln \left(\frac{n}{V} \right). \quad (33)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d\chi}{d \left(\frac{n}{V} \right)} \frac{d \left(\frac{n}{V} \right)}{dt} = \frac{R_g T}{n} \dot{n}. \quad (34)$$

A (32)-be helyettesítve:

$$\frac{dn_A}{dt} = \frac{R_g T}{n_{A2}} (\dot{n}_{A1} - \dot{n}_{A2}). \quad (35)$$

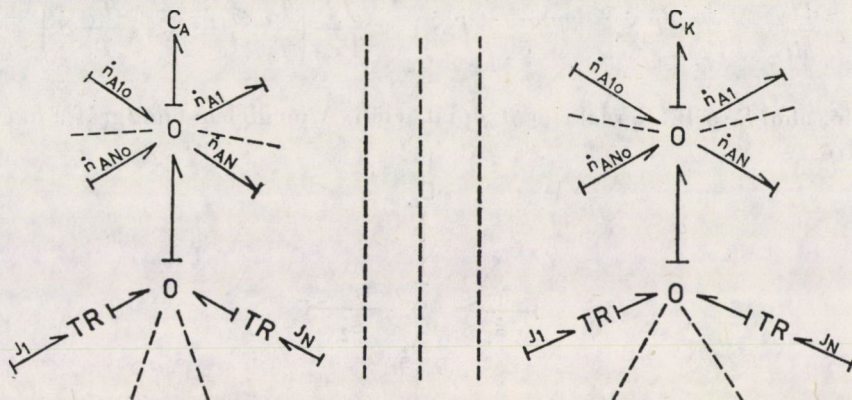
Az A komponens mérlegét kifejező (32) összefüggést így egy $C = n_{A2}/R_g T$ kapacitástényezőjű tároló konstitutív relációjával helyettesítettük.

Az A komponensáram dinamikus egyensúlyának (35) alakja mindenestre még nem a legáltalánosabb. Az egyenlet jobb oldalán ugyanis figyelembe kell venni az esetleges kémiai reakcióknál képződő, ill. elhasznált anyagmennyiségeket. Egyetlen reakció esetében ez nem más, mint az A komponensre felírt J reakciósebesség, ill. ennek a ν_A sztöchiometriai állandóval képzett szorzata. Ha feltételezzük, hogy az A komponens N számú reakcióban vesz részt, a (35) helyett, így a

$$\frac{d\mu_A}{dt} = \frac{R_g T}{n_{A2}} (\dot{n}_{A1} - \dot{n}_{A2}) + \sum_i^N \nu_{Ai} J_i \quad (36)$$

összefüggés áll fenn.

Hasonló kifejezések írhatók fel a B, C, \dots, K komponensekre is. A komponensmérleget kifejező általános bondgráf az 5. ábrán látható. A ν_{Ak} sztöchiometriai állandókat a TR transzformátorok modellezzik.



5. ábra

A hőmérleg egyenlete

A V térfogatba be-, ill. kilépő két hőáram esetére a termikus egyensúly a következőképpen fogalmazható meg:

$$\frac{d}{dt}(Vc_2T_2) = Q_1c_1T_1 - Q_2c_2T_2, \quad (37)$$

ahol T_1 és T_2 a két áram abszolút hőmérséklete, c_1 és c_2 ezek fajhője.

Hasonlóan, mint az előbbi esetekben, vezessünk be konjugált változókat.

$$\frac{d}{dt}(Vc_2T_2) = T_1 \left(\frac{Q_1c_1T_1}{T_1} \right) - T_2 \left(\frac{Q_2c_2T_2}{T_2} \right). \quad (38)$$

A (38) jobb oldalán a zárójelben szereplő kifejezések definíciószerűleg a térfogatáramokkal hordozott entrópiaáramok, \dot{S}_1 , ill. \dot{S}_2 . Vagyis

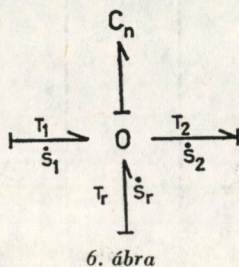
$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{Vc_2} (T_1\dot{S}_1 - T_2\dot{S}_2) = \frac{T_2}{Vc_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \dot{S}_1 - \dot{S}_2 \right). \quad (39)$$

Mivel T és \dot{S} konjugált változó párok a (39) egy $C = T_2/Vc_2$ kapacitás-tényezővel rendelkező tároló konstitutív relációjaként értelmezhető.

Általános esetben a (39) bal oldalához hozzá kell számítani a V térfogatban lejátszódó kémiai reakciók útján előállított, ill. elhasznált W hőmennyiséget. A (39) helyett így

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{Vc_2} (T_1 \dot{S}_1 - T_2 \dot{S}_2 + T_r \dot{S}_r) = \frac{T_2}{Vc_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \dot{S}_1 - \dot{S}_2 + \frac{T_r}{T_2} \dot{S}_r \right) \quad (40)$$

írandó, ahol \dot{S}_r a W/T_2 reakcióentrópiát jelöli. A megfelelő bondgráf a 6. ábrán látható.



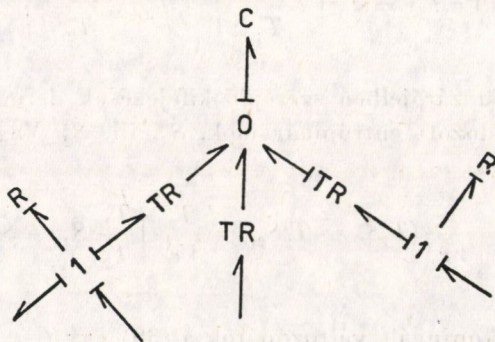
6. ábra

Összetett kémiai reakció komponensáramainak mérlege

Amennyiben a kémiai komponensek több reakcióban vesznek részt, a komponensáramok egyensúlya az egyes reakciókra érvényes (24) konstitutív relációk, másrészt az

$$J_k = \sum_{i=1}^N v_{ki}^{(p)} J_i - \sum_{i=1}^N v_{ki}^{(c)} J_i \quad (41)$$

összefüggésből adódik; $v_{ki}^{(p)} J_i$ és $v_{ki}^{(c)} J_i$ a k -adik komponens képződésének, ill. elhasználódásának sebessége az i -edik reakcióban, J_k a k -adik komponens



7. ábra

képződési sebességének effektív értéke. Az egyes komponensek pillanatnyi értéknek meghatározására a következő egyenletek szolgálnak:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{d}{dt}(Vc_k) = J_k; \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (42)$$

Bondgráfos értelmezésben a J_k nem más, mint az egyes komponenskapacitások *eredő* árama. A (41) a bondgráfban egy 0-kötés és megfelelő számú transzformátor segítségével realizálható. A reakciórendszerek bondgráfjai lényegében a 7. ábrán látható alapotívumokból épülnek fel; lásd ehhez a következőkben szereplő alkalmazási példát.

Néhány tipikus kémiai-technológiai berendezés bondgráf modellje

Az előző általános megfontolásokat a következőkben néhány tipikus műszaki berendezés bondgráfjának szerkesztésén mutatjuk be.

1. *A keverőberendezés*

A 4 tartályba az 1 és 2 szelepen keresztül két folyadék áramlik, melyek az összekeverés után a 3 szelepen keresztül távoznak (8a. ábra). A belépő folyadékáramok közül az első az A , a másik a B komponenszt tartalmazza, c_{A0} , ill. c_{B0} koncentrációban. A rendszer további független változói a β és 3 szelepek előtt uralkodó P_1 , ill. P_2 nyomások. Adva vannak továbbá a γ szelepen beállított Q_3 kimenő áram, valamint a P_0 atmoszferikus nyomás és a szelepek G_1, G_2, G_3 áramlási tényezői (melyek a szelepek beállítási értékének függvényei). Független változók a Q_1, Q_2 folyadékáramok, valamint az A és B komponensek koncentrációi a kimenő áramban, c_a , ill. c_B , továbbá a folyadékoszlop h magassága.

A rendszer viszonyait nyilvánvalóan a dinamikus tömegmérleg, az A és B komponensáramok mérlegei, továbbá az α, β, γ szelepek konstitutív relációi határozzák meg. A (28) alapján a tömegmérleg kifejezése:

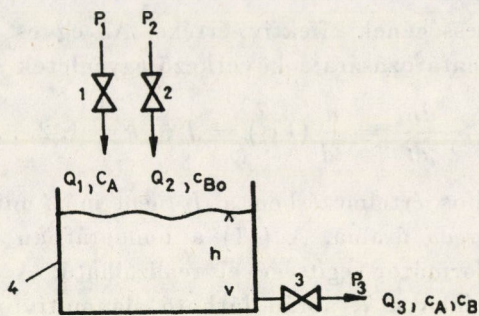
$$\frac{dP_h}{dt} = \frac{\gamma}{A} (Q_1 + Q_2 - Q_3). \quad (43)$$

A komponensmérlegek a (36) alapján

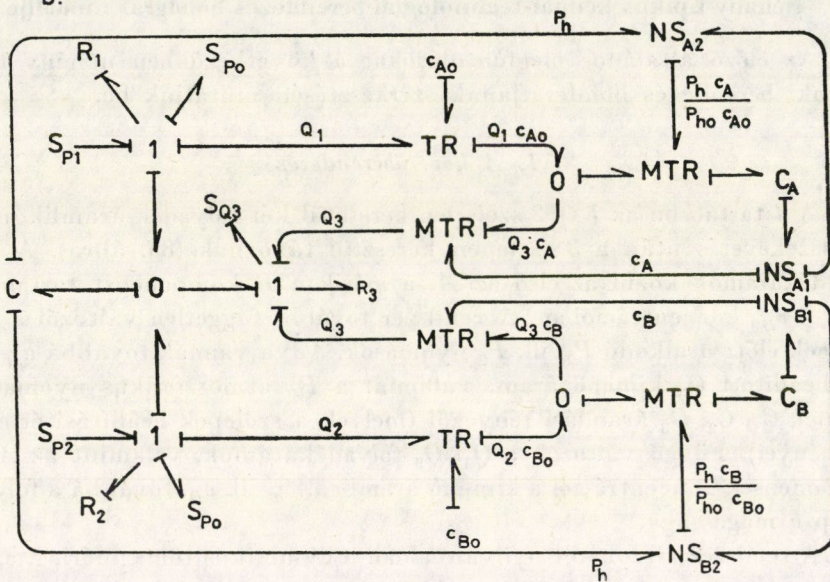
$$\begin{aligned} \frac{dn_A}{dt} &= \frac{R_g T}{n_A} (\dot{n}_{A0} - \dot{n}_A), \\ \frac{dn_B}{dt} &= \frac{R_g T}{n_B} (\dot{n}_{B0} - \dot{n}_B). \end{aligned} \quad (44)$$

n_A és n_B a tartályban, az A , ill. B komponensek pillanatnyi mólmennyiségei, $\dot{n}_{A0}, \dot{n}_{B0}$ az A és B bemenő, \dot{n}_A, \dot{n}_B ezek kimenő móláramai.

a.



b.



8. ábra

A szelepek konstitutív relációi:

$$\begin{aligned} Q_1 &= G_1(P_1 - P_0)^{1/2} \\ Q_2 &= G_2(P_2 - P_0)^{1/2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Mivel $\dot{n}_i = Q_i c_i$, a (43) helyett

$$\begin{aligned} \frac{dn_A}{dt} &= C_A^{-1}(Q_1 c_{Ao} - Q_3 c_A), \\ \frac{dn_B}{dt} &= C_B^{-1}(Q_2 c_{Bo} - Q_3 c_B) \end{aligned} \quad (46)$$

írható.

A C_A , C_B kapacitástényezők a μ_A , ill. μ_B potenciálok, valamint a P_h folyadéknomás függvényei. A (33) és (34) alapján:

$$C_A = \frac{n_A}{R_g T} = \frac{n_A/V}{R_g T/V} = \frac{c_A V}{R_g T} = \frac{V}{R_g T} \exp \left(-\frac{\mu_A - \mu_A^{(0)}}{R_g T} \right), \quad (47)$$

ahol V a tartályban levő folyadék pillanatnyi térfogata. Mivel $V = (A/\gamma)P_h$

$$C_A = \frac{A}{\gamma R_g T} P_h \exp \left(\frac{\mu_A - \mu_A^{(0)}}{R_g T} \right) = \text{const. } P_h \cdot C_A. \quad (48)$$

Hasonló kifejezés érvényes C_B -re is.

Először a (43) és (45) felhasználásával a rendszer bondgráfjának, az áramlási viszonyokat szemléltető bal oldali részét szerkesztjük meg (8b. ábra). Az ábra jobb oldali része tartalmazza a c_A , c_B kilépő koncentrációkat meghatározó részt. A két rész összekapcsolása a $Q_i c_i$ és $P_h c_i$ szorzatok képzésével történik, amihez transzformátorok, ill. vezérelt transzformátorok szolgálnak. Az utóbbiakat vezérlő potenciálokat nullorok állítják elő.

Az NS_{A1} és NS_{B1} nullorok a C_A , C_B kapacitások μ_A , μ_B potenciáljainak „visszaszámítását” végzik a

$$\mu_i = \mu_0 + R_g T \ln c_i; \quad i = A, B \quad (49)$$

összefüggés alapján. Az NS_{A2} , NS_{B2} nullorok a C_A és C_B kapacitástényezők értékeit állítják be; (a (47)-nek megfelelően, a pillanatnyi P_h és c_A , ill. c_B értékek alapján).

2. Szakaszos üzemi reaktor

A szóban forgó szakaszos működésű reaktorban formaldehid (F) és nátriumparafenolszulfonát (M), ill. az ezekből az alapanyagokból keletkező közbeeső termékek között a következő reakciók játszódnak le (1. táblázat):

1. táblázat [9]

No.	Reakciók	k_i m ³ /kmól min
1	$F + M \rightarrow MA$	0,16
2	$F + MA \rightarrow MDA$	0,50
3	$MA + MDA \rightarrow DDA$	0,15
4	$M + MDA \rightarrow DA$	0,14
5	$2MA \rightarrow DA$	0,03
6	$MA + M \rightarrow D$	0,058
7	$F + D \rightarrow DA$	0,50
8	$F + DA \rightarrow DDA$	0,50

(A komponensek megjelölésére a rövidség kedvéért nem kémiai képleteket, hanem betűjeleket használunk; k_i a reakciósebességek állandói.) Mint látható, a reaktorban 7 komponens között 8 reakció játszódik le.

A (41) kifejezés és az 1. táblázat alapján a komponenskapacitások J_k áramai ($k = F, M, MA, MDD, DDA, DA, D$) a következők:

$$\begin{aligned} J_F &= -J_1 - J_2 - J_7 - J_8, \\ J_M &= -J_1 - J_4 - J_6, \\ J_{MA} &= J_1 - J_2 - J_3 - 2J_5 - J_6, \\ J_{MDA} &= J_2 - J_3 - J_4, \\ J_{DDA} &= J_3 + J_8, \\ J_{DA} &= J_4 + J_5 + J_7 - J_8, \\ J_D &= J_6 - J_7. \end{aligned} \quad (50)$$

A J_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) áramok (reakciósebességek) a (24) relációból számíthatók; $A_1^{(r)} = 0$. A (12) figyelembevételével J_i

$$J_i = k^{(f)} \prod_j n_{ij}^{v_{ij}} \quad (51)$$

alakot veszi fel. Esetünkben az 1. táblázat alapján az (52) a következő egyenletrendszert szolgáltatja.

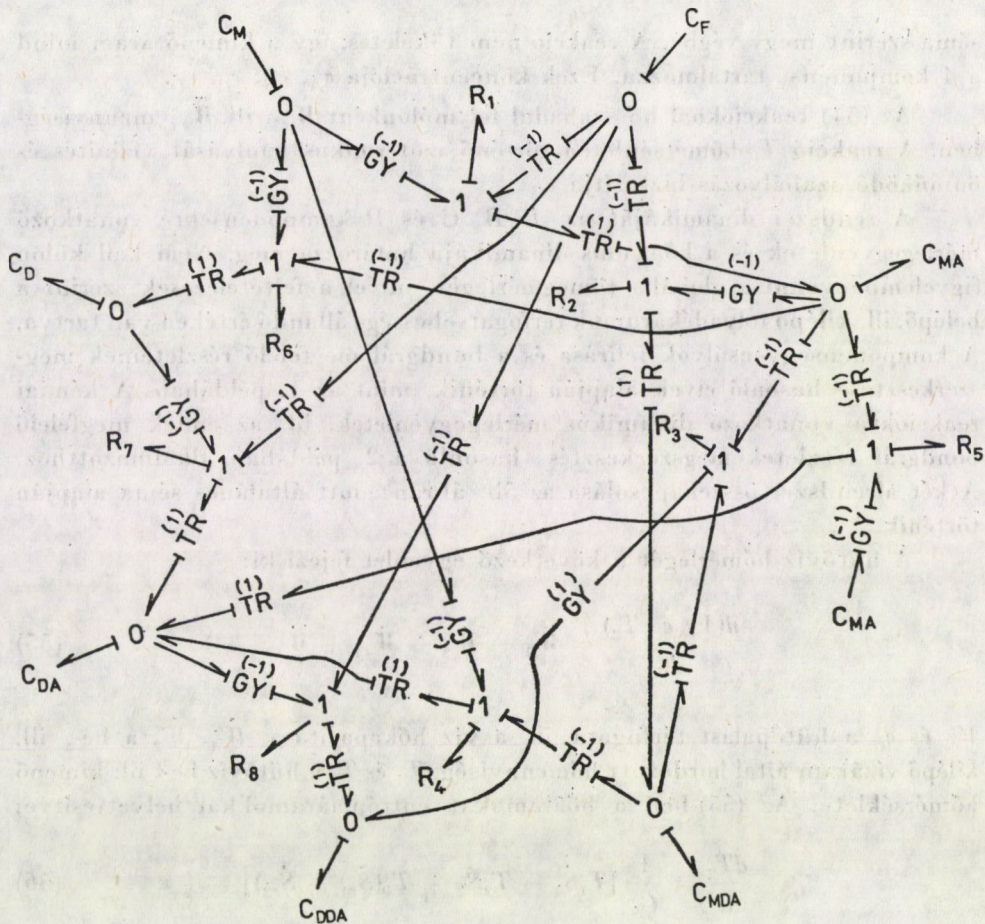
$$\begin{aligned} J_1 &= k_1 n_F n_M, & J_5 &= k_5 n M_A^2, \\ J_2 &= k_2 n_F n_{MA}, & J_6 &= k_6 n_{MA} n_M, \\ J_3 &= k_3 n_{MA} n_{MDA}, & J_7 &= k_7 n_F n_D, \\ J_4 &= k_4 n_M n_{MDA}, & J_8 &= k_8 n_F n_{DA}. \end{aligned} \quad (53)$$

Az (53)-nak az (50)-be, ill. a (42)-be való helyettesítésével a komponenskapacitások áramainak meghatározására szolgáló

$$\frac{dn_k}{dt} = J_k \quad k = F, M, MA, MDA, DDA, DA, D$$

differenciálegyenletrendszer adódik.

Az 1. táblázat és az (50), ill. (53) kifejezések alapján könnyen felismerhető, hogy a rendszer bondgráfja 7 komponenskapacitást, ugyanilyen számú O -kötést, ill. 8 reakció ellenállást és ugyanilyen számú l -kötést tartalmaz; (9. ábra). A O - és l -kötéseket összekapcsoló bondok tartalmazzák a ν sztöchiometriai állandókat reprezentáló transzformátorokat, ill. girátorokat. A girá-

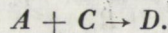
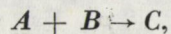


9. ábra

torok bevezetése a transzformátorok mellett azért vált szükségessé, hogy összhangban maradjunk a bondgráf kauzalitása által támasztott követelményekkel; lásd ehhez az [1]-ben a 3. táblázatot. Minden olyan ágban, ahol a $|\text{---}\times\text{---}|$ vagy $\text{---}\times\text{---}|$ konfiguráció adódott transzformátor helyett girátort kellett alkalmazni.

3. Folyadékreaktor

A 4 reaktorba belépő α és β folyadékáramok az A , ill. B komponenst c_{A0} , ill. c_{B0} koncentrációban tartalmazzák; (10a. ábra). Mindkét bemenő áram Q_1 , Q_2 , valamint a kimenő áram Q_3 térfogatsebessége állandó (önműködő szabályozás). A reaktorban a kémiai reakció az



séma szerint megy végbe. A reakció nem tökéletes, így a kimenő áram mind a 4 komponenszt tartalmazza. Ezek koncentrációja c_A, c_B, c_C, c_D .

Az (54) reakcióknál hő szabadul fel mólónként \dot{W}_{r1} , ill. \dot{W}_{r2} mennyiségben. A reakció T_r hőmérsékleten történő izotermikus lefolyását vízűtés és önműködő szabályozás biztosítja.

A rendszer dinamikáját az A, B, C és D komponensekre vonatkozó mérlegegyenletek és a hőátadás dinamikája határozza meg. Nem kell külön figyelembe venni a globális tömegmérleget, mivel a feltételezések szerint a belépő, ill. kilépő folyadékáramok térfogatsebessége állandó értéken van tartva. A komponensegyensúlyok felírása és a bondgráf megfelelő részleteinek megszerkesztése hasonló elvek alapján történik, mint az 1. példában. A kémiai reakciókra vonatkozó dinamikus mérlegegyenletek, ill. az ennek megfelelő bondgráf részletek megszerkesztése hasonló a 2. példában alkalmazotthoz. A két alrendszer összekapcsolása az 5b. ábrán adott általános séma alapján történik.

A hűtővíz hőmértékét a következő egyenlet fejezi ki:

$$\frac{d(V_{cl} c_{cl} T_2)}{dt} = \dot{W}_1 - \dot{W}_2 + \dot{W}_{r1} + \dot{W}_{r2} \quad (55)$$

V_{cl} és c_{cl} a hűtőpalást térfogata, ill. a víz hőkapacitása, \dot{W}_1, \dot{W}_2 a be-, ill. kilépő vízáram által hordozott hőmennyiség, T_1 és T_2 a hűtővíz be-, ill. kimenő hőmérséklete. Az (55)-ben a hőáramokat entrópiaáramokkal helyettesítve:

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{C_s} [T_1 \dot{S}_1 - T_2 \dot{S}_2 + T_0(\dot{S}_{r1} + \dot{S}_{r2})] \quad (56)$$

adódik, ahol $C_s = 1/c_{cl} V_{cl}$ a hűtés kapacitástényezője.

Mivel a $(\dot{W}_{r1} + \dot{W}_{r2})$ hőáramok elvonása a hűtő falán keresztül történik

$$T_2(\dot{S}_{r1} + \dot{S}_{r2}) = (\dot{W}_{r1} + \dot{W}_{r2}) = \lambda A(T_r - T_2) = \frac{1}{R_s}(T_r - T_2). \quad (57)$$

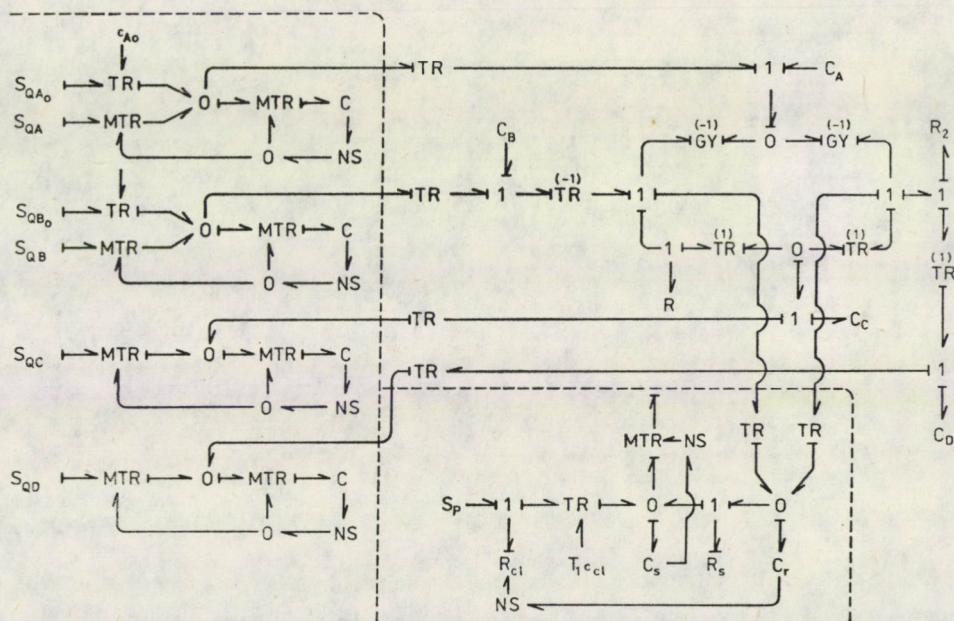
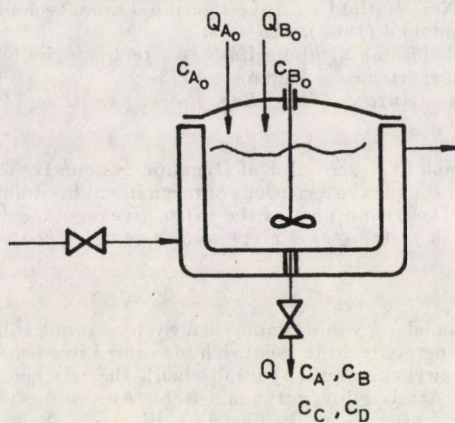
T_r a reakcióhőmérséklet, A és λ a fal felülete, ill. ennek globális hőátadási tényezője, $R_s = 1/\lambda A$ a fal hőellenállása. A hűtővíz által hordozott hőáram ennek térfogatsebességével arányos, ezért a \dot{W}_1 és \dot{W}_2 számára a

$$\dot{W}_1 = T_1 \dot{S}_1 = Q_{cl} c_{cl} T_1 = \frac{P_c}{R_c} c_c T_1 \quad (58)$$

$$\dot{W}_2 = T_2 \dot{S}_2 + \frac{P_{cl}}{R_{cl}} c_{cl} T_2$$

egyenletek írhatók fel. P_{cl} a hűtővíz bemeneti oldali nyomása, Q_{cl} ennek térfogatárama, R_{cl} a rendszer hidraulikus ellenállása.

A hűtőrendszer (55)–(58) alapján szerkesztett bondgráfja a 10b. ábra alsó részében látható. A $T_i S_i$ szorzatok képzésére transzformátorok, ill. vezérelt transzformátorok szolgálnak. Az NS nullor és az R_{cl} kétkapú ellenállás reprezentálja a T_r reakcióhőmérséklet stabilizálására szolgáló önműködő szabályozót és a beavatkozó szervet.



10. ábra

IRODALOM

1. SINGER D.: Műszaki rendszerek egységes bondgráf reprezentációja és állapotmodelljeinek előállítása I. *Műszaki Tudomány* (sajtó alatt)
2. THOMA, J. V.: Bond Graphs for Thermal Energy Transport and Entropy Flow. *J. Frank. Inst.* (1972) 109–120
3. VAN DIXHORN, J. J.—EVANS, F. J.: *Physical Structure in Systems Theory* Academic Press, London 1974
4. JOB, G.: *Neudarstellung der Wärmelehre*. Akad. Verl., Frankfurt/Main 1972.
5. OSTER, G. F.—PERELSON, A. S.—KATCHALSKY, A.: Network Thermodynamics: Dynamic Modelling of Biophysical Systems. *Quart. Rev. Biophys.*, 6 (1973), 1–134
6. KIRKWOOD, J. G.—OPPENHEIM, J.: *Chemical Thermodynamics*. McGraw, New York 1961
7. SINGER, D.: On a New Method of Investigating Large Technological Systems I. Theory. *Automatica* (London) 4 (1968), 425–434
8. SINGER D.: Fizikai hálózatok általánosítása és a technológiai folyamatok rendszerelmélete. Akadémiai doktori értekezés, Budapest 1973
9. STOULTS—MOULTON—CARTHY: *Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.* 4 (1952), p. 38

Unified Bondgraph Representation of Dynamic Systems II. The bondgraph technics prove mainly at systems with complex interactions of mechanical (hydraulic), thermal and chemical processes to be useful. The second part of the paper gives methodological advices for the bondgraph modelling of such systems and gives some examples concerning typical technological equipments.

Einheitliche Behandlung von dynamischen Systemen mit Hilfe der Bondgraphtechnik II. Die Bedeutung der Bondgraphtechnik zeigt sich in erster Linie bei Systemen mit komplizierten Zusammenwirken von mechanischen (hydraulischen), thermischen und chemischen Prozessen. Der zweite Teil dieser Arbeit gibt methodologische Anweisungen zur Schaffung von Bondgraphmodellen solcher Systeme, und illustriert diese an Beispielen von technologischen Apparaturen.

TARTÓK KIFORDULÁSÁNAK VIZSGÁLATA A KVADRATIKUS OPERÁTORNYALÁBOK ELMÉLETE ALAPJÁN

TARNAI TIBOR*

[Beérkezett 1976. dec. 31-én]

A dolgozat a rugalmas gerendák kifordulás-vizsgálatának egy variációs számítási módszerével foglalkozik. A stabilitási feladat révén előálló kvadratikus sajátérték-feladat megoldásához felhasználja a lineáris operátorok kvadratikus nyalábjának matematikai elméletét. Megmutatja, hogy a Ritz—Galerkin-módszer kvadratikus sajátérték-feladatok megoldására is alkalmas. A vizsgált esetre bebizonyítja a Ritz—Galerkin-módszer konvergenciáját, és egyben formulát ad a kritikus teherparaméter közelítő értékének meghatározására.

1. Bevezetés

A rugalmas stabilitás elméletében a gerendák kifordulásának problémája — kis elmozdulások mellett — gyakran kvadratikus sajátérték-feladat alakjában fogalmazható meg. Így például a mindkét végén villásan megtámasztott, vékonyfalú, szimmetrikus nyitott szelvényű tartók esetében is, ha a tartót transzverzális erők terhelik, vagy a tartó végeire axiális erők hatnak.

A stabilitási feladatok megoldásának egyik kiterjedten alkalmazott fontos variációs módszere a Ritz—Galerkin-módszer. A lineáris sajátérték-feladatra vezető stabilitási problémáknál bizonyítva van, hogy ez a módszer konvergens [11], és így segítségével a kritikus teherparaméter tetszőleges pontossággal megközelíthető. Kvadratikus esetben azonban nem ismert, hogy a kritikus teherparaméter Ritz—Galerkin-módszerrel előállított közelítő értékeinek sorozata konvergens-e, és ha igen, akkor a kritikus teherparaméterhez konvergál-e.

A jelen dolgozatban ezzel a kérdéssel fogunk foglalkozni. Bizonyítani fogjuk, hogy a Ritz—Galerkin-módszer a kifordulási probléma kvadratikus sajátérték-feladata esetében is konvergens, és előállítja a kritikus teherparamétert. Meg fogjuk mutatni, hogy a gyakorlati számítás ezzel a módszerrel éppen olyan szisztematikussá tehető, mint lineáris feladatoknál.

A problémát általánosan, a funkcionálanalízis eszközeivel fogjuk tárgyalni. Az alkalmazott fogalmak többségét — bár ezek a mérnöki gyakorlatban még nem eléggé használatosak — nem definiáljuk, csupán utalunk pl. [1, 11, 15]-re, ahol ezeknek az alapfogalmaknak és a velük kapcsolatos

* Dr. Tarnai Tibor, 1037 Budapest, Kolostor u. 17.

alapvető tételeknek az értelmezése és bizonyítása megtalálható. Vizsgálatainkat a lineáris operátorok kvadratikus nyalábjának elméletére alapozzuk. A matematikában aránylag újkeletű ez az elmélet, amelyet a gyakorlatban eddig elsősorban rugalmas testek csillapított rezgéseinek a vizsgálatakor alkalmaztak. A dolgozatban megmutatjuk, hogy a lineáris operátorok kvadratikus nyalábjának elmélete eredményesen alkalmazható tartók kifordulás-vizsgálatára is.

Az A, B, C operátorok λ paramétertől függő $A + \lambda B + \lambda^2 C$ alakú halmazát kvadratikus operátornyalábnak vagy operátorseregnek hívják.

Az általunk vizsgált kifordulási probléma az $L(\lambda) = A - \lambda B - \lambda^2 C$ operátornyaláb

$$L(\lambda)u = Au - \lambda Bu - \lambda^2 Cu = 0 \quad (1)$$

sajátérték-feladatára vezet, ahol A, B, C egy H (komplex) Hilbert-térben értelmezett lineáris operátorok. Ha $u \in H$, $u \neq 0$ és az (1) egyenlőség teljesül, akkor a λ (komplex) szám az $L(\lambda)$ nyalábnak egy sajátértéke, az u elem pedig a λ -hoz tartozó sajátéleme.

Jelölje (φ, ψ) ; $\varphi, \psi \in H$ a H -térben értelmezett skalárszorzatot. Legyenek az $L(\lambda)$ nyalábban szereplő A, B, C lineáris operátorok szimmetrikusak (az A lineáris operátor szimmetrikus, ha $D(A)$ értelmezési tartománya sűrű H -ban, továbbá bármely $u, v \in D(A)$ elemre teljesül, hogy $(Au, v) = (u, Av)$), és még az alábbi feltételeknek tegyenek eleget:

(1.1) Az A operátor pozitív definit (létezik olyan $\alpha > 0$ szám, hogy $(Au, u) \geq \alpha^2 \|u\|^2$ minden $u \in D(A)$ -ra), diszkrét spektrumú és $D(A) \subset D(B) \cap D(C)$ (ill. $H_A \subset D(B) \cap D(C)$, ahol H_A az (Au, u) szerint teljessé tett $D(A)$ -t jelöli [11]).

(1.2) A C operátor pozitív $((Cu, u) > 0$ minden $u \in D(C)$, $u \neq 0$ -ra).

Az (1.1) feltétel teljesülése esetén A -nak létezik teljesen folytonos, önadjungált és pozitív inverze: A^{-1} ([11], 222. o. 5. tétel), mely a H -teret H_A -ba viszi. A $z = Au$ transzformációval és $A_1 = BA^{-1}$, $A_2 = CA^{-1}$ jelöléssel az (1) egyenlet a

$$|z - \lambda A_1 z - \lambda^2 A_2 z = 0 \quad (2)$$

egyenletbe megy át. Az A_1 és A_2 operátorokról feltételezzük, hogy

(1.3) A_1 és A_2 véges abszolút normájúak.

Ha az (1.1), (1.2), (1.3) feltételek teljesülnek, akkor A^{-1} szimmetrizálja A_1 -et és A_2 -t, azaz $A^{-1}A_1$, $A^{-1}A_2$ önadjungált operátorok, továbbá A_2 -nek csak pozitív sajátértékei lehetnek. Így HARAZOV [6] 1., 2., 3. tétele alapján az $L(\lambda)$ nyalábnak csak valós sajátértékei lehetnek, melyek nem torlódhatnak a valós tengely véges szakaszán. Ha A_1 nem végesrendű operátor, akkor

az $L(\lambda)$ nyalábnak megszámlálhatóan végtelen sok $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ sajátértéke van úgy, hogy $\lim |\lambda_n| = +\infty$, ha $n \rightarrow \infty$.

A jelen dolgozatban az $L(\lambda)$ nyaláb sajátértékeinek a variációs módszer segítségével történő meghatározásával foglalkozunk. Mivel a stabilitás szempontjából legfontosabb az $L(\lambda)$ nyaláb legkisebb pozitív (legnagyobb negatív) sajátértékének az ismerete, ezért ezek meghatározására szorítkozunk. A transzverzális erőkkel terhelt gerenda esetében ugyanis a legkisebb pozitív sajátérték adja a tartóra lefelé ható teher kritikus paraméterét, a legnagyobb negatív sajátérték pedig a tartóra felfelé (vagy ha úgy tetszik, a hossz tengelye mentén 180° -kal elforgatott tartóra lefelé) ható teher kritikus paraméterét. A végein axiális erőkkel terhelt tartó esetében a legkisebb pozitív sajátérték a kritikus húzóerő, a legnagyobb negatív sajátérték pedig a kritikus nyomóerő értékét szolgáltatja, ha az összefüggésekben a húzóerőt tekintjük pozitívnak.

Megjegyezzük, hogy az $A^{-1/2}(\cdot)A^{-1/2}$ transzformációval és $\mu = 1/\lambda$ jelöléssel az $L(\lambda)$ nyaláb $\hat{L}(\mu) = \mu^2 I - \mu \hat{B} - \hat{C}$ alakra hozható, ahol \hat{B} és \hat{C} önadjungált operátorok, \hat{C} pozitív és I az identitásoperátor. Ilyen esetet vizsgált pl. MÜLLER [12, 13]. A μ paraméter transzlációjával [5] az $\hat{L}(\mu)$ nyaláb az $\tilde{L}(\mu) = \mu^2 I + \mu \tilde{B} + \tilde{C}$ alakra hozható, ahol \tilde{B} és \tilde{C} önadjungáltak, és \tilde{C} pozitív. Ilyen alakú nyalábok vizsgálatával KREJN és LANGER [7, 8] foglalkozott.

Kézenfekvőnek látszik, hogy az $L(\lambda)$ sajátértékeit az $L(\lambda)$ valamely fenti, egyszerűbb transzformált alakjából határozzuk meg. A gyakorlati számítás során mégis célszerűbb, ha nem alkalmazzuk a fenti transzformációt, és az $L(\lambda)$ nyaláb számunkra szükséges legkisebb pozitív (legnagyobb negatív) sajátértékét magából az (1) egyenletből számítjuk. Így ugyanis a differenciáloperátorokkal megfogalmazott sajátérték-feladatot nem kell integráloperátoros alakra transzformálni. A sajátértékeket közvetlenül a differenciálegyenlet segítségével lehet meghatározni, és nincs szükség az ekvivalens integrálegyenlet felírására. Ezért nem érdektelen, ha a DUFFIN [3, 4] munkáiban használt variációs elvet, melyet korlátos önadjungált operátorokból álló kvadratikussal nyalábra LANGER [10] és KÜHNE [9] alkalmazott, a nem-korlátos operátorokat tartalmazó $L(\lambda)$ nyalábra is megfogalmazzuk.

2. A sajátérték-problémához rendelhető variációs feladat

Tekintsük az (1.1), (1.2) feltételeknek eleget tevő A, B, C szimmetrikus operátorokat. Ekkor $u \in D(A)$, $u \neq 0$ esetén az $(L(\lambda)u, u) = (Au, u) - \lambda(Bu, u) - \lambda^2(Cu, u)$ polinom nullahelyeivel definiálható két funkcionál:

$$\mathcal{F}^+(u) = \frac{1}{2(Cu, u)} [-(Bu, u) + \sqrt{(Bu, u)^2 + 4(Au, u)(Cu, u)}], \quad (3)$$

$$\mathfrak{F}^-(u) = \frac{1}{2(Cu, u)} [-(Bu, u) - \sqrt{(Bu, u)^2 + 4(Au, u)(Cu, u)}]. \quad (4)$$

Az (1.1) és (1.2) feltételekből következően ezekre fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\mathfrak{F}^-(u) < 0 < \mathfrak{F}^+(u), \quad (u \in D(A), u \neq 0).$$

Most alkalmazzunk egy transzformációt, amely az A, B, C szimmetrikus operátorokat korlátos önadjungált operátorokba viszi. Evégből legyen $z = Au$, ($u \in H_A$), $\mu = 1/\lambda$, $E = A^{-1}$, $F = -A^{-1}BA^{-1}$, $G = -A^{-1}CA^{-1}$. Ez a transzformáció az $L(\lambda)$ nyalábot az

$$L_1(\mu) = \mu^2 E + \mu F + G \quad (5)$$

alakba viszi. Nyilvánvalóan teljesül az

$$(Fz, z)^2 > 4(Ez, z)(Gz, z) \quad (z \in H, z \neq 0) \quad (6)$$

feltétel. Az $(L_1(\mu)z, z)$ polinom nullahelyeivel is definiálható két funkcionál:

$$\mathfrak{F}^+(z) = \frac{1}{2(Ez, z)} [-(Fz, z) + \sqrt{(Fz, z)^2 - 4(Ez, z)(Gz, z)}], \quad (7)$$

$$\mathfrak{F}^-(z) = \frac{1}{2(Ez, z)} [-(Fz, z) - \sqrt{(Fz, z)^2 - 4(Ez, z)(Gz, z)}]. \quad (8)$$

Könnyen kimutatható, hogy

$$\mathfrak{F}^+(u) = \frac{1}{\mathfrak{F}^+(z)}, \quad \mathfrak{F}^-(u) = \frac{1}{\mathfrak{F}^-(z)}, \quad \text{ha } z = Au. \quad (9)$$

Az $L_1(\mu)$ nyaláb a (6) feltétellel azonos KÜHNE [9] erősen csillapított operátornyalábjával. A (7) és (8) funkcionál is azonos KÜHNE [9] p és s funkcionáljaival. Így KÜHNE [9] 5.2 tétele alapján fennáll a következő (figyelembe véve, hogy A^{-1} a H ortogonális altereit H_A ortogonális altereibe viszi):

Minden

$$\lambda_i^+ = \sup_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_i} \inf_{u \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}} \mathfrak{F}^+(u) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (10)$$

érték pozitív sajátértéke az $L(\lambda)$ operátornyalábnak. (10)-ben \mathfrak{L}_i ($i = 0, 1, \dots$) jelöli a H_A -tér olyan altereinek az összességét, amelyeknek ortogonális komplementuma H_A -ban i -dimenziós altér. És hasonlóan: *Minden*

$$\lambda_i^- = \inf_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_i} \sup_{u \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}} \mathfrak{F}^-(u) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (11)$$

érték negatív sajátértéke az $L(\lambda)$ operátornyalábnak. Az $L(\lambda)$ operátornyaláb sajátértékeit tehát az $\mathfrak{F}^+(u)$ és $\mathfrak{F}^-(u)$ funkcionálok stacionárius értékei adják.

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogyan fogalmazható meg a variációs feladat az $L(\lambda)$ nyaláb legkisebb pozitív (legnagyobb negatív) sajátértékének a meghatározására.

Az $\mathfrak{F}^+(u)$ ($u \in D(A)$, $u \neq 0$) pozitív értékű, míg az $\mathfrak{F}^-(u)$ ($u \in D(A)$, $u \neq 0$) negatív értékű funkcionál. Ezért

$$\inf_{u \in D(A) \setminus \{0\}} \mathfrak{F}^+(u) = d \geq 0 \quad \text{és} \quad \sup_{u \in D(A) \setminus \{0\}} \mathfrak{F}^-(u) = e \leq 0.$$

1. *L e m m a.* Legyenek A, B, C az (1.1) és (1.2) feltételeknek megfelelő szimmetrikus operátorok.

a) Ha $d \geq 0$ az $\mathfrak{F}^+(u)$ funkcionál alsó határa, és van olyan $u_0 \in D(A)$, $u_0 \neq 0$ elem, hogy $\mathfrak{F}^+(u_0) = d$, akkor csak a $d > 0$ eset állhat fenn.

b) Ha $e \leq 0$ az $\mathfrak{F}^-(u)$ funkcionál felső határa, és van olyan $u_1 \in D(A)$, $u_1 \neq 0$ elem, hogy $\mathfrak{F}^-(u_1) = e$, akkor csak az $e < 0$ eset állhat fenn.

B i z o n y í t á s. A lemmának csak az a) részét bizonyítjuk, mivel a b) rész bizonyítása ezzel teljesen analóg. Tegyük fel, hogy $d = 0$. Ekkor

$$\mathfrak{F}^+(u_0) = \frac{1}{2(Cu_0, u_0)} [-(Bu_0, u_0) + \sqrt{(Bu_0, u_0)^2 + 4(Au_0, u_0)(Cu_0, u_0)}] = 0.$$

Mivel (Cu_0, u_0) egy véges szám, és így $(Cu_0, u_0)^{-1} \neq 0$, ezért $-(Bu_0, u_0) + \sqrt{(Bu_0, u_0)^2 + 4(Au_0, u_0)(Cu_0, u_0)} = 0$. Innen $(Au_0, u_0)(Cu_0, u_0) = 0$. De mivel $u_0 \neq 0$, következik, hogy $(Cu_0, u_0) \neq 0$, és így $(Au_0, u_0) = 0$. Az A operátor pozitív definit volta miatt $(Au_0, u_0) = 0$ csak akkor állhat fenn, ha $u_0 = 0$. Ez pedig ellentmond a lemma $u_0 \neq 0$ feltételének. Következésképp $d > 0$.

1. *T é t e l.* Legyenek A, B, C az (1.1), (1.2) feltételeket kielégítő szimmetrikus operátorok, és jelölje d az $\mathfrak{F}^+(u)$ funkcionál értékének alsó határát, e pedig az $\mathfrak{F}^-(u)$ funkcionál értékének felső határát.

a) Ha létezik egy $u_0 \in D(A)$, $u_0 \neq 0$ elem úgy, hogy

$$\mathfrak{F}^+(u_0) = \frac{1}{2(Cu_0, u_0)} [-(Bu_0, u_0) + \sqrt{(Bu_0, u_0)^2 + 4(Au_0, u_0)(Cu_0, u_0)}] = d, \quad (12)$$

akkor d az $L(\lambda)$ nyaláb legkisebb pozitív sajátértéke és u_0 ennek az értéknek megfelelő sajátélem.

b) Ha létezik egy $u_1 \in D(A)$, $u_1 \neq 0$ elem úgy, hogy

$$\mathfrak{F}^-(u_1) = \frac{1}{2(Cu_1, u_1)} [-(Bu_1, u_1) - \sqrt{(Bu_1, u_1)^2 + 4(Au_1, u_1)(Cu_1, u_1)}] = e, \quad (13)$$

akkor e az $L(\lambda)$ nyaláb legnagyobb negatív sajátértéke és u_1 ennek az értéknek megfelelő sajátélem.

B i z o n y í t á s. A tételnek csak az a) részét bizonyítjuk, mivel a b) rész bizonyítása ezzel teljesen analóg. Legyen $\eta \in D(A)$ tetszőleges elem, és legyen t egy tetszőleges valós szám. Mivel $D(A)$ lineáris altér, nyilvánvalóan $u_0 + t\eta \in D(A)$. A $\varphi(t) = \mathfrak{F}^+(u_0 + t\eta)$ függvénynek $t = 0$ -nál minimuma van,

és $\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0} = 0$. A differenciálást a 0 helyen elvégezve, és az így nyert egyenletben a négyzetgyökös kifejezések helyébe (12) alapján d megfelelő kifejezését írva, majd az egyenletet $[2d(Cu_0, u_0) + (Bu_0, u_0)](Cu_0, u_0)^{-1}$ -nel szorozva a következőt kapjuk: $Re[(Au_0, \eta) + ((Au_0, u_0)(Cu_0, u_0)^{-1}Cu_0, \eta) - (dBu_0, \eta) - (d(Bu_0, u_0)(Cu_0, u_0)^{-1}Cu_0, \eta) - (d^2Cu_0, \eta)] = 0$. Ez az összefüggés a skalárszorzat linearitása miatt egyetlen skalárszorzat valós részeként írható fel, és ebben a skalárszorzatban az egyik elem η : $Re(Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0 + (Cu_0, u_0)^{-1}[(Au_0, u_0) - d(Bu_0, u_0) - d^2(Cu_0, u_0)]Cu_0, \eta) = 0$. A (12) összefüggés következtében azonban $(Au_0, u_0) - d(Bu_0, u_0) - d^2(Cu_0, u_0) = 0$. Ezt felhasználva az alábbi egyenletet nyerjük:

$$Re(Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0, \eta) = 0. \quad (14)$$

Jelölje i az imaginárius egységet. Mivel $D(A)$ lineáris altér, nyilvánvalóan $u_0 + i\eta \in D(A)$ is teljesül. Az $u_0 + i\eta$ esetében véghezvitt számítást $u_0 + i\eta$ esetében is elvégezve, az eredmény

$$Im(Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0, \eta) = 0 \quad (15)$$

lesz. A (14) és (15) egyenlőségből következik, hogy

$$(Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0, \eta) = 0. \quad (16)$$

Ez az összefüggés minden $\eta \in D(A)$ -ra fennáll. Definíció szerint $D(A)$ sűrű H -ban. Mivel (16) szerint az $Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0$ vektor a H -tér egy mindenütt sűrű alterének minden elemére ortogonális, következik, hogy az csak a tér nulla eleme lehet. Ezért

$$Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0 = 0,$$

azaz d az $L(\lambda)$ nyalábnak egy sajátértéke és u_0 a neki megfelelő sajátteleme.

A d érték pozitív. Közvetlenül adódik ez az 1. lemmából. Azt kell még belátni, hogy d a pozitív sajátértékek között a legkisebb. E végett legyen $\hat{\lambda}$ az $L(\lambda)$ nyalábnak egy tetszőleges pozitív sajátértéke és \hat{u} a hozzá tartozó sajátteleme. Ekkor $A\hat{u} - \hat{\lambda}B\hat{u} - \hat{\lambda}^2C\hat{u} = 0$. Skalárisan szorozva ezt az egyenlőséget \hat{u} -val, majd belőle $\hat{\lambda}$ -t kifejezve azt kapjuk, hogy $\hat{\lambda} = [2(C\hat{u}, \hat{u})]^{-1}[-(B\hat{u}, \hat{u}) + \sqrt{(B\hat{u}, \hat{u})^2 + 4(A\hat{u}, \hat{u})(C\hat{u}, \hat{u})}]$. (Tekintettel az A, B, C szimmetrikus operátorok (1.1), (1.2) tulajdonságaira, továbbá arra, hogy $\hat{\lambda} > 0$, ebben a kifejezésben a négyzetgyök csak pozitív előjellel szerepelhet.) Így $\hat{\lambda}$ -t egy (3) alakú kifejezéssel adtuk meg. A d a (3) infimuma, ezért $d \leq \hat{\lambda}$. Ez az egyenlőtlenség fennáll minden $\hat{\lambda} > 0$ sajátértékre. Következésképp d a legkisebb pozitív sajátértéke $L(\lambda)$ -nak, és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

Az 1. tétel alapján az $L(\lambda)$ nyaláb legkisebb pozitív sajátértékének meghatározási problémája a következő variációs feladatra redukálódik: meg kell keresni az $\mathfrak{F}^+(u)$ funkcionált minimalizáló elemet, ill. az $\mathfrak{F}^+(u)$ funkcionál

minimumát. A további tárgyalás szempontjából előnyösebb lesz, ha ezt a variációs problémát kicsit másképpen fogalmazzuk meg. Vezessük be a következő jelölést: $\psi = (Cu, u)^{-1/2}u$. Ekkor $(C\psi, \psi) = 1$ és $[2(Cu, u)]^{-1}[-(Bu, u) + \sqrt{(Bu, u)^2 + 4(Au, u)(Cu, u)}] = -\frac{1}{2}(B\psi, \psi) + \sqrt{\frac{1}{4}(B\psi, \psi)^2 + (A\psi, \psi)}$. Ψ helyébe ismét u -t írva variációs feladatunk a következőképpen szól: meg kell határozni a

$$-\frac{1}{2}(Bu, u) + \sqrt{\frac{1}{4}(Bu, u)^2 + (Au, u)} \quad (17)$$

funkcionál minimumát a

$$(Cu, u) = 1 \quad (18)$$

feltétel mellett. A legnagyobb negatív sajátérték esetén pedig meg kell határozni a

$$-\frac{1}{2}(Bu, u) - \sqrt{\frac{1}{4}(Bu, u)^2 + (Au, u)} \quad (19)$$

funkcionál maximumát a (18) feltétel mellett.

3. A Ritz-Galerkin-módszer

Tételezzük fel, hogy teljesülnek az 1. tétel feltételei. Ekkor az $L(\lambda)$ nyaláb d legkisebb pozitív sajátértékének a meghatározása a (17) funkcionál (18) feltétel melletti minimumának, az e legnagyobb negatív sajátértékének a meghatározása a (19) funkcionál (18) feltétel melletti maximumának a meghatározására redukálódik.

Minthogy ez a két feladat lényegében ugyanúgy kezelhető, ezért a továbbiakban csak a legkisebb pozitív sajátérték meghatározásával foglalkozunk. A feladatot Ritz—Galerkin-módszerrel fogjuk megoldani. Megjegyezzük, hogy a vizsgált esetben a Ritz- és a Galerkin-módszer között a lényeget tekintve semmi különbség nincs, ezért használjuk a közös Ritz—Galerkin-módszer elnevezést.

Legyen a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ elemsorozat koordinátarendszer, azaz a φ_n elemek 1) $\varphi_n \in D(A)$ ($n = 1, 2, \dots$); 2) lineárisan függetlenek; 3) az A operátor energetikai szorzata értelmében teljes rendszert alkotnak H_A -ban (az A operátor energetikai szorzatán a $[\varphi_i, \varphi_j]_A = (A\varphi_i, \varphi_j)$; $\varphi_i, \varphi_j \in D(A)$ skalárszorzatot értjük).

Rögzített n esetén vegyük az

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (20)$$

kifejezést, ahol a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) komplex konstans. Határozzuk meg a (17) funkcionál minimumát a (18) feltétel mellett úgy, hogy' most u ne legyen tetszőleges $D(A)$ -beli elem, hanem csak (20) alakú, azaz csak olyan elem, amely a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ koordinátaelemek által kifeszített n -dimenziós altérből való. Jelöljük ezt az alteret R_n -nel. Nyilvánvalóan $R_n \subset D(A)$.

Ezzel az eredeti variációs feladatot a következővel helyettesítettük: meg kell keresni a

$$A_n = -\frac{1}{2}(Bu_n, u_n) + \sqrt{\frac{1}{4}(Bu_n, u_n)^2 + (Au_n, u_n)} \quad (21)$$

mennyiség minimumát a

$$(Cu_n, u_n) = 1 \quad (22)$$

feltétel mellett, midőn $u_n \in R_n$.

A (21), (22)-ben szereplő skalárszorzatok az alábbiak:

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k,l=1}^n (A\varphi_k, \varphi_l) a_k \bar{a}_l,$$

$$(Bu_n, u_n) = \sum_{k,l=1}^n (B\varphi_k, \varphi_l) a_k \bar{a}_l,$$

$$(Cu_n, u_n) = \sum_{k,l=1}^n (C\varphi_k, \varphi_l) a_k \bar{a}_l.$$

(Ezekben a kifejezésekben \bar{a}_l a_l komplex konjugáltját jelöli.) Így A_n az a_1, a_2, \dots, a_n együtthatók függvénye. Ebből következően egy n komplex változótól függő, valós értékű függvény feltételes szélsőértékének a meghatározása lesz a feladat. Mivel $a_k = x_k + iy_k$; x_k, y_k valós; $k = 1, 2, \dots, n$, azt is mondhatjuk, hogy egy $2n$ -változós függvény feltételes szélsőértékét kell megkeresni.

Ezt a feladatot a Lagrange-féle multiplikátor módszerrel fogjuk megoldani. Megkonstruáljuk a

$$\Phi(u_n) = -\frac{1}{2}(Bu_n, u_n) + \sqrt{\frac{1}{4}(Bu_n, u_n)^2 + (Au_n, u_n)} - \nu[(Cu_n, u_n) - 1]$$

függvényt, ahol ν egy egyelőre meg nem határozott numerikus faktor, majd Φ -nek az a_l ($l = 1, 2, \dots, n$) együtthatók x_l valós és y_l képzetes része szerinti parciális deriváltjait egyenlővé tesszük nullával. A levezetés részleteinek mellőzésével ez az a_k ismeretlenekre a következő homogén lineáris egyenletrendszert eredményezi:

$$\sum_{k=1}^n a_k [(A\varphi_k, \varphi_l) - A_n(B\varphi_k, \varphi_l) - A_n^2(C\varphi_k, \varphi_l)] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Az a_k ismeretlenek nem lehetnek mind nullák, mert akkor (20)-ban $u_n = 0$ lenne, amiből $(Cu_n, u_n) = 0$ adódnék, és ez ellentmondana a (22) feltételnek. Innen következik, hogy a (23) egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, és ezért a rendszer determinánsának nullával kell egyenlőnek lennie. A determináns Δ_n -re egy egyenletet ad:

[illegible]

Megállapíthatjuk, hogy a (24) egyenlet pontosan $2n$ -edfokú, mivel $(-1)^n A_n^{2n}$ együttthatója a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ elemek C operátor szerinti Gram-determinánsa, amely nem nulla, hiszen C pozitív operátor és a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ koordináta elemek lineárisan függetlenek. Ebből az algebra alaptétele szerint következik, hogy a (24) egyenletnek $2n$ gyöke van.

Legyen $\lambda_n^{(i)}$ ezen gyökök valamelyike. Ezt behelyettesítve a (23) egyenletrendszerbe, a determinánst nullává téve, a rendszernek lesznek nemtriviális megoldásai. Legyen $a_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ egy ilyen megoldás. Behelyettesítve $\lambda_n = \lambda_n^{(i)}$ -t és $a_k = a_k^{(i)}$ -t (23)-ba, azonosságot kapunk:

$$\sum_{k=1}^n a_k^{(i)}(A\varphi_k, \varphi_l) - \Lambda_n^{(i)} \sum_{k=1}^n a_k^{(i)}(B\varphi_k, \varphi_l) - (\Lambda_n^{(i)})^2 \sum_{k=1}^n a_k^{(i)}(C\varphi_k, \varphi_l) = 0, \\ l = 1, 2, \dots, n.$$

Ezt beszorozzuk $\overline{\alpha}_l^{(n)}$ -tal, és összegzünk minden l -re. Így a következőhöz jutunk:

$$\sum_{k,l=1}^n a_k^{(i)} \overline{a_l^{(i)}} (A\varphi_k, \varphi_l) - \Lambda_n^{(i)} \sum_{k,l=1}^n a_k^{(i)} \overline{a_l^{(i)}} (B\varphi_k, \varphi_l) - (\Lambda_n^{(i)})^2 \sum_{k,l=1}^n a_k^{(i)} \overline{a_l^{(i)}} (C\varphi_k, \varphi_l) = 0.$$

Legyen $u_n^{(i)} = \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \varphi_k$. Ekkor az előző egyenlőség az alábbi alakot nyeri:

$$(Au_n^{(i)}, u_n^{(i)}) - \Lambda_n^{(i)}(Bu_n^{(i)}, u_n^{(i)}) - (\Lambda_n^{(i)})^2(Cu_n^{(i)}, u_n^{(i)}) = 0.$$

A (22) feltétel miatt $(Cu_n^{(i)}, u_n^{(i)}) = 1$. Így az

$$(Au_n^{(i)}, u_n^{(i)}) - \mathcal{A}_n^{(i)}(Bu_n^{(i)}, u_n^{(i)}) - (\mathcal{A}_n^{(i)})^2 = 0 \quad (25)$$

összefüggést kapjuk, amely fennáll $i = 1, 2, \dots, 2n$ esetén. Az A, B szimmetrikus operátorok közül az A operátor pozitív definit, ezért (25) diszkriminánsa pozitív. Ebből következik, hogy a (24) egyenlet $\lambda_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) gyökei valósak. Továbbmenve, valamelyik $u_n^{(i)} = u_n^o$ elem minimalizálja a (21) mennyiséget. A (25)-ből az is következik, hogy ez a minimum azonos a (24) egyenlet legkisebb pozitív gyökével. Jelöljük ezt a gyököt λ_n^{o+} -val. Legyen

$m > n$. Jelölje $\Lambda_m^{\circ+}$ m esetére a (21) mennyiség (22) feltétel melletti minimumát. Ekkor

$$\Lambda_n^{\circ+} \geq \Lambda_m^{\circ+} \geq d.$$

Ez az egyenlőtlenség nyilvánvalóan fennáll, hiszen $R_n \subset R_m \subset D(A)$, és egyrészt (21) minimuma egy bővebb halmazban nem növekedhet, másrészt (17) minimuma egy szűkebb halmazban nem csökkenhet. Ebből következik, hogy midőn $n \rightarrow \infty$, a $\Lambda_n^{\circ+}$ mennyiség monoton fogyón tart egy határértékhez, amely $\geq d$. A $\Lambda_n^{\circ+}$ számot az $L(\lambda)$ nyaláb, ill. az (1) egyenlet legkisebb pozitív sajátértéke n -ik Ritz—Galerkin-féle közelítésének nevezzük. Hasonlóképpen értelmezhetjük a $\Lambda_n^{\circ-}$ számot mint az $L(\lambda)$ nyaláb legnagyobb negatív sajátértékének n -edik Ritz—Galerkin-féle közelítését ($\Lambda_n^{\circ-} \leq e$).

2. Tétel. Legyen B a H -teret önmagába képező pozitív operátor ($(Bu, u) > 0$, $u \in D(B)$, $u \neq 0$). Ha teljesülnek az 1. tétel feltételei, akkor az eddigi jelölések mellett fennáll a következő:

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^{\circ+} = d,$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^{\circ-} = e.$$

Bizonyítás. A tételnek csak az a) állítását bizonyítjuk, mert b) bizonyítása ezzel analóg. Bevezetjük az $[u, v]_A = (Au, v)$, $[u, v]_B = (Bu, v)$, $[u, v]_C = (Cu, v)$; $u, v \in D(A)$ energetikus szorzatokat és az $|u|_A = \sqrt{[u, u]_A}$, $|u|_B = \sqrt{[u, u]_B}$, $|u|_C = \sqrt{[u, u]_C}$ energetikus normákat. Ezek segítségével a (17) funkcionál és a (18) feltétel így írható:

$$-\frac{1}{2}|u|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4}|u|_B^4 + |u|_A^2}, \quad (26)$$

$$|u|_C^2 = 1. \quad (27)$$

A tételben — kissé másképp fogalmazva — feltettük, hogy létezik olyan $u_0 \neq 0$, $u_0 \in D(A)$ elem, amelyen a (26) funkcionál a (27) feltétel mellett felveszi a d minimumát. Az 1. lemma szerint ekkor $d > 0$.

A (26) funkcionál az u_0 helyen folytonos, hiszen a normaképzés folytonos, és (26)-ban a különböző operátorok szerinti normákat folytonos műveletek kapcsolják össze. A $d > 0$ minimum volta és a (26) funkcionál u_0 -beli folytonossága miatt bármely pozitív ε -hoz léteznek $\delta, \delta_A, \delta_B$ pozitív számok és $u' \in D(A)$ elem úgy, hogy $\|u_0 - u'\| < \delta$ esetén

$$|u_0 - u'|_A < \delta_A, \quad (28)$$

$$|u_0 - u'|_B < \delta_B \quad (29)$$

és

$$d \leq -\frac{1}{2}|u'|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2} < d + \varepsilon, \quad (30)$$

$$|u'|_C^2 = 1. \quad (31)$$

Mivel a φ_n ($n = 1, 2, \dots$) elemsorozat teljes az A operátor energetikus szorzatában, ezért található egy u'_N elem: $u'_N = \sum_{k=1}^N b_k \varphi_k$, $b_k = \text{konstans}$ úgy, hogy

$$|u' - u'_N|_A < \varepsilon. \quad (32)$$

Innen

$$|u'_N|_A \leq |u'|_A + \varepsilon. \quad (33)$$

A d a (3) funkcionál minimuma, ezért teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$d \leq \frac{1}{2|u' - u'_N|_C^2} (-|u' - u'_N|_B^2 + \sqrt{|u' - u'_N|_B^4 + 4|u' - u'_N|_A^2 |n' - u'_N|_C^2}).$$

Azonos átalakítások után:

$$d^2 |u' - u'_N|_C^2 + d |u' - u'_N|_B^2 \leq |u' - u'_N|_A^2.$$

Ebből (32) felhasználásával a következő becslések tehetők:

$$|u' - u'_N|_B^2 \leq \frac{1}{d} |u' - u'_N|_A^2 - d |u' - u'_N|_C^2 \leq \frac{1}{d} \varepsilon^2,$$

innen

$$|u'_N|_B \geq |u'|_B - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}, \quad (34)$$

illetve

$$|u' - u'_N|_C^2 \leq \frac{1}{d^2} |u' - u'_N|_A^2 - \frac{1}{d} |u' - u'_N|_B^2 \leq \frac{1}{d^2} \varepsilon^2,$$

innen

$$|u' - u'_N|_C \leq \frac{\varepsilon}{d}. \quad (35)$$

Tekintsük ezután az

$$\tilde{u}_N = \frac{u'_N}{|u'_N|_C}$$

elemet. Ekkor $|\tilde{u}_N|_C = 1$. A továbbiak folyamán szükségünk lesz \tilde{u}_N A és B operátor szerinti normáinak olyan becsléseire, mint u'_N -nek (33) és (34) becslései.

(35) alapján fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$|u'_N|_C \leq |u'|_C + \frac{\varepsilon}{d} = 1 + \frac{\varepsilon}{d}, \quad (36)$$

$$|u'_N|_C \geq |u'|_C - \frac{\varepsilon}{d} = 1 - \frac{\varepsilon}{d}. \quad (37)$$

A (37) és (33) becslések következtében

$$|\tilde{u}_N|_A = \frac{1}{|u'_N|_C} |u'_N|_A \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d}} |u'_N|_A \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d}} (|u'|_A + \varepsilon).$$

Elég kis $1 > \varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K > 1$ véges szám, hogy

$$\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d}} \leq 1 + \frac{K}{d} \varepsilon$$

teljesül. Így

$$|\tilde{u}_N|_A \leq \left(1 + \frac{K}{d} \varepsilon\right) (|u'|_A + \varepsilon) = |u'|_A + \varepsilon \left(1 + \frac{K}{d} |u'|_A + \varepsilon \frac{K}{d}\right). \quad (38)$$

Továbbá a (36) és (34) egyenlőtlenségek miatt

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_N|_B &= \frac{1}{|u'_N|_C} |u'_N|_B \geq \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{d}} |u'_N|_B \geq \frac{1 - \frac{\varepsilon}{d}}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2} \left(|u'|_B - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\right) \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{d}\right) \left(|u'|_B - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\right), \end{aligned}$$

innen

$$|\tilde{u}_N|_B \geq |u'|_B - \varepsilon \left(\frac{1}{d} |u'|_B + \frac{1}{\sqrt{d}}\right). \quad (39)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\varepsilon(A) = \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{K}{d} |u'|_A + \varepsilon \frac{K}{d}\right),$$

$$\varepsilon(B) = \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{d} |u'|_B + \frac{1}{\sqrt{d}}\right).$$

Ekkor (38) és (39) az alábbi alakú lesz:

$$|\tilde{u}_N|_A \leq |u'|_A + \varepsilon(A), \quad (40)$$

$$|\tilde{u}_N|_B \geq |u'|_B - \varepsilon(B). \quad (41)$$

Az u'_N definíciójából és d minimum voltából következik, hogy

$$d \leq -\frac{1}{2} |\tilde{u}_N|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |\tilde{u}_N|_B^4 + |\tilde{u}_N|_A^2}.$$

Alkalmazzuk a következő jelölést:

$$h = -\frac{1}{2} |\tilde{u}_N|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |\tilde{u}_N|_B^4 + |\tilde{u}_N|_A^2}.$$

Ebből $h^2 + h|\tilde{u}_N|_B^2 - |\tilde{u}_N|_A^2 = 0$. Alkalmazva a (40) és (41) becsléseket,

$$h^2 + h(|u'|_B - \varepsilon(B))^2 - (|u'|_A + \varepsilon(A))^2 \leq 0$$

adódik. Innen

$$\begin{aligned} h &\leq -\frac{1}{2}(|u'|_B - \varepsilon(B))^2 + \sqrt{\frac{1}{4}(|u'|_B - \varepsilon(B))^4 + (|u'|_A + \varepsilon(A))^2} \leq \\ &\leq -\frac{1}{2}|u'|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon(A) \frac{2|u'|_A + \varepsilon(A)}{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2}} + \varepsilon(B)|u'|_B. \end{aligned}$$

Ennek az egyenlőtlenség-sorozatnak a jobb oldalán, a második négyzetgyökjel alatt 1 után egy pozitív mennyiség áll. Továbbá $x > -1$ esetén $\sqrt{1+x} \leq 1 + 1/2 x$. Ezekből következően

$$h \leq -\frac{1}{2}|u'|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2} + \frac{\varepsilon(A)}{2} \frac{2|u'|_A + \varepsilon(A)}{\sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2}} + \varepsilon(B)|u'|_B. \quad (43)$$

Jelölje $g(\varepsilon(A))$ a (43) utolsó előtti tagját. Becsüljük meg felülről ezt a

$$g(\varepsilon(A)) = \frac{\varepsilon(A)}{2} \frac{2|u'|_A + \varepsilon(A)}{\sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2}}$$

mennyiséget. Helyettesítsük be ide $\varepsilon(A)$ helyére az őt értelmező kifejezést. Figyelembe véve, hogy (30) bal oldali egyenlőtlensége alapján

$$d \leq \sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2},$$

és egy korábbi feltételezés szerint $\varepsilon < 1$, továbbá bevezetve az

$$a = \frac{K}{d} + \frac{1}{2} \left(\frac{K}{d} \right)^2, \quad b = \left(1 + \frac{K}{d} \right)^2, \quad c = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{K}{d} \right)^2$$

jelöléseket, az alábbi becslés igaz:

$$g(\varepsilon(A)) \leq \varepsilon \frac{1}{d} (|u'|_A^2 a + |u'|_A b + c).$$

A (28) egyenlőtlenségből következik, hogy $|u'|_A \leq |u_0|_A + \delta_A$, és így

$$g(\varepsilon(A)) \leq \varepsilon \frac{1}{d} [(|u_0|_A + \delta_A)^2 a + (|u_0|_A + \delta_A) b + c].$$

Mint hogy u_0 egy meghatározott rögzített elem, és így $|u_0|_A$ egy véges szám, ezért

$$g(\varepsilon(A)) \leq \varepsilon K_1, \quad (44)$$

ahol $K_1 > 0$ egy alkalmasan választott konstans. Adjunk felső becslést ezután az

$$\varepsilon(B)|u'|_B = \varepsilon \left(\frac{1}{d} |u'|_B^2 + \frac{1}{\sqrt{d}} |u'|_B \right)$$

menyiségre. A (29) egyenlőtlenség következtében $|u'|_B \leq |u_0|_B + \delta_B$. Ekkor

$$\varepsilon(B)|u'|_B \leq \varepsilon \left[\frac{1}{d} (|u_0|_B + \delta_B)^2 + \frac{1}{\sqrt{d}} (|u_0|_B + \delta_B) \right] \leq \varepsilon K_2, \quad (45)$$

ahol $K_2 > 0$ egy alkalmasan választott konstans. A (43) becslés (44) és (45) alapján így folytatható:

$$h \leq -\frac{1}{2} |u'|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |u'|_B^4 + |u'|_A^2} + \varepsilon(K_1 + K_2).$$

Ebből a (30) jobb oldali egyenlőtlenségének és a (42) egyenlőtlenségnek a felhasználásával kapjuk:

$$d \leq -\frac{1}{2} |\tilde{u}_N|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |\tilde{u}_N|_B^4 + |\tilde{u}_N|_A^2} < d + \varepsilon(1 + K_1 + K_2) = d + \eta,$$

ahol $\eta = \varepsilon(1 + K_1 + K_2)$. Továbbá \mathcal{A}_N^{o+} a

$$-\frac{1}{2} (Bu_N, u_N) + \sqrt{\frac{1}{4} (Bu_N, u_N)^2 + (Au_N, u_N)}$$

kifejezés minimuma a $(Cu_N, u_N) = 1$ feltétel mellett, ahol $u_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$. Így

$$d \leq \mathcal{A}_N^{o+} \leq -\frac{1}{2} |\tilde{u}_N|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |\tilde{u}_N|_B^4 + |\tilde{u}_N|_A^2} < d + \eta, \quad |\tilde{u}_N|_C^2 = 1.$$

Ha $n \geq N$, akkor $\mathcal{A}_n^{o+} \leq \mathcal{A}_N^{o+}$, és $d \leq \mathcal{A}_n^{o+} < d + \eta$ tetszőleges kicsi $\eta > 0$ -ra. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n^{o+} = d$, azaz a \mathcal{A}_n^{o+} Ritz–Galerkin-féle közelítő értékek határértéke az $L(\lambda)$ nyaláb d legkisebb pozitív sajátértékét adja.

4. Kiegészítő megjegyzések

4.1. A (24) egyenlet hasonló ahhoz a karakterisztikus egyenlethez, amelyet pl. MIHLIN [11] az $Au - \lambda Bu = 0$ alakú lineáris sajátérték-feladat esetén közöl ($C = 0$ esetén azonos vele, ha A és B pozitív definit).

4.2. A 2. tétel valószínűleg akkor is igaz marad, ha a B operátortól nem követeljük meg, hogy pozitív legyen. Ennek a bizonyításával azonban nem foglalkoztunk.

4.3. Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\mathcal{A}_n \rightarrow \lambda$. \mathcal{A}_n a pozitív sajátértékeket monoton fogyón, vagyis felülről, a negatív sajátértékeket monoton növevőn, vagyis alulról

közelíti. *A Ritz–Galerkin-módszer tehát a kritikus teherparamétert kvadrátikus feladatoknál is abszolút értékben mindig felülről közelíti.*

4.4. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= [a_{ij}]; & a_{ij} &= (A\varphi_j, \varphi_i); & i, j &= 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{B}_n &= [b_{ij}]; & b_{ij} &= (B\varphi_j, \varphi_i); & i, j &= 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{C}_n &= [c_{ij}]; & c_{ij} &= (C\varphi_j, \varphi_i); & i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Ezekkel a szimmetrikus n -edrendű mátrixokkal a (24) egyenlet a következőbe megy át:

$$|\mathbf{A}_n - \lambda_n \mathbf{B}_n - \lambda_n^2 \mathbf{C}_n| = 0. \quad (46)$$

A (46) egyenletre jutunk akkor is, ha tekintjük az

$$[\mathbf{A}_n - \lambda_n \mathbf{B}_n - \lambda_n^2 \mathbf{C}_n] \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \quad (47)$$

sajátérték-feladatot. Ez, mint ismeretes [10, 14], a következő $2n$ -edrendű mátrix sajátértékeinek a meghatározására vezethető vissza:

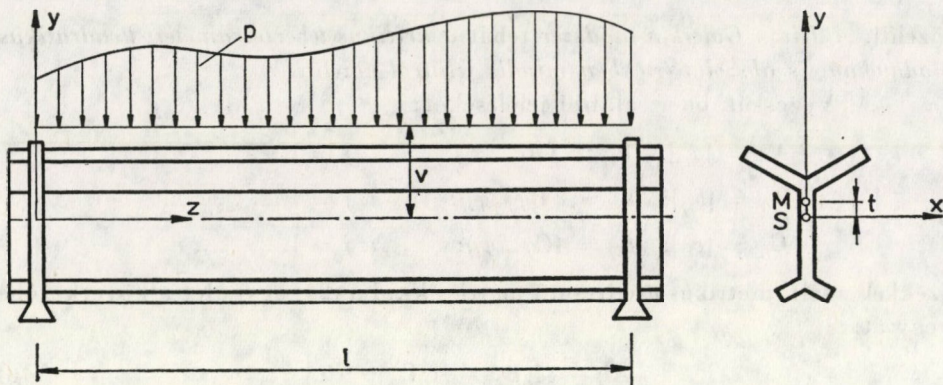
$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_n \mathbf{A}_n^{-1} & \mathbf{C}_n \mathbf{A}_n^{-1} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix},$$

ahol \mathbf{I}_n az n -ik egységmátrix és $\mathbf{0}_n$ az n -ik nullamátrix. Az \mathbf{M}_n mátrix sajátértékeinek a reciproka adja a (47) sajátértékeit. A vizsgálódásainkban szereplő \mathbf{A}_n mátrix mindig invertálható, ezért az \mathbf{M}_n mátrix mindig megkonstruálható. Ezek után az \mathbf{M}_n mátrix legnagyobb pozitív, ill. legkisebb negatív sajátértékeit kell meghatározni, majd ezek reciprokát kell venni. Ezzel a feladat gépi számításra is alkalmas formát ölt, és elkerülhetők a (24) determináns kifejtésével járó nehézségek. Végül az eredeti (1) egyenlet keresett sajátértékeit az \mathbf{M}_n mátrix említett sajátértékei reciprokának a határértéke eredményezi, midőn $n \rightarrow \infty$.

4.5. Ha a 3. szakaszban felvett $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ koordinátarendszer teljes ortonormált bázis, és az A, B, C operátorokat végtelen mátrixokkal reprezentáljuk ([1] 153. o.), majd tekintjük a velük felírt (1) sajátérték-feladatnak a $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ báziselemek által kifeszített n -dimenziós altérre vett $(\mathbf{A}_n - \lambda_n \mathbf{B}_n - \lambda_n^2 \mathbf{C}_n) \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ projekcióját, akkor ugyanazt az n -dimenziós sajátérték-feladatot, ill. karakterisztikus egyenletet nyerjük, mint a Ritz–Galerkin-módszer esetén. Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\mathbf{A}_n \rightarrow A$, $\mathbf{B}_n \rightarrow B$, $\mathbf{C}_n \rightarrow C$ és $\lambda_n \rightarrow \lambda$.

5. A két végén villásan megtámasztott tartó kifordulása

Tekintsünk egy mindkét végén villásan megtámasztott, transzverzális erőkkkel terhelt, vékonyfalú, szimmetrikus és nyitott keresztmetszetű tartót (1. ábra). Ha a tartó keresztmetszete állandó, és a terhek a kifordulás előtt



1. ábra

a tartó szimmetriasíkjában működnek, akkor a tartó kifordult állapotbeli egyensúlyát az

$$EJ_{\phi} \vartheta'''' - t(M_x \vartheta)'' - GJ_c \vartheta'' - tM_x \vartheta'' - \frac{M_x^2}{EJ_y} \vartheta + r(M_x \vartheta')' - p v \vartheta = 0 \quad (48)$$

differentiálegyenlet írja le [2] a

$$\vartheta(0) = \vartheta(l) = \vartheta''(0) = \vartheta''(l) = 0 \quad (49)$$

peremfeltételek mellett. (48), (49)-ben az egyes jelölések értelmezése a következő:

x, y, z koordináták (lásd 1. ábra),

ϑ a keresztmetszet elfordulásának a szöge,

t a csavarási középpontnak a súlyponttól mért távolsága,

r a keresztmetszeti sugár $\left(r = \frac{1}{J_x} \cdot \int_F y(x^2 + y^2) dF \right)$, ahol J_x a keresztmetszet x tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka, F pedig a keresztmetszet felülete),

v a teher támadáspontjának a súlyponttól mért távolsága,

l a tartó támaszköze,

J_y a keresztmetszet y tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka,

J_c a keresztmetszet csavarási tehetetlenségi nyomatéka,

J_{ϕ} a keresztmetszet öblösödési állandója,

E a rugalmassági modulus,

G a nyírási rugalmassági modulus,

p a transzverzális teher,

M_x a p teherből származó x irányú hajlítónyomaték,

$(\cdot)' = \frac{d}{dz}$ a z változó szerinti differenciálás jele.

Jelölje p_0 a teher paraméterét. Ekkor a teher és a hajlítónyomaték függvénye a következő módon írható:

$$p = p_0 p_1, \quad M_x = p_0 M_{x1}, \quad (50)$$

ahol p_1 és M_{x1} a teher, ill. a hajlítónyomaték $p_0 = 1$ melletti értékét jelöli. Behelyettesítve (50)-et (48)-ba, a (48) egyenlet az alábbi alakú lesz:

$$EJ_{\phi} \vartheta'''' - GJ_c \vartheta'' - p_0 [t(M_{x1} \vartheta)'' + tM_{x1} \vartheta'' - r(M_{x1} \vartheta')' + p_1 v \vartheta] - p_0^2 \frac{M_{x1}^2}{EJ_y} \vartheta = 0. \quad (51)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A\vartheta = EJ_{\bullet}\vartheta''' - GJ_c\vartheta'', \quad (52a)$$

$$B\vartheta = t(M_{x1}\vartheta)'' + tM_{x1}\vartheta'' - r(M_{x1}\vartheta')' + p_1v\vartheta, \quad (52b)$$

$$C\vartheta = M_{x1}^2(EJ_y)^{-1}\vartheta. \quad (52c)$$

Így (51) az

$$A\vartheta - p_0B\vartheta - p_0^2C\vartheta = 0 \quad (53)$$

egyenletbe megy át. (53) egy (1) alakú sajátérték-feladat. λ szerepét most p_0 , u szerepét pedig ϑ tölti be. Az A , ill. B és C olyan differenciáloperátorokat jelöl, amelyek a (49) peremfeltételeket kielégítő, négyszer, ill. kétszer folytonosan differenciálható függvények osztályán vannak értelmezve. A H Hilbert-tér most a $[0, l]$ intervallumon négyzetesen integrálható valós függvények $L^2[0, l]$ tere, ahol a $\varphi, \psi \in L^2[0, l]$ elemek skalárszorzatát az alábbi módon értelmezzük:

$$(\varphi, \psi) = \int_0^l \varphi(z) \cdot \psi(z) dz.$$

Bizonyítható, hogy az (52a–c) összefüggésekkel definiált operátorok közül: A szimmetrikus, pozitív definit, diszkrét spektrumú, B szimmetrikus, C szimmetrikus pozitív; továbbá BA^{-1} és CA^{-1} véges abszolút normájú operátorok. Teljesülnek tehát azok a feltételek, amelyek az (53) egyenlet p_0 sajátértékeinek létezését és a Ritz–Galerkin-módszer konvergenciáját biztosítják.

5.1 Az egyenletesen megoszló teherrel terhelt tartó

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a p transzverzális teher a tartó hossza mentén állandó. Figyelembe véve, hogy ekkor $p_0 = p$, $p_1 = 1$, $M_{x1} = -\frac{z}{2}(l - z)$, továbbá, hogy $-p = M_x''$, az (52a–c) összefüggésekkel értelmezett A , B , C operátorok a következők lesznek:

$$A\vartheta = EJ_{\bullet}\vartheta''' - GJ_c\vartheta'',$$

$$B\vartheta = -(r - 2t) \left[\frac{z}{2}(l - z)\vartheta' \right]' + (v - t)\vartheta,$$

$$C\vartheta = \frac{1}{EJ_y} \left[\frac{z}{2}(l - z) \right]^2 \vartheta.$$

A p teher kritikus értékének meghatározására a $\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$ trigonometrikus sort alkalmazzuk, ahol a_i ($i = 1, 2, \dots$) ismeretlen állandó, és $\varphi_i = \sin \frac{i\pi z}{l}$.

A (24) egyenletben szereplő skalárszorzatok ekkor így alakulnak, ha $i = j$:

$$(A\varphi_i, \varphi_i) = EJ_* \frac{(i\pi)^4}{2l^3} + GJ_c \frac{(i\pi)^2}{2l},$$

$$(B\varphi_i, \varphi_i) = (r - 2t) l \frac{(i\pi)^2 - 3}{24} + (v - t) \frac{l}{2},$$

$$(C\varphi_i, \varphi_i) = \frac{l^5}{16EJ_y \pi^4} \frac{(i\pi)^4 + 45}{15i^4},$$

és ha $i \neq j$, de $i + j$ páros:

$$(A\varphi_j, \varphi_i) = 0,$$

$$(B\varphi_j, \varphi_i) = -(r - 2t) lij \frac{i^2 + j^2}{(i^2 - j^2)^2},$$

$$(C\varphi_j, \varphi_i) = -\frac{24l^5}{EJ_y \pi^4} \frac{ij(i^2 + j^2)}{(i^2 - j^2)^4}.$$

Ha $i + j$ páratlan, akkor

$$(A\varphi_j, \varphi_i) = (B\varphi_j, \varphi_i) = (C\varphi_j, \varphi_i) = 0.$$

A skalárszorzatok ismeretében a p teher kritikus értékét a (24) egyenlet megoldása útján, vagy a 4.4. pontban ismertetett eljárás segítségével lehet kiszámítani.

Végezetül megemlítjük, hogy a transzverzális erővel terhelt tartó kifordulási feladata általában visszavezethető egy szimmetrikus kvadratikus sajátértékfeladatra, ha a keresztmetszet csavarási középpontjának eltolódás-függvényére és a keresztmetszet ϑ elfordulás-függvényére ugyanazok a peremfeltételek vannak előírva. A (48) egyenlet azonban csak olyan peremfeltételek mellett írja le a tartó kifordult állapotbeli egyensúlyát, amelyeknél az oldalirányú hajlítás egyenletének [2] kétszeri integrálásakor előálló integrálási állandók értéke nulla. Ez, a már tárgyalt villás megtámasztáson kívül, pl. az egyik végén befogott, másik végén szabad tartó esetében teljesül.

IRODALOM

1. АХИЕЗЕР, Н. И.—ГЛАЗМАН, И. М.: Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд. второе. Изд. Наука, Москва, 1966
2. SCHWALLA, E.: Kippung von Trägern mit einfach-symmetrischen, dünnwandigen und offenen Querschnitten. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien IIa*, **153** (1944), 47—60
3. DUFFIN, R. J.: A Minimax Theory for Overdamped Networks. *Journal of Rational Mechanics and Analysis* **4** (1955), 221—233
4. DUFFIN, R. J.: The Rayleigh-Ritz Method for Dissipative or Gyroscopic Systems. *Quarterly of Applied Mathematics* **18** (1960), 215—221

5. EISENFELD, J.: On Symmetrization and Roots of Quadratic Eigenvalue Problems. *Journal of Functional Analysis* 9 (1972), 410—422
6. ХАРАЗОВ, Д. Ф.: Некоторые вопросы теории линейных симметризуемых операторов. *Математический Сборник* 42 (84), 2 (1957), 129—178
7. КРЕЙН, М. Г.—ЛАНГЕР, Г. К.: К теории квадратических пучков самосопряженных операторов. *Докл. Акад. наук СССР* 154 № 6 (1964), 1258—1261
8. КРЕЙН, М. Г.—ЛАНГЕР, Г. К.: О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды международного симпозиума в Тбилиси, 17—23 сентября 1963 г. Том 2. Изд. Наука, Москва, 1965, 283—322.
9. KÜHNLE, R.: Minimaxprinzip für stark gedämpfte Scharen. *Acta Sci. Math. Szeged* 29 (1968) 3—4, 39—68
10. LANGER, H.: Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum. *Journal of Mathematics and Mechanics* 17 (1968) 7, 685—705
11. МИХЛИН, С. Г.: Вариационные методы в математической физике. Изд. второе. Изд. Наука, Москва, 1970
12. MÜLLER, P. H.: Eine neue Methode zur Behandlung nichtlinearer Eigenwertaufgaben. *Mathematische Zeitschrift* 70 (1959), 381—406
13. MÜLLER, P. H.: Eigenwertabschätzungen für Gleichungen vom Typ $(\lambda^2 I - \lambda A - B)x = 0$. *Archiv der Mathematik* 12 (1961), 307—310
14. POPPER, GY.—FERENCZY, M.: Numerical Method for Solving Eigenvalue Problems of Linear Vibration Systems of Finite Degrees of Freedom. *Acta Techn. Hung.* 84 (1977), 85—96
15. ZAAANEN, A. C.: Linear Analysis. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960

Investigation of the Lateral Buckling of Beams with the Aid of the Theory of Quadratic Operator Pencils. A variational method of the investigation on lateral buckling of elastic beams is dealt with. For the solution to the quadratic eigenvalue problem presenting itself through the stability problem, the mathematical theory of quadratic pencil of linear operators is used. By this some theorems are verified. In the case of the quadratic eigenvalue problem investigated, the convergence of the Ritz-Galerkin method is proved, and at the same time, a formula is presented for the determination of the approximate value of the critical load parameter.

Untersuchung des Kippens von Trägern mit Hilfe der Theorie der quadratischen Operator-scharen. Eine Methode der Variationsrechnung zur Untersuchung des Kippens von elastischen Trägern wird behandelt. Zur Lösung der durch die Stabilitätsaufgabe herbeigeführten quadratischen Eigenwertaufgabe wird die mathematische Theorie der quadratischen Schar der linearen Operatoren angewandt. Damit werden einige Thesen nachgewiesen. Im Fall des untersuchten quadratischen Eigenwertproblems wird die Konvergenz der Ritz-Galerkinschen Methode nachgewiesen und eine Formel zur Ermittlung des Näherungswertes des kritischen Lastparameters präsentiert.

A HÁLÓZATI FESZÜLTÉGSZABÁLYOZÁS NÉHÁNY KÉRDÉSE

GÁDOR LÁSZLÓ*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A villamos energia szolgáltatás egyik fontos minőségi jellemzője a hálózat feszültsége. A bonyolult elosztó rendszerben a termelés és felhasználás helyének a távolsága, a terhelések állandóan változó alakulása, a vezetékeken létrejövő feszültség-esések következtében szabályozás nélkül nem oldható meg, hogy a feszültségek minde-nütt az adott tűrési sávon belül maradjanak. A feszültségszabályozás rendszere követi az elosztórendszer felépítését: szabályozás gondoskodik a feszültség-ingadozások kikü-szöböléséről a termelés helyén, az erőművekben, a nagy- és közepfeszültségű hálózat fontosabb csomópontjaiban és végül a kiefeszültségű hálózat egyes részein. Ez utóbbi feladatra megfelel minden szempontból a rendkívül egyszerű felépítésű kétállású szabályozó.

1. Bevezetés

Századunk technikai fejlődésének egyik jellemző vonása a villamosítás gyors térhódítása. A termelés általános bővülésével nemcsak lépést tart a növekvő energia felhasználás, hanem azt meg is előzi. Ezen belül pedig egyre nagyobb részesedéssel szerepel a villamos energia. Ez utóbbinak átlagos évi 7,2%-os növekedési rátája közel kétszerese az összenergia fogyasztás növeke-désének. Míg a század elején a világon kitermelt összes primer energiahordo-zónak csupán néhány százalékát fordították villamos energia fejlesztésére, ma már ez a részesedés 25% körül jár és a prognoszták az ezredfordulóra 50–60%-ra becsülik ezt az értéket.

A villamos energia felhasználás emelkedésének számottevő tényezője a háztartási fogyasztás meredek emelkedése. De a termelő iparban is egyre nagyobb szerephez jutnak a villamos energia felhasználásán alapuló techno-lógiák, ami az automatika és a számítástechnika erőteljesebbé váló alkalmazásával is összhangban van, hiszen a villamos energia a legkönnyebben irányít-ható energiatípus. Bővül a villamos vasúti hálózat, a villamosság mint hajtóerő lassan behatol a sínhez nem kötött járművek területére is.

A villamos energia a leguniverzálisabban használható energiatípus. Szerepe az energiagazdálkodásban olyan, mint a pénz a gazdasági életben: bármilyen energiatípusra könnyen beváltható, legyen az mechanikai, hő-, kémiai vagy fényenergia.

* Dr. Gábor László, 1012 Budapest, Attila út 111.

A villamos energia túlnyomó többségében a jövőben is nagy teljesítményű, koncentrált erőművekben termelődik. Nem változtat ezen a helyzeten az atomenergiának, mint primer energiaforrásnak a térhódítása sem, technológiai okokból az atomerőművek is nagy központi telepek alakjában szolgáltatják az energiát. A hagyományos erőművek általában a fosszilis energialelőhelyekre települnek, az atomerőművek biztonsági és környezet-tisztasági okokból ugyancsak a lakott helyektől távol kapnak helyet. Így a villamos energia elosztás rendszere a belátható jövőben lényegében nem változik, legfeljebb a távolságok, a teljesítmények, a hálózatok bonyolultsága nő.

A villamos energia mennyiségi növekedésével párhuzamosan a minőségi követelmények is szigorúbbá válnak. A kiterjedtebb és igényesebb fogyasztó tábor nagyobb felelősséget ró az áramszolgáltatóra.

A szolgáltatás minősége szempontjából a legfontosabb kritériumok az áramellátás folyamatossága, a frekvencia és a feszültség állandó értéken tartása.

A korszerű hálózaton e követelmények kielégítése másképp, mint automatikus eszközökkel, már el sem képzelhető. Az önműködő gyors visszkapcsolás eszközei az óhatatlanul bekövetkező üzemzavarok hatását az esetek 90%-ában a másodperc tört részéig tartó feszültségtörésre vagy -kimaradásra korlátozzák, ami általában még a kényesebb felhasználási helyeken sem zavarja meg a működést.

A frekvencia az előállítás helyén szabályozható, az elosztó rendszerbe betáplált villamos energia frekvenciáját az átvitel nem módosítja, az az egész hálózaton egyformán érvényesül.

Feszültség szempontjából már nem ilyen egyszerű a helyzet, e tekintetben a bonyolult elosztó hálózat a mindenkori terhelési viszonyoktól függően meglehetősen tarka képet nyújt. A feszültségek a vezetékeken fellépő feszültségesések következtében a fogyasztási helyeken sem nem névleges értékűek, sem nem egyformák. Akkor sem, ha az előállítás helyén szabályozással biztosítjuk azok névleges vagy meghatározott értékét. A táppontok, a fogyasztási pontok, az azokat összekötő hálózat, a pontonkénti terhelések szeszélyes alakulása, a betáplálás ehhez valamennyire igazodó, ugyancsak táppontonként változó értéke bonyolult rendszerre áll össze, amelyben a feszültségeloszlás nívóvonalai csak itt-ott fekszenek a névleges feszültség szint síkjában, másutt vagy alatta, vagy fölötté járnak s mindez még az időben is változik.

A fogyasztók ellátását a névleges feszültségű villamos energiával úgy lehetne biztosítani, hogy minden egyes fogyasztó mellé egy-egy feszültség-szabályozót helyezünk. A szabályozás ilyen mérvű decentralizációja azonban nem látszik gyakorlatilag kivihetőnek.

A gyakorlatban úgy juthatunk célszerűen közelebb a kívánt célhoz, hogy a névleges feszültség merev értékét megegyezés vagy döntés alapján — amint ez a műszaki gyakorlatban általában szokásos — tűrési sávra szélesítjük,

például $\pm 5\%$ értékben. Ezt követően a feszültségtérkép fel-le hullámzó domborzatán kijelölünk néhány jól kiválasztott pontot és ott a környezetben fennálló terhelési és feszültség viszonyokhoz alkalmazkodó szabályozóval befolyásoljuk a feszültséget.

2. A feszültség szabályozás gazdaságossága

Műszaki intézkedéseinket soha nem csak műszaki megfontolások motiválják, azoknak gazdaságosság szempontjából is megalapozottaknak kell lenniük. Ha szabályozókat telepítünk a villamos hálózaton, tisztában kell lennünk azzal, hogy milyen kár származik abból, ha gépeink, berendezéseink a névlegestől eltérő feszültségen üzemelnek.

Ennek a gazdasági kárnak a megítélésében támaszkodunk P. AILLERET gondolatmenetére.

Fel kell tételeznünk, hogy egy jól szerkesztett és méretezett berendezés adott kivitelében és névleges paramétereivel működik a leggazdaságosabban. A működés gazdaságosságán itt nemcsak a nyújtott szolgáltatást és annak hatásfokát értjük, hanem a kedvező élettartamot is. Hiába nyújt egy berendezés nagyobb feszültségen többet, esetleg még a hatásfoka is jobb, ha üzeme az élettartam rovására megy és így végül is többet veszítünk a réven, mint amennyit nyertünk a vámon.

Legyen ez a mindent magában foglaló optimális gazdaságosság G , amely tehát függvénye a konstrukciónak és a paramétereknek. Ez utóbbiak közül minket e pillanatban csak a feszültség érdekel:

$$G = g(K, U),$$

ahol U a feszültség, K maga is egy sokváltozós függvény, amely tartalmaz minden szerkezeti és parametrikus változót, amely a feszültségen kívül a gazdaságosságot befolyásolja.

Névleges feszültségen tehát a gazdaságosságnak szélső értéke van:

$$\frac{\partial}{\partial U} g(K, U) = 0. \quad (1)$$

Ha most a berendezést a névlegestől eltérő $U + \Delta U$ feszültségen járattuk, gazdaságossága is megváltozik, $G + \Delta G$ lesz. A változás

$$\Delta G = g(K, U + \Delta U) - g(K, U). \quad (2)$$

Ezt a változást, tehát az optimális gazdaságossághoz képest adódó eltérést tekinthetjük a feszültségváltozás okozta gazdasági kárnak. Fejtsük sorba a (2) kifejezést, elhanyagolva a másodrendűnél magasabb rendű tagokat:

$$\Delta G = \Delta U \frac{\partial}{\partial U} g(K, U) + \frac{1}{2} (\Delta U)^2 \frac{\partial^2}{\partial U^2} g(K, U).$$

A kifejezés első tagja (1) értelmében zérus, tehát

$$\Delta G = \frac{1}{2} (\Delta U)^2 \frac{\partial^2}{\partial U^2} g(K, U). \quad (3)$$

Eszerint a gazdaságosság csökkenése a névlegestől eltérő feszültségen üzemelő berendezésnél első megközelítésben a feszültségeltérés négyzetével arányos. Ugyanakkora kárt okoz tehát a feszültségeltérés megváltozása 5%-ról 7%-ra, mint a névleges feszültséghez képest kialakuló 5%-os eltérés. Ez az összehasonlítás is igazolni látszik egy tűrési sáv létjogosultságát a névleges feszültség környezetében.

Megjegyzendő, hogy a feszültségeltérés okozta gazdasági kár mértéke nem független a berendezés természetétől, más egy villamos motor, más egy izzólámpa esetében és nem mindig hanyagolhatjuk el nyugodt lélekkel a sorba fejtett kifejezés magasabb rendű tagjait. Statisztikusan azonban közel járunk a valósághoz, ha a gazdaságosság megítélésében a feszültségeltérés négyzetével számolunk.

3. A feszültség szabályozás rendszere

A végső cél az, hogy a feszültség a felhasználás helyén ne lépjen ki a tűrési sávból. A térben rendkívül kiterjedt, országos vagy esetleg kontinentális méretű elosztó rendszerben a szabályozásnak igazodnia kell a rendszer hierarchikus felépítéséhez. A magasabb szintű szabályozás elmaradása megoldhatatlanul nagy feladatot róna a fogyasztó-közei szabályozásra. Közpon-tosan azonban nem oldható meg a feladat, mert ugyanaz a központi terhelés az ellátott terület fogyasztóinak a legváltozatosabb helyi felhasználásaiból összegeződhet, amivel a körzeten belüli feszültségviszonyok változatos elosz-lása is együtt jár.

Szabályozni kell tehát a feszültséget a termelés helyén, szabályozni kell a nagy- és középfeszültségű hálózat fontosabb csomópontjain és általában célsze-rű feszültség szabályozást alkalmazni a kisfeszültségű fogyasztói hálózaton is.

Ebben a sorban az erőműtől a fogyasztó felé haladva nagyságrendekkel csökken a szabályozó teljesítménye, általában egyszerűsödnek a velük szemben támasztott műszaki követelmények, növekszik a felhasznált szabályozók száma, csökken az egységáruk.

Már korábban említettük, hogy az energiaszolgáltatás minőségéhez kapcsolódó jogos elvárások kielégítése ma már csak önműködő eszközökkel képzelhető el. Ami a feszültség szabályozást illeti, már a középfeszültségű hálózat csomópontjaiban működő szabályozók nagy része is személyzet nélküli alállomásokon kap helyet, ahol az állandó figyelés terhes kényszerétől elte-kintve is csak automatikus berendezés jöhet tekintetbe. Nem is beszélve a szekunder hálózatokon elszórt, oszlopokra, házfalakra szerelt, a rendszeres kezelés köréből teljesen kieső készülékekről.

4. Megoldások

Legnagyobb a felelőssége a hierarchikus rendszer csúcsán működő erőművi szabályozónak, amely a generátor gerjesztésébe avatkozik be. Ezt a feladatot ma már gyakorlatilag kizárólag gyors működésű, folytonos elektronikus szabályozók látják el, amelyet a gyártó mű a generátorral együtt szállít.

Az elosztó hálózaton a feszültséget csak transzformációval lehet befolyásolni, így minden, a hálózaton alkalmazott feszültségszabályozó valamilyen fajta transzformátor, amelynek az áttételét kell bizonyos határok közt változtatni.

A transzformátor áttételét lehet módosítani úgy, hogy megváltoztatjuk az aktív részek — tekercselések, vasmag — kölcsönös helyzetét, vagy megváltoztatjuk a menetszám áttételt, célszerűen valamelyik tekercselés megcsapolásainak az átkapcsolásával. Az előbbi módon nagyobb tömegeket kell mozgatni, de megvan a folytonos szabályozás lehetősége. A gyakorlat az utóbbi mellett döntött, minthogy az még a nagy feszültségek és nagy teljesítmények tartományában is jól megvalósítható szerkezetekhez vezet, bár azon az áron, hogy a feszültséget csak fokozatokban tudja változtatni. Elég nagy fokozatszám esetén még viszonylag nagy, $\pm 15\%$ vagy $\pm 22\%$ szabályozási tartományon belül sem kell $1 \div 2\%$ -nál nagyobb lépcsőket alkalmazni, ami a szabályozó átkapcsolásakor még nem hat zavaróan a hálózaton, ugyanakkor jóval belül van a megengedett tűrési sávon.

A szabályozás pontossága egyébként nem egyezik a lépcsővel, hanem annál valamivel rosszabb. Egy lépcsős szabályozó stabilitási kritériuma rendkívül egyszerűen megfogalmazható: a holtáv legyen nagyobb a lépcsőnél. Ha ezt a szabályt betartjuk, akkor nem fordulhat elő instabil üzem, ami lépcsős szabályozónál szüntelen ide-oda kapcsolgatásban nyilvánul meg.

A nagy- vagy középfeszültségű hálózat csomópontjában elhelyezett szabályozó célja az, hogy a fogyasztó feszültségét az előírt határok között tartsa. De nem azt érzékeli, hanem a saját feszültségét.

Ha a szabályozó egyetlen fogyasztót látna el egy hosszú vezetéken, akkor a problémát egy egyszerű terhelés kompenzációval át lehetne hidalni. A szabályozó helyén érzékelni lehet az áramterhelést és a szabályzott feszültség alapértékét azzal arányosan úgy kell megemelni, hogy éppen kiegyenlítse az ugyancsak a terheléssel arányos vonali feszültségesést.

A valóságos helyzet ennél bonyolultabb, a csomópontból ellátott körzeten belül a terhelések más-más törvények szerint vagy véletlenszerűen oszlanak meg és a csomópont terheléséből nem tudunk egyértelműen következtetni egy-egy fogyasztó feszültségére. Ilyenkor a körzetet elemezni kell ebből a szempontból. Ha a terhelések alakulása az egész körzetre kiterjedően elég jó korrelációt mutat, az előbbi módszerrel még belül maradhatunk a tűrési sávon. Ellenkező esetben további intézkedés kell: a fogyasztók olyan átcsoportosítása, a körzethatárok újabb megállapítása úgy, hogy azokon belül a korre-

láció helyreálljon; további szabályozók beállítása a tűrésí sávból kilépő fogyasztók érdekében.

A hálózati feszültségváltozások regisztrátumát kézbe véve, azon kétféle mozgást észlelhetünk. Látunk kis hullámhosszú kilengéseket, a ki- és bekapcsolások, indítások, terheléslökések okozta, esetleg csak a másodperc tört részéig, máskor néhány másodpercig tartó feszültségváltozásokat, amelyek mértéke azonban kiléphet a hóltsáv korlátai közül. A másik mozgás a feszültségsszint lassú, órákban mérhető eltolódása a statisztikus terhelés megváltozása következtében.

A feszültségsszabályozásnak nem célja az első típusú feszültségmozgások megszüntetése. Az állandó kapcsolgatás inkább csak nyugtalanná tenné a hálózatot és nagyon hamar kimerítené a szerkezet élettartamát. Ezért perc nagyságrendű időkéleltetés óvja meg a szabályozót a céltalan kapcsolgatásoktól, aminek eredményeként a szokásos üzemi körülmények közt napi mintegy $10 \div 15$ átkapcsolásra számíthatunk.

A hazai nagy- és középsszabályozású hálózat számára a Ganz Villamossági Művek készíti a feszültségsszabályozós transzformátorokat, az esetek többségében olyan kivitelben, hogy az a feszültségsszabályozás és a transzformáció feladatát egy egységben oldja meg. Az átkapcsolást vezérlő automatikát a Villamosipari Kutató Intézet fejlesztette ki szoros együttműködésben a Magyar Villamos Művek Trösztel.

5. Szabályozás a szekunder hálózaton |

A hierarchia legalsó fokán a 400/230 voltos szekunder hálózat szabályozása áll. Mégis e téma tárgyalásának most valamivel nagyobb teret szentelünk, mert az e célra szolgáló eszközök kifejlesztése során néhány érdekes elemzésre és megállapításra nyíltt alkalom.

Hazánkban néhány éve foglalkozunk a kisfeszültségű hálózatok szabályozásával. Különösen indokolt ez a szabályozás azokban a fogyasztói körzetekben, ahol a területegységre számított fajlagos fogyasztás kicsi. Tehát nem a sűrűn lakott városközpontokban, hanem a laza településű városszélen és falun, ahol egy táppontról hosszú vonalak ágaznak ki és ezeken tekintélyes feszültségessések léphetnek föl. Meg kell jegyezni, hogy a szekunder hálózati feszültségsszabályozás útján elért javításában nemzetközi viszonylatban is úttörő munkát végeztünk.

A szabályozó egy ponton kapcsolódik a szabályozandó rendszerhez, ott érzékel és ott avatkozik be. Egyetlen közös szabályozóval elvileg sem érhető el tökéletes értéktartás egy térben kiterjedt rendszerben, amelyben a szabályozott paraméter a helynek is függvénye.

Ha a feladat az, hogy a feszültségget egy helyen, egyetlen fogyasztó számára tartsuk minél pontosabban állandó értéken, akkor a folytonos vagy

finoman lépcsőzött szabályozó nyújtja a legtökéletesebb megoldást. Ugyanezt állapíthatjuk meg egy olyan fogyasztói körzetről, amelyen belül számottevő feszültségkülönbségek nem lépnek föl, a rendszer nagyjából egy egészként változtatja a feszültségét.

A szekunder hálózati szabályozás feladata azonban ettől eltér, célja a nagy feszülteségű vonalak viszonyainak a javítása, a szabályozatlan vonalon fellépő feszülteségések mérséklése, illetve azok behatárolása a tűrési sávba.

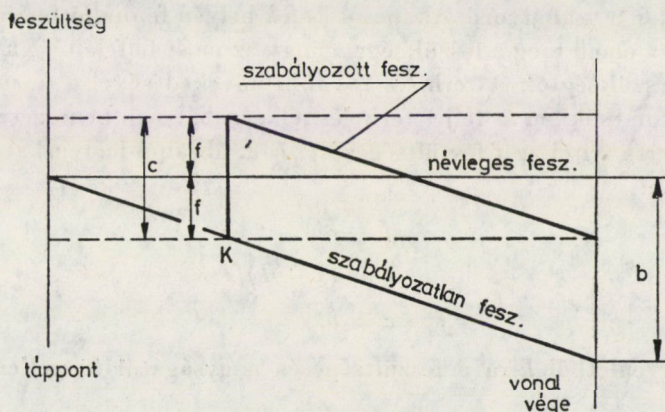
E speciális feladat megoldására, mint erre legmegfelelőbbet és leggazdaságosabbat, a kétállású szabályozót javasoltuk. Az alábbi vizsgálat ennek a választásnak a jogosultságát hivatott eldönteni, összehasonlítva azt a folytonos, illetve többlépcsős szabályozóval.

A vizsgálódás megkönnyítésére néhány egyszerűsítő feltevést vezetünk be, miáltal a viszonyok sokkal áttekinthetőbbé válnak anélkül, hogy ez az összehasonlító megállapítások elvi értékén változtatna.

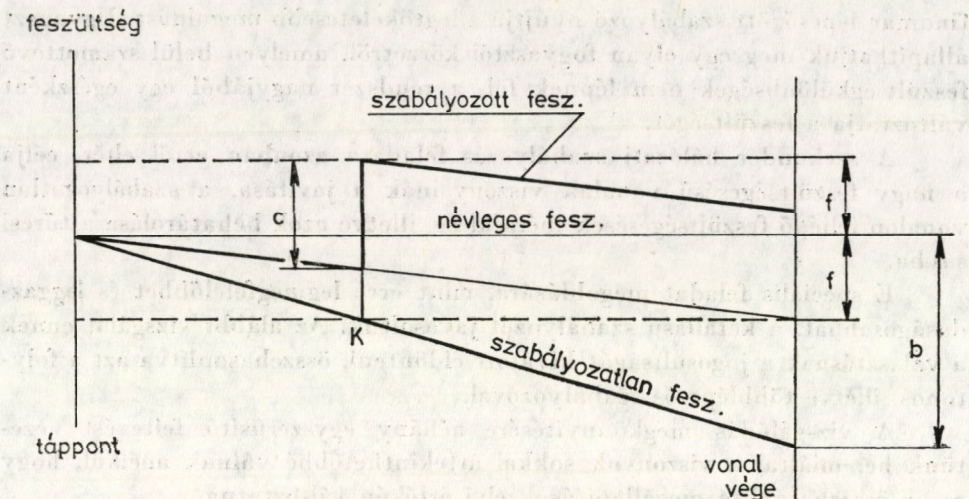
Az első egyszerűsítés, hogy a feszülteségést a vizsgált vonal mentén a hosszúsággal arányosnak tekintjük. Eltekintünk továbbá a szabályozás során fellépő másodlagos hatásoktól, például attól, hogy a szabályozás következtében a terhelés is megváltozik. Figyelmen kívül hagyjuk, hogy a szabályozó meghatározott áttételű transzformátor, tehát a feszülteségváltoztatás abszolút értéke nem független a bemeneti feszülteség értékétől. Nem vesszük figyelembe a szabályozáshoz egyébként nélkülözhetetlen holsávot sem. Első lépésben a táppont feszülteségét is rögzítettnek tekintjük.

A feszülteség szabályozás kritériumának a feszülteségeltérés nagyságát vesszük. Tehát a szabályozó beavatkozását úgy határozzuk meg, hogy a vonal mentén bárhol fellépő feszülteségeltérés a lehető legkisebb legyen.

Helyezzük el a szabályozót az egységnyi hosszúságúnak vett vonal k hanyadában (1. ábra). A szabályozó működési elvétől függetlenül egy feszült-



1. ábra. Vonali feszülteségek alakulása folytonos szabályozás esetén



2. ábra. Vonali feszültségek alakulása kétállású szabályozás esetén

ségugrást hoz létre, a különbség csak annyi, hogy a folytonos szabályozó ezt az ugrást folytonosan képes változtatni a mindenkor feszültségeséshez igazodva, míg a kétállású szabályozó egy előre meghatározott nagyságú ugrással avatkozik be akkor, ha a feszültségesés egy bizonyos határt elért (2. ábra).

Legyen a vonal legnagyobb feszültségesése teljes terheléssel b . Folytonos szabályozóval a leghatásosabb működést akkor érzük el, ha azt a vonal harmadába helyezzük el, $k = l/3$. Ekkor a legnagyobb feszültségeltérés teljes terheléssel $f = b/3$. A szabályozó típusteljesítményét az előforduló legnagyobb c feszültségemelés határozza meg, ez esetünkben $c = 2f = 2b/3$.

A kétállású szabályozó mindaddig nem avatkozik be, amíg a szabályozatlan feszültségesés a vonal végén el nem éri a megengedett legnagyobb f értékét. Ekkor a szabályozó átkapcsol és a k helyen fennálló feszültségzintről c értékkel úgy emeli meg a feszültséget, hogy az most felfelé térjen el f értékkel a névleges feszültségtől. A terhelés további növekedésével a feszültség értéke minden ponton csökken és teljes terhelésnél a szabályozó bemenetén és a vonal végén egyszerre éri el az f feszültségesést. A 2. ábrából leolvashatók az alábbi összefüggések:

$$f = kb,$$

$$c = (1 + k)f,$$

$$f + c = b.$$

E három egyenletből k -ra a feszültségesés nagyságától független egyenletet kapunk:

$$k^2 + 2k - 1 = 0,$$

ahonnan

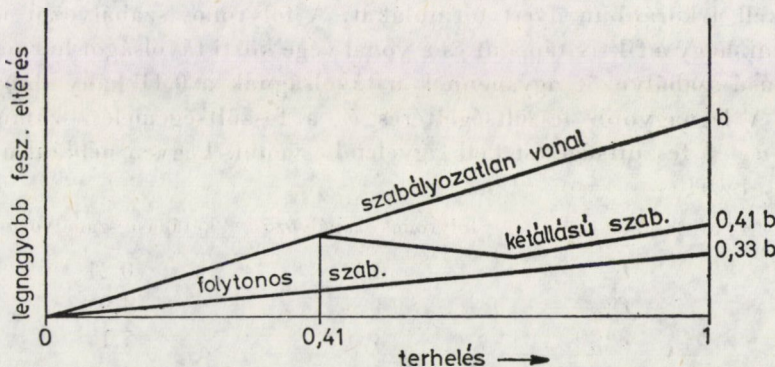
$$k = 0,41. \quad (4)$$

A kétállású szabályozó elhelyezésére tehát a feszültségesés nagyságától függetlenül adódik az egyértelmű optimum. A felírt egyenletek alapján a legnagyobb feszültségeltérés $f = 0,41b$, a szabályozó teljesítményére jellemző feszültségemelés $c = 0,59b$. A kétállású szabályozóval adott vonalon a legnagyobb feszültségesés 41 százalékánál kisebb feszültségeltérést tehát nem tudunk elérni, s ehhez $0,59b$ feszültséglépcső szükséges. Ha a feszültséglépcsőt ennél nagyobbra választjuk, csak rontunk a helyzeten.

A 3. ábra a terhelés függvényében mutatja be a vonal mentén fellépő legnagyobb feszültségeltérés alakulását. A folytonos szabályozó hatására kialakuló eltérés a terheléssel arányosan nő legnagyobb $f = b/3$ értékéig. A kétállású szabályozó 0,41 terhelésnél szólal meg, addig a feszültségeltérés menete megegyezik a szabályozatlan vonalével. A szabályozó működése az átkapcsolás pillanatában nem csökkenti az éppen fennálló feszültségeltérést, csak az most nem a vonal végén, hanem a szabályozó kimenetén jelenik meg. Ezután valamelyest csökken a feszültségeltérés, amíg a szabályozó bemeneti oldalán növekedő eltérés át nem veszi a dominanciát, végül teljes terhelésnél ismét eléri maximális $0,41b$ értékét.

Amint az összehasonlításból kitűnik, jelentős eltérés a két szabályozó hatása közt a kis terheléseknél van, mielőtt még a kétállású szabályozó egyáltalán megszólal. A nagyobb feszültségeltérések tartományában, amely a szabályozás létjogosultságát voltaképpen megadja, az eltérés nem számottevő.

Az összehasonlítást tegyük még teljessé annak megjegyzésével, hogy a valamivel jobb feszültségtartást a folytonos szabályozó azon az áron éri el, hogy beépített teljesítménye $0,67b$, szemben a kétállású szabályozó $0,59b$ teljesítményével. Nem is beszélve azokról a lényegesen bonyolultabb és költségesebb megoldásokról, amelyek a folytonos szabályozót megkülönböztetik a rendkívül egyszerű és megbízhatóan működő kétállású szabályozótól.

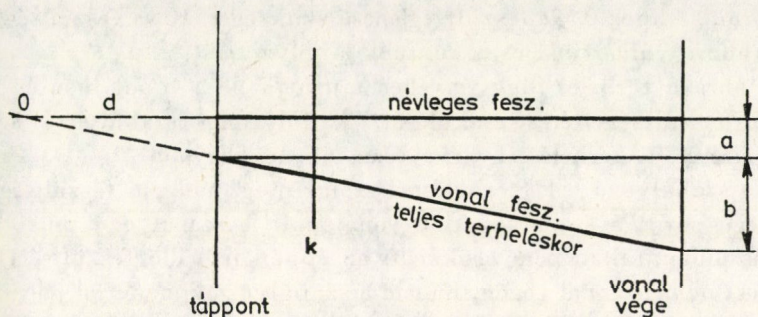


3. ábra. A vonalban fellépő legnagyobb feszültségeltérés a terhelés függvényében

6. Szabályozás változó táppont feszültséggel

A valóságos üzemi körülmények jobb megközelítése érdekében folytassuk ezt a vizsgálódást úgy, hogy az egyszerűsítő feltevések egyikét, nevezetesen a tápponti feszültség rögzített voltát mellőzzük.

A táppont feszültsége két okból és módon változhat. A tápponti transzformátor feszültségesése miatt a táppont feszültsége a terheléssel arányosan



4. ábra. A vonal feszültségeloszlása a terheléssel arányosan ingadozó tápponti feszültség esetén

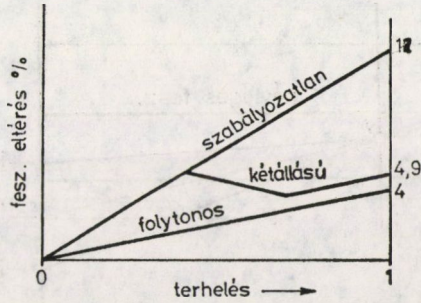
csökken akkor is, ha a transzformátor primer feszültsége állandó. Várhatóan azonban ez utóbbi sem lesz állandó, a felettes hálózat feszültsége is ingadozik bizonyos határokon belül s ez a feszültség-ingadozás gyakorlatilag független a szekunder fogyasztói vonalon fellépő terheléstől.

A vonal feszültségviszonyait arra az esetre, ha a táppont feszültsége csak a terheléstől függően, azzal arányosan ingadozik, a 4. ábra mutatja be. A táppont feszültségesése teljes terheléssel a , a vonalé, mint előbb is, b . A helyzet olyan, mintha a táppont mögött d távolságban a fiktív 0 rögzített feszültségű tápponttól kapná táplálását a vonal. Ha a vonal hossza az egység, akkor $d = a/b$.

Ezzel a feladatot visszavezettük a már megoldott esetre, csak alkalmazni kell a korábban nyert formulákat. A folytonos szabályozót úgy kell elhelyezni, hogy a fiktív táppont és a vonal vége közti távolságot harmadoljuk, a kétállású szabályozót ugyanennek a távolságnak a 0,41 hányadában telepítjük. A legnagyobb feszültségeltérés és a feszültségemelés számításában a teljes $a + b$ feszültségesést kell figyelembe venni. Legyen például $a = 3\%$, $b = 9\%$. Ezzel

	folytonos szabályozó	kétállású szabályozó
k	0,11	0,21
$f\%$	4	4,9
$c\%$	8	7,1

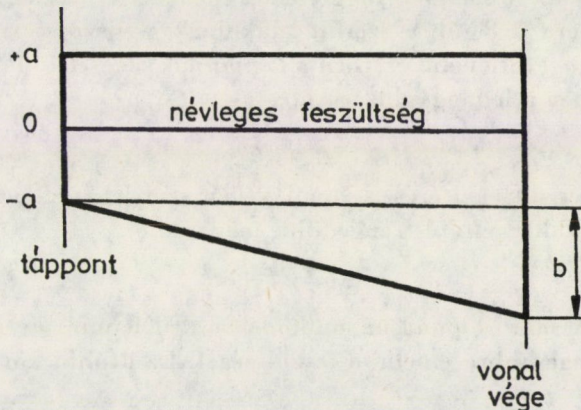
A feszültségeltérés alakulását a terhelés függvényében az 5. ábra mutatja be.



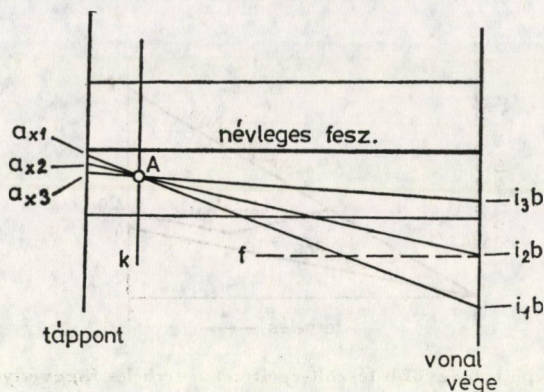
5. ábra. A vonalban fellépő legnagyobb feszültségeltérés a terhelés függvényében a terheléssel arányosan ingadozó tápponti feszültség esetén

A rögzített feszültségű tápponthoz képest minőségi különbség, hogy k nem állandó érték, a szabályozó optimális helye a tápponti és a vonali feszültségesések viszonyától függ. Minél nagyobb a táppont feszültség-ingadozása a vonalihoz képest, annál hátrább helyezkedik el a fiktív táppont és annál közelebb húzódik a feszültségszabályozó helye a valóságos tápponthoz. Végül, ha folytonos szabályozásnál $a = 0,5b$, illetve kétállású szabályozásnál $a = 0,7b$, a szabályozó bekerül a táppontba. Tehát ha ekkora vagy ennél nagyobb a táppont feszültség-ingadozása, akkor magának a táppontnak a feszültségét kell szabályozni.

Amint mondtunk, a táppont feszültsége a terheléstől függetlenül is ingadozhat. Ilyenkor feszültségcsökkenés és feszültségemelkedés egyaránt előfordulhat. Ha a feszültség-ingadozást szimmetrikusnak feltételezzük és az eltérést ismét a -val jelöljük, a táppont feszültség-ingadozása $\pm a$. A 6. ábra érzékelteti, hogy a feszültség a vonal egész hosszát és a független változók minden értékét figyelembe véve a vastag vonallal bekeretezett tartományban bárhol elhelyezkedhet.



6. ábra. Lehetséges feszültségek tartománya függetlenül ingadozó tápponti feszültség esetén



7. ábra. A feszültségesés vonala különböző tápponti feszültség-terhelés értékpárok esetén ugyanazon az A ponton halad át

A táppont független feszültség-ingadozásával a vonali feszültségek alakulásának a szabadságfoka eggyel megnő, egy adott helyen a feszültség többé nem csupán a terhelésnek, hanem a táppont feszültségének is függvénye. A 7. ábra bemutatja, hogy a vonal k helyén elhelyezett szabályozó egyedül az A munkaponthoz tartozó feszültség érzékeléséből nem tudja megállapítani, hogy a vonal végén a feszültségesés túllépte-e a megengedett f értéket.

Legyen a táppont feszültsége valamilyen a terheléstől független a_x érték. Legyen ugyanekkor a terhelés viszonyított értéke i , amikor is a vonalon ib feszültségesés lép fel. Amint látjuk, a feszültségesés egyenese különböző tápponti feszültség-terhelés értékpárok egyidejű fennállása esetén ugyanazon az A ponton halad keresztül. A szabályozási utasításnak tehát mind a feszültségre, mind a terhelésre vonatkozó információt tartalmaznia kell.

Egyébként a folytonos szabályozó működése és paraméterei szempontjából közömbös, hogy a táppont feszültség-ingadozása terhelésfüggő vagy attól független.

Ha a tápponti feszültség független a ingadozása viszonylag kicsi, két-állású szabályozóra a 8. ábra szerint alakulnak a viszonyok. A szabályozó bemenetén legkedvezőtlenebb esetben a C pontnak megfelelő feszültség jelenik meg, amely egyben a legnagyobb feszültségeltérés:

$$f = a + kb. \quad (5)$$

Ugyanekkor a feszültségeltérés a vonal végén sem lehet ennél nagyobb. Ha ugyanekkora feszültségeltérést engedünk meg, akkor

$$a + b = f + c. \quad (6)$$

A szabályozónak már A pontban működésbe kell lépnie, de D pontból sem szabad B -nél magasabbra emelni a feszültséget. Ez utóbbi követelmény megfogalmazása

$$(1 - k)(a + f) + c = 2f. \quad (7)$$

Fenti három egyenletből a szabályozó elhelyezésére jellemző k hányadra, a legnagyobb f feszültségeltérésre és a c feszültségemelésre az alábbi eredményeket kapjuk

$$k = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2 + 1} - \left(1 + \frac{a}{b}\right), \quad (8)$$

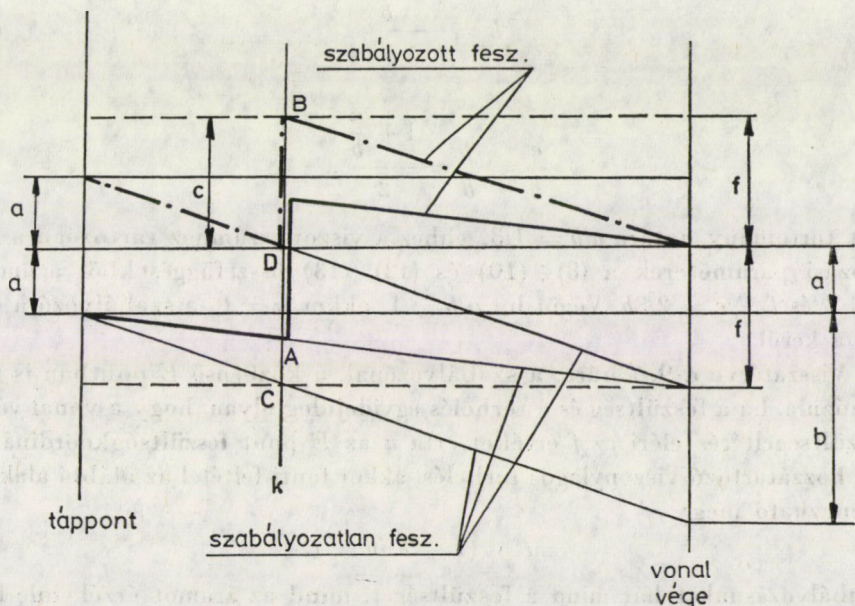
$$f = \left(\frac{a}{b} + k\right)b, \quad (9)$$

$$c = (1 - k)b. \quad (10)$$

Ha $a = 0$, akkor ezek az összefüggések természetesen a rögzített tápponti feszültség esetére már korábban nyert értékeket szolgáltatják: $k = 0,41$, $f = 0,41b$, $c = 0,59b$.

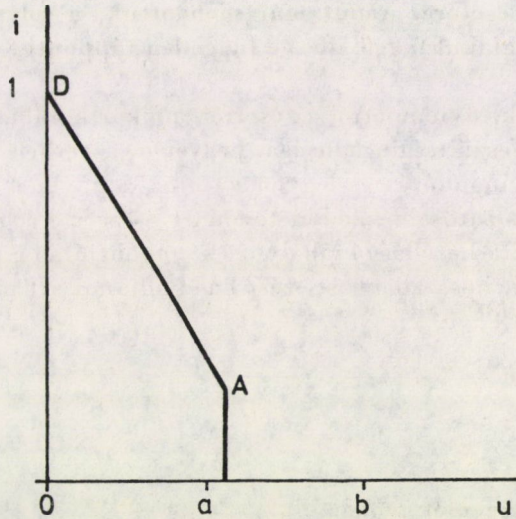
Valamivel nagyobb független a ingadozás a 9. ábra szerinti helyzetet alakítja ki, amely az előbbitől abban különbözik, hogy a D ponton áthaladó feszültségesés egyenese a táppontban alatta marad a legnagyobb tápponti feszültségnek. Az (5) és (6) összefüggés változatlanul érvényben marad, de (7) helyébe az alábbi formula lép:

$$(1 - k)b + c = 2f, \quad (11)$$

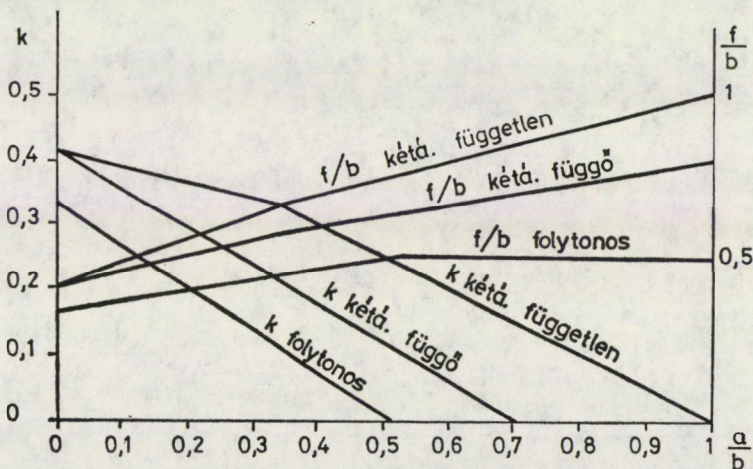


8. ábra. A vonalban elhelyezett kétállású szabályozó hatása viszonylag kis független tápponti feszültség-ingadozás esetén

Ha a szabályozó a táppontba kerül, minőségileg megváltozik a helyzet. A szabályozó bemeneti feszültsége nem jelenik meg a vonalon, tehát két kritikus hely marad a feszültségeltérés szempontjából, a táppont és a vonal vége. A vonal mentén jelentkező feszültségcsökkenést a táppontból nem lehet befolyásolni, lehet azonban a feszültség-egyenes táppont oldali végét ide-oda tologatni annak érdekében, hogy a nullavonalhoz képest szimmetrikusan helyezkedjék el. A táppont $2a$ feszültség-ingadozását a kétállású szabályozó felezi. A kétállású szabályozó csak egy irányba, gyakorlatilag mindig felfelé



10. ábra. Kétparaméteres szabályozás meghúzási jelleggörbéje



11. ábra. Összefüggő áttekintés a szabályozó k helyének és a legnagyobb f feszültségeltérésnek az alakulásáról a szabályozás módjától és a terheléstől függően

szabályoz, ezért a feszültségeltérések kívánatos szimmetrikus elhelyezkedését a nullavonal alkalmas eltolásával érhetjük el. Erre a tápponti transzformátor megcsapolásának az átkapcsolásával általában van mód.

Szimmetria esetén a kétállású szabályozóval elérhető feszültségeltérés a teljes feszültségingadozás fele, $f = (a + b)/2$. Itt van helye a finomabban lépcsőzött szabályozásnak, 3 fokozattal $f = a/3 + b/2$, általában n fokozattal $f = a/n + b/2$, folytonos szabályozással $f = b/2$.

A 11. ábra összefoglaló áttekintést nyújt k és f alakulásáról a/b függvényében a táppont függő, illetve független ingadozása és folytonos, illetve kétállású szabályozás esetére. Amint már mondtuk, a folytonos szabályozás menete egyformán alakul függő, illetve független tápponti feszültségingadozás esetében.

Végül szóljunk röviden arról az esetről, amikor kombináltan jelenik meg a táppont kétféle feszültségingadozása. Legyen a_1 a terheléssel arányos, a_2 a független feszültségingadozás és legyen $a_1 + a_2 = a$. Az a összes feszültségingadozás a legváltozatosabb módon tevődhet össze a két részből. A kombinálódás módja csak a kétállású szabályozó szempontjából érdekes. A számítás nem nehéz, de kicsit hosszadalmas, ezért hadd álljanak itt tájékoztatásul csak az eredmények.

1. Ha

$$0 \leq \frac{a_2}{b} - \frac{a_1}{3b} \leq \frac{1}{3},$$

akkor k az alábbi egyenlet gyöke:

$$k^2 + 2k \left(1 + \frac{2a_1 + a_2}{b} \right) - \left(1 - \frac{2a_1^2}{b^2} - \frac{2a_1a_2}{b^2} \right) = 0,$$

$$\frac{f}{b} = k + \frac{a_1 + a_2}{b},$$

$$\frac{c}{b} = 1 - k.$$

2. Ha

$$\frac{a_2}{b} - \frac{a_1}{3b} \geq \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{a_1 + a_2}{b} \leq 1,$$

akkor

$$k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_1 + a_2}{b} \right),$$

$$\frac{f}{b} = \frac{c}{b} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{b} \right).$$

3. Ha

$$\frac{a_1 + a_2}{b} > 1,$$

akkor

$$k = 0,$$

$$\frac{f}{b} = \frac{c}{b} = a_1 + a_2.$$

Összefoglalóan a szekunder hálózatok szabályozására az alábbi irányelveket állapíthatjuk meg. Ha a szekunder hálózat feszültségigadozása kilép a tűrési sávból és a táppont feszültsége állandó, vagy nem tér el jobban névleges értékétől, mint a vonali feszültségigadozás fele, kétállású feszültségszabályozót kell a vonalba iktatni. Ha a táppont feszültségigadozása megközelíti vagy meg is haladja a vonali feszültségéset, többfokozatú tápponti feszültségszabályozás alkalmazása indokolt. Ha a táppont terheléstől független feszültségigadozása csak $1 \div 2\%$ is, a szabályozó helyes működéséhez az áramot is érzékelni kell.

A szabályozó tényleges tervezésekor természetesen ki kell lépni egyszerűsítő feltevéseink köréből és számolni kell a vonal tényleges feszültség alakulásával, az elágazásokkal, a holsávval stb. Az egyszerűsítő tárgyalás azonban sokkal világosabbá teszi a lényegi összefüggéseket. A szabadesés törvényét sem taníthatnánk az iskolában, ha figyelembe kellene venni a légsűrűlődést, az aerodinamikai hatásokat, a Coriolis-erőt és a gravitációs anomáliákat.

IRODALOM

AILLERET, P.: L'introduction de la mesure dans la notion de la qualité du service d'une distribution d'électricité et son intérêt au point de vue de la conception des réseaux, *Bull. SFE*, (1956)

Some Questions of Network Voltage Regulation. An important quality characteristic of electric energy supply is the network voltage. Keeping in the complicated distribution system everywhere within prescribed tolerances the voltages which change because of distance between production, constantly changing consumption and line voltage drops cannot be achieved without regulation. The system of voltage regulation follows the arrangement of the distribution system: the regulation cares for eliminating the voltage fluctuations on the place of production in the power stations, in the more important nodes of the H. T. and the Medium Tension networks and finally in some parts of the L. T. network. For this latter task the extremely simple two-step regulator is suitable from every point of view.

Einige Fragen der Netzspannungsregelung. Ein wichtiges Qualitätsmerkmal der elektrischen Energieversorgung ist die Netzspannung. In einem komplizierten Verteilungssystem kann ohne Regelung nicht erzielt werden daß trotz der wegen der Entfernungen zwischen Produktions- und Verbrauchsstätten und der ständig wechselnden Belastungen in den Leitungen entstehenden Spannungsfälle die Spannungen überall im vorgeschriebenen Toleranzbereich bleiben. Das System der Spannungsregelung folgt dem Aufbau des Versorgungssystems: die Regelung besorgt die Kompensation der Spannungsschwankungen an der Produktionsstelle in den Kraftwerken, in den wichtigeren Knotenpunkten des Hoch- und des Mittelspannungsnetzes und schließlich in einzelnen Teilen des Niederspannungsnetzes. Für diese letztere Aufgabe entspricht in jeder Beziehung der außerordentlich einfache Zweipunktregler.

TERHELT, IDEÁLISAN RUGALMAS TÉRBELI RÚD ÉRINTŐ-MEREVSÉGI MÁTRIXÁNAK MEGHATÁROZÁSA

GÁSPÁR ZSOLT*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1976. július 16-án]

A dolgozatban levezetjük a csak végein terhelt ideálisan rugalmas térbeli rúd egyensúlyi és kompatibilitási egyenletét, melyekből deriválással határozható meg a rúd érintő-merevségi mátrixa. Számpéldákon bemutatjuk a már kialakult feszültségnek és deformációnak a merevségi mátrixra való jelentős hatását.

1. Bevezetés

Terhelt rúd érintő-merevségi mátrixát általában az elsőrendű merevségi mátrix kiegészítésével közelítik ([1] 388—391 o., [2]). A kiegészítő merevségi mátrixot a potenciális energia extrémumtétele alapján vezetik le. A feszültségeket az egyenes rúdon határozzák meg, a rúdtengely alakját egy legfeljebb harmadfokú polinommal leírható görbének tételezik fel. E síkbeli eredményeket [3] térbeli rúdnál alkalmazza.

[4] síkbeli rudat vizsgál, de pontosabban számítja a már kialakult feszültségeket, mert a rúdvégeken és a rúdközépen kialakult igénybevételek alapján az igénybevételi függvényt másodfokú polinomnak veszi fel (67. o.).

Ennek a dolgozatnak az a célja, hogy levezessük egy — általánosan már terheletlen állapotban is térgörbe tengelyű, változó keresztmetszetű, a csomópontokhoz excentrikusan kapcsolódó, de csak a végpontjain terhelhető ideálisan rugalmas anyagú — rúd egyensúlyi és kompatibilitási feltételeit. Egy olyan nemlineáris egyenletrendszer kapunk, melynek egyik tagját csak numerikus integrálással lehet meghatározni.

A fenti egyenletekből levezethető az egyensúlyi és kompatibilitási differenciálegyenlet-rendszer, melyből a rúd bármely állapotában előállítható az érintő-merevségi mátrix.

2. A rúd állapotát jellemző adatok

A rúdnak megkülönböztetjük a két végét, az egyiket a rúd elejének, a másikat a rúd végének nevezzük. A rúd egy rúdszerkezet két csomópontja közé kerül. Azt a csomópontot, amelyikhez a rúd eleje csatlakozik, az adott rúd szempontjából kezdőpontnak, a másikat végpontnak nevezzük.

* Dr. Gáspár Zsolt, 1025 Budapest, Kápy u. 40/b.

A rúd állapotváltozását egy balsodrású derékszögű $X(x_1, x_2, x_3)$ koordinátarendszerben vizsgáljuk. A kezdő- és végpont koordinátája legyen a terheletlen állapotban

$$\mathbf{x}_{a0} = \begin{bmatrix} x_{a01} \\ x_{a02} \\ x_{a03} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_{b0} = \begin{bmatrix} x_{b01} \\ x_{b02} \\ x_{b03} \end{bmatrix} \quad (1)$$

melyeknek az állapotváltozás során történő megváltozását a Δ_a ill. Δ_b vektorokba foglaljuk.

A kezdő- és végponthoz rendelünk egy-egy balsodrású derékszögű koordinátarendszert $[U(u_1, u_2, u_3)]$ ill. $V(v_1, v_2, v_3)$, melyek terheletlen állapotban az X koordinátarendszerrel egyállásúak, és az állapotváltozás során az \mathbf{f}_a ill. \mathbf{f}_b vektorral jellemezhető elfordulást végzik.

Az \mathbf{f} vektorral jellemzett forgást úgy értelmezzük, hogy a koordinátarendszert az \mathbf{f} vektor körül $\Theta = |\mathbf{f}|$ radiánnal elforgatjuk. Ez a forgatás az [5] 172. oldalán leírtak szerint a

$$\mathbf{T} = [t_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

forgatómátrixszal adható meg. Itt

$$t_{ij} = c_i c_j (1 - c_4) + c_4 \delta_{ij} + (-1)^{i+j} \text{sign}(i - j) s_4 c_{6-i-j}, \quad (2)$$

ahol

$$c_1 = f_1/\Theta; \quad c_2 = f_2/\Theta; \quad c_3 = f_3/\Theta;$$

$$c_4 = \cos \Theta; \quad s_4 = \sin \Theta;$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j, \end{cases}$$

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{ha } a > 0, \\ 0 & \text{ha } a = 0, \\ -1 & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

Ha Θ kicsi, akkor (2) numerikusan rosszul határozható meg, ezért ilyenkor a

$$\cos \Theta \approx 1 - \frac{\Theta^2}{2}, \quad (3)$$

$$\sin \Theta \approx \Theta$$

helyettesítéseket alkalmazzuk. A kapott

$$t_{ij} = \frac{f_i f_j}{2} + \left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right) \delta_{ij} + (-1)^{i+j} \text{sign}(i - j) f_{6-i-j} \quad (4)$$

képlet $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ esetében is használható. A rúdvégek elmozdulásjellemzőit az

$$\mathbf{u}^* = [\Delta_a \mathbf{f}_a \Delta_b \mathbf{f}_b]$$

vektorba foglaljuk.

A rúd belső erőinek a rúd elejéről a rúd kezdőpontjára átadódó erőket és erőpárokat nevezzük. A belső erőket az U koordináta-rendszerben adjuk meg. Tehát a

$$\mathbf{p}^* = [P_1 \ P_2 \ P_3]$$

erő és az

$$\mathbf{m}^* = [M_1 \ M_2 \ M_3]$$

erőpárvektorok alkotják az

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (5)$$

belső erők vektorát.

A rúd kezdeti alakját, merevségi jellemzőit, a csomópontokhoz való bekötésének helyzetét [6] szerint adjuk meg.

A rúdszerkezetre külső erők és erőpárok csak a csomópontokon hathatnak. A terhekről feltételezzük, hogy kötöttek és az X globális koordináta-rendszerben konstansok. A kezdő- és végpontra ható erő és erőpár tengelyirányú komponenseit a

$$\mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} R_{a1} \\ R_{a2} \\ R_{a3} \\ N_{a1} \\ N_{a2} \\ N_{a3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} R_{b1} \\ R_{b2} \\ R_{b3} \\ N_{b1} \\ N_{b2} \\ N_{b3} \end{bmatrix} \quad (6)$$

vektorokkal adjuk meg.

Kinematikai tehernek azokat a hatásokat nevezzük, melyeket nem külső erők okoznak, hanem például lassú alakváltozás, hőmérsékletváltozás. Ezek a hatások úgy vehetők figyelembe, hogy a rúd terheletlen alakját megváltoztatjuk.

3. Az egyensúlyra vonatkozó összefüggések

Ha az állapotváltozás során az a és b pont koordinátái

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_{a0} + \Delta_a, \quad \mathbf{x}_b = \mathbf{x}_{b0} + \Delta_b, \quad (7)$$

a hozzájuk tartozó U és V koordináta-rendszert a \mathbf{T}_a és \mathbf{T}_b forgatómátrix definiálja, és a két csomópontot összekötő rúd belső ereje \mathbf{s} , akkor a kezdő-, ill. végponton egyensúlyozható erők

$$\tilde{\mathbf{q}}_a = -\tilde{\mathbf{T}}_a^* \mathbf{s} \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_b = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{T}}_b^* \mathbf{s} \quad (9)$$

képletekkel számíthatóak, ahol

$$\tilde{\mathbf{T}}_a^* = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_a^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_a^* \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_0 & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & x_{b3} - x_{a3} & x_{a2} - x_{b2} \\ x_{a3} - x_{b3} & \mathbf{0} & x_{b1} - x_{a1} \\ x_{b2} - x_{a2} & x_{a1} - x_{b1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

\mathbf{E} harmadrendű egységmátrix, és $*$ a transzponálás jele.

A (8) és (9) egyenleteket együtt

$$\mathbf{G}\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (13)$$

alakban írhatjuk, ahol

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_a^* \\ -\mathbf{B}\tilde{\mathbf{T}}_a^* \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_a \\ \tilde{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix}. \quad (14)$$

A (13) egyenletet a *rúd egyensúlyi egyenletének* nevezzük.

Ha a rúdvégekre valójában ható $\mathbf{q}^* = [\mathbf{q}_a^* \mathbf{q}_b^*]$ teher nem egyenlő $\tilde{\mathbf{q}}^*$ -gal, akkor nincs egyensúly, és a teher hibája a

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \mathbf{G}\mathbf{s} \quad (15)$$

összefüggéssel számítható.

Írjuk fel (13) differenciálját:

$$\frac{\partial(\mathbf{G}\mathbf{s})}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} + \frac{\partial(\mathbf{G}\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + d\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Mivel \mathbf{G} nem függvénye \mathbf{s} -nek

$$\frac{\partial(\mathbf{G}\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{G}.$$

Vezessük be a

$$\frac{\partial(\mathbf{G}\mathbf{s})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{D}$$

jelölést, így a *rúd egyensúlyi differenciálegyenlete:*

$$\mathbf{D} d\mathbf{u} + \mathbf{G} d\mathbf{s} + d\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (16)$$

alakú.

A \mathbf{D} mátrix felépítése a következő:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{32} & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{41} & \mathbf{D}_{42} & \mathbf{D}_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

ahol

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{12} &= \frac{d\mathbf{T}_a^*}{df_a} \mathbf{p}, \\
 \mathbf{D}_{22} &= \frac{d\mathbf{T}_a^*}{df_a} \mathbf{m}, \\
 \mathbf{D}_{32} &= -\mathbf{D}_{12} \\
 \mathbf{D}_{42} &= -\mathbf{B}_0 \mathbf{D}_{12} - \mathbf{D}_{22}, \\
 \mathbf{D}_{41} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial \Delta_a} \mathbf{T}_a^* \mathbf{p}, \\
 \mathbf{D}_{43} &= -\mathbf{D}_{41}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

A kijelölt deriválások elvégezhetők. (12) alapján

$$\frac{\partial b_{0ij}}{\partial \Delta_{ah}} = (-1)^{i+j} \text{sign}(j-i) \delta_{h,s-i-j}, \quad (i, j, h = 1, 2, 3) \tag{19}$$

valamint (2) alapján

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial t_{aji}}{\partial f_{ah}} &= \left(\frac{\partial c_j}{\partial f_{ah}} c_i + c_j \frac{\partial c_i}{\partial f_{ah}} \right) (1 - c_4) + \frac{\partial c_4}{\partial f_{ah}} (\delta_{ij} - c_i c_j) + \\
 &+ (-1)^{i+j} \text{sign}(j-i) \left(\frac{\partial s_4}{\partial f_{ah}} c_{6-i-j} + s_4 \frac{\partial c_{6-i-j}}{\partial f_{ah}} \right), \quad (i, j, h = 1, 2, 3)
 \end{aligned} \tag{20}$$

ahol

$$\frac{c_v}{f_{ah}} = \begin{cases} \frac{1 - c_h^2}{\Theta} & \text{ha } v = h \\ -\frac{c_v c_h}{\Theta} & \text{ha } v \neq h \end{cases} \quad (v = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial c_4}{\partial f_{ah}} = -s_4 c_h; \quad \frac{\partial s_4}{\partial f_{ah}} = c_4 c_h.$$

Ha Θ kicsi, akkor (2) helyett (4)-et deriváljuk, így

$$\frac{\partial t_{aji}}{\partial f_{ah}} = \frac{f_{ai}}{2} \delta_{jh} + \frac{f_{aj}}{2} \delta_{ih} - f_{ah} \delta_{ij} + (-1)^{i+j} \text{sign}(j-i) \delta_{h,s-i-j}, \tag{21}$$

mely $\mathbf{f}_a = \mathbf{0}$ esetén is értelmezhető.

4. A kompatibilitásra vonatkozó összefüggések

[6] bemutatja, hogy hogyan lehet egy rúd végének koordinátáit (\mathbf{u}_w) és a rúdvéghez tartozó $W(w_1, w_2, w_3)$ koordinátarendszer \mathbf{T}_w forgatómátrixát meghatározni, ha ismerjük a terheletlen rúd alakját, merevségi jellemzőit és a rúd elejére ható erőket.

A rudat akkor nevezzük kompatibilisnek, ha a rudat a kezdőponthoz tartozó U koordinátarendszerben elhelyezve a rúd végéhez tartozó W és a végponthoz tartozó V koordinátarendszerek illeszkednek egymásra.

Az U koordinátarendszerből a V koordinátarendszerbe jutunk, ha az előbbi elforgatjuk az f_c vektor tengelye körül $|f_c|$ radiánnal, és

$$u_c = T_a(x_b - x_a) \quad (22)$$

nagyságú eltolást hajtunk végre. Az U koordinátarendszerből a V koordinátarendszerbe a

$$T_c = T_b T_a^* \quad (23)$$

forgatómátrixszal megadott transzformáció visz át. Minden T forgatómátrix megadható egy f vektorral ($|f| \leq \pi$), ahol (2) alapján

$$f = \begin{bmatrix} t_{23} - t_{32} \\ t_{31} - t_{13} \\ t_{12} - t_{21} \end{bmatrix} \frac{\arccos c_4}{2s_4}, \quad (24)$$

$$c_4 = \frac{t_{11} + t_{22} + t_{33} - 1}{2},$$

$$s_4 = \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Ha $c_4 \approx 1$, akkor (24)-ben $\arccos c_4/s_4 \approx 1$. A (24) összefüggéssel T_w ill. T_c mátrixból f_w és f_c meghatározható.

Az u_c és u_w , valamint az f_c és f_w vektorok különbségét nevezzük a kompatibilitás hibájának (1. ábra).

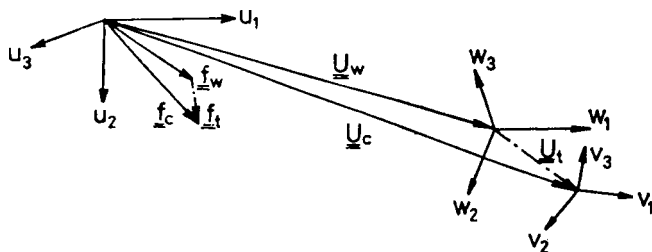
Így a rúd kompatibilitási egyenlete

$$-c + w + t = 0, \quad (25)$$

ahol

$$c = \begin{bmatrix} u_c \\ f_c \end{bmatrix}; \quad w = \begin{bmatrix} u_w \\ f_w \end{bmatrix}; \quad t = \begin{bmatrix} u_t \\ f_t \end{bmatrix}.$$

A kompatibilitás feltétele: $t = 0$.



1. ábra

Írjuk fel a (25) egyenlet differenciálját! A c csak az u elmozdulások, w csak az s rúderők függvénye, így írható:

$$-\frac{dc}{du} du + \frac{dw}{ds} ds + dt = 0. \quad (26)$$

Itt dt a kompatibilitási hiba megváltozását jelenti. Vezessük be az

$$L = -\frac{dc}{du}, \quad (27)$$

$$F = \frac{dw}{ds} \quad (28)$$

jelöléseket, így a rúd kompatibilitási differenciálegyenlete

$$Ldu + Fds + dt = 0 \quad (29)$$

alakú.

(27) alapján L blokkjai:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 & L_{24} \end{bmatrix},$$

ahol

$$L_{11} = T_a,$$

$$L_{12} = \frac{dT_a}{df_a}(x_a - x_b),$$

$$L_{13} = -T_a,$$

$$L_{22} = -\frac{\partial f_c}{\partial f_a},$$

$$L_{24} = -\frac{\partial f_c}{\partial f_b}.$$

L_{12} (20) alapján könnyen számítható. Az L_{22} blokk h -adik ($h = 1, 2, 3$) oszlopát a következőképpen számíthatjuk. Az f_c vektort a $T_c = T_b T_a^*$ mátrix elemeiből a (24) képlettel határozzuk meg. Ennek deriváltja az f_c vektor h -adik eleme szerint:

$$-\frac{\partial f_c}{\partial f_h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{32}}{\partial f_h} - \frac{\partial t_{23}}{\partial f_h} \\ \frac{\partial t_{13}}{\partial f_h} - \frac{\partial t_{31}}{\partial f_h} \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial f_h} - \frac{\partial t_{12}}{\partial f_h} \end{bmatrix} \frac{\arccos c_4}{2s_4} + \begin{bmatrix} t_{32} - t_{23} \\ t_{13} - t_{31} \\ t_{21} - t_{12} \end{bmatrix} \frac{(c_4 \arccos c_4 - s_4)}{2s_4^3} \frac{\partial c_4}{\partial f_h}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{ahol} \quad \frac{\partial c_4}{\partial f_h} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial f_h} + \frac{\partial t_{22}}{\partial f_h} + \frac{\partial t_{33}}{\partial f_h} \right) \\ \text{és } \frac{\partial t_{ij}}{\partial f_h} \text{ a} \quad \frac{\partial \mathbf{T}_c}{\partial f_{ah}} &= \mathbf{T}_b \frac{\partial \mathbf{T}_a^*}{\partial f_{ah}} \end{aligned} \quad (31)$$

mátrix i -edik sorának j -edik eleme.

Az \mathbf{L}_{24} blokk h -adik ($h = 1, 2, 3$) oszlopa is (30) alapján állítható elő, csak itt $\partial t_{ij}/\partial f_h$ (31) helyett a

$$\frac{\partial \mathbf{T}_c}{\partial f_{bh}} = \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial f_{bh}} \mathbf{T}_a^*$$

mátrix i -edik sorának j -edik elemét jelöli. Ha $|\mathbf{f}_c|$ kicsi, akkor (30)-ban

$$\begin{aligned} \frac{\arccos c_4}{2s_4} &\approx \frac{1}{2}, \\ \frac{c_4 \arccos c_4 - s_4}{2s_4^3} &\approx -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

A (28) képletben szereplő \mathbf{w} vektort [6] alapján csak numerikusan tudjuk előállítani, ezért deriválását is numerikusan hajtjuk végre. Az \mathbf{F} mátrix h -adik ($h = 1, 2, \dots, 6$) oszlopát a

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s_h} \approx \frac{\mathbf{w}(\mathbf{s} + \varepsilon \mathbf{e}_h) - \mathbf{w}(\mathbf{s} - \varepsilon \mathbf{e}_h)}{2\varepsilon} \quad (32)$$

képlettel közelítjük, ahol a zárójelben \mathbf{w} argumentumát adtuk meg, ε előírt kicsiny szám, \mathbf{e}_h a h -adik hatodrendű egységvektor.

5. A rúd érintő-merevségi mátrixa

A rúd (16) egyensúlyi differenciálegyenlete és (29) kompatibilitási differenciálegyenlete együtt a rúd állapotváltozási differenciálegyenletét alkotja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{s}) & \mathbf{G}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{L}(\mathbf{u}) & \mathbf{F}(\mathbf{s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\dot{\mathbf{q}} \\ d\mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (33)$$

Egy állapothoz tartozó érintő-merevségi mátrix a végtelen kicsiny elmozdulás-változás és a teherváltozás közti kapcsolatot adja meg. Mivel \mathbf{F} nem szinguláris (33)

$$(\mathbf{GF}^{-1}\mathbf{L} - \mathbf{D}) d\mathbf{u} = d\mathbf{q} - \mathbf{GF}^{-1}d\mathbf{t}$$

alakra hozható. Itt

$$\mathbf{K} = \mathbf{GF}^{-1}\mathbf{L} - \mathbf{D} \quad (34)$$

az érintő-merevségi mátrix,

$$d\mathbf{q}_0 = d\mathbf{q} - \mathbf{GF}^{-1}d\mathbf{t}$$

a redukált teherváltozás vektora.

Szűkebb értelemben csak akkor beszélhetünk érintő-merevségi mátrixról, ha a vizsgált állapot kompatibilis volt. A rúdszerkezetek nagy elmozdulásának vizsgálatánál a teherhiba csökkentése érdekében szükséges a (34) előállítása nem kompatibilis rúd esetén is.

A merevségi mátrix általában még kompatibilis rúd esetében sem szimmetrikus. Ennek okai a következők:

a) Konstans nyomatékvektorral jellemezhető teher nem konzervatív. Konzervatív tehernél a nyomatékvektor az elfordulás függvénye.

b) A fentiek szerint értelmezett elmozdulásvektor-megváltozás és tehervektor-megváltozás skalár szorzata nem adja meg a külső erők munkáját, hanem azt az

$$\mathcal{L} = d\mathbf{q}_{\text{konz}}^* \mathbf{Z} d\mathbf{u} \quad (35)$$

bilineáris alak adja. Ha az elmozdulásvektor megváltozását a $d\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Z} d\mathbf{u}$ alakban keressük, akkor a merevségi mátrix \mathbf{Z}^{-1} -gyel jobbról szorzódik.

c) Az első két ok figyelembevétel után a szimmetria hiányát a numerikus pontatlanságok okozzák. A numerikus integrálás és deriválás pontosságának fokozásával a mátrix gyakorlatilag szimmetrikus lesz.

6. Síkbeli rúd esete

Ha az egész szerkezet a terhekkel együtt egy síkban fekszik és e síkból az állapotváltozás során nem léphet ki, akkor a feladat nagymértékben leegyszerűsödik. Egyrészt a független mozgáskomponensek száma, így a mátrixok és vektorok lineáris mérete felére csökken, másrészt az elmozdulások algebrai-
lag összegezhethők.

Síkbeli rúdnál a (13) egyensúlyi egyenletben

$$\tilde{\mathbf{T}}_a^* = \begin{bmatrix} \cos \alpha_a & -\sin \alpha_a & 0 \\ \sin \alpha_a & \cos \alpha_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_{b2} - x_{a2} & x_{a1} - x_{b1} & 1 \end{bmatrix}.$$

A (17) \mathbf{D} mátrix elemei közvetlenül megadhatók:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & A & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & B & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -A & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -B & \cdot & \cdot & \cdot \\ A & B & C & -A & -B & \cdot \end{bmatrix},$$

ahol (5) jelöléseivel

$$\begin{aligned} A &= -P_1 \sin \alpha_a - P_2 \cos \alpha_a, \\ B &= -P_1 \cos \alpha_a + P_2 \sin \alpha_a, \\ C &= A(x_{a2} - x_{b2}) - B(x_{a1} - x_{b1}). \end{aligned}$$

A rúd (29) kompatibilitási differenciálegyenletében

$$\mathbf{L} = [\tilde{\mathbf{T}}_a + \mathbf{H} - \tilde{\mathbf{T}}_a],$$

ahol

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{0}^* & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}_{12} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_a & \cos \alpha_a \\ -\cos \alpha_a & -\sin \alpha_a \end{bmatrix} (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b).$$

7. Numerikus eredmények

1. *Példa.* Meghatároztuk egy $l = 5$ méter hosszú

$$GJ_1 = EJ_2 = EJ_3 = 10 \text{ m}^2 \text{ Mp}$$

$$EA = 30 \text{ Mp}$$

merevségű terheletlen egyenes rúd \mathbf{F} hajlékonysági mátrixát, mely például a [7] 136. oldalán megadott képlettel ellenőrizhető:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0,1666667 & & & & & \\ & -2,0833333 & & & & 1,25 \\ & & -2,0833333 & & -1,25 & \\ & & & 0,5 & & \\ & & & & 0,5 & \\ & -1,25 & & & & 0,5 \end{bmatrix} \quad (36)$$

A rúdtengely alakját egy Runge-Kutta lépéssel határozva meg az 1. táblázat mutatja, hogy a (32) képletet különböző ε értékeknél behelyettesítve milyen maximális relatív hibával kapjuk az \mathbf{F} mátrix elemeit.

1. táblázat

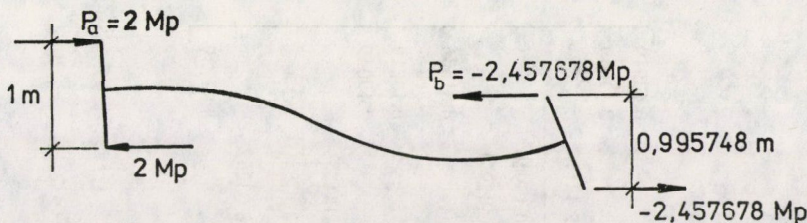
ε	Max. rel. hiba
0,1	0,00037
0,01	0,000003
0,001	0,0000006
0,0001	0,000004
0,00001	0,000004
0,000001	0,00011

2. *Példa.* Meghatároztuk a fenti rúd hajlékonysági mátrixát

$$\mathbf{s}^* = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2]$$

rúderő esetén. A rúd görbült alakját a 2. ábra mutatja.

$$K = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc} 5,91178 & 0,67115 \\ 0,67314 & 1,25007 \\ & 1,14403 \\ & -0,03431 \\ & -2,43096 \\ 0,00003 & 2,44656 \end{array} & \begin{array}{cc} & -0,00667 \\ & 2,44550 \\ -0,03430 & -2,43114 \\ -1,98843 & -1,66477 \\ 0,33546 & 8,62858 \\ & 8,70087 \end{array} & \begin{array}{cc} -5,91178 & -0,67115 \\ -0,67314 & -1,25007 \\ & -1,14403 \\ & 0,03431 \\ & 2,43096 \\ -0,00003 & -2,44956 \end{array} & \begin{array}{cc} & 0,43819 \\ & 2,49049 \\ -0,07819 & -2,43708 \\ -2,00147 & -0,25192 \\ -0,15910 & 3,82488 \\ & 3,81536 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} -5,91178 & -0,67115 \\ -0,67314 & -1,25007 \\ & -1,14403 \\ & -0,19057 \\ & -2,43193 \\ 0,44421 & 2,50501 \end{array} & \begin{array}{cc} & 0,00667 \\ & -2,44550 \\ 0,03430 & 2,43114 \\ -2,01167 & 0,01758 \\ -0,15967 & 3,83045 \\ & 3,83628 \end{array} & \begin{array}{cc} 5,91178 & 0,67115 \\ 0,67314 & 1,25007 \\ & 1,14403 \\ & 0,19057 \\ & 2,43193 \\ -0,44421 & -2,50501 \end{array} & \begin{array}{cc} & -0,43819 \\ & -2,49049 \\ 0,07819 & 2,43708 \\ 1,94849 & -1,39929 \\ 0,55982 & 8,66459 \\ & 8,70035 \end{array} \end{bmatrix}$$



3. ábra

A 3. és 4. példa merevségi mátrixait összehasonlítva látszik, hogy milyen nagy a másodlagos hatása a már kialakult belső erőknél és a rúdtengely görbültségének. Az 5. pontban megadtuk az aszimmetria okát. Ha a nyomatékterheket a 3. ábrának megfelelően az u_2 ill. v_2 tengely irányú karokon az x_1 tengellyel párhuzamos erőkké hozzuk létre, akkor az erők okozta nyomatékvektorok az elmozdulás függvényében

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_{32}P \\ -t_{32}P \end{bmatrix}$$

alakúak, ahol t_{32} és t_{22} a csomópontot jellemző forgatómátrix megfelelő eleme. A csomópont elfordulásának hatására \mathbf{n} megváltozik:

$$d\mathbf{n}_a = \hat{\mathbf{K}}_{22}d\mathbf{f}_a; \quad d\mathbf{n}_b = \hat{\mathbf{K}}_{44}d\mathbf{f}_b. \quad (39)$$

A

$$(\mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}})d\mathbf{u} = d\mathbf{q}_{\text{konz}}$$

összefüggésben $\hat{\mathbf{K}}$ blokkjai a (39)-ben megadottakon kívül zérusblokkok.

A (35) egyenletben szereplő \mathbf{Z} mátrix hiperdiagonálmátrix. A fenti rúd esetében inverze

$$\mathbf{Z}^{-1} = \langle \mathbf{E} \quad \mathbf{E} \quad \mathbf{E} \quad \mathbf{Z}_{44}^{-1} \rangle,$$

ahol

$$\mathbf{Z}_{44}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(1 + \cos \Theta) \Theta}{2 \sin \Theta} & -\frac{\Theta}{2} & 0 \\ \frac{\Theta}{2} & \frac{(1 + \cos \Theta) \Theta}{2 \sin \Theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és Θ a végpont elfordulása. A

$$\mathbf{K}' = (\mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}}) \mathbf{Z}^{-1}$$

mátrix már gyakorlatilag szimmetrikus:

$$K' = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc} 5,91178 & 0,67115 & -0,00667 & -5,91178 \quad -0,67115 \\ 0,67314 & 1,25007 & 2,44550 & -0,67314 \quad -1,25007 \\ \hline & 1,14403 & -0,03430 \quad -2,43114 & -1,14403 \\ \hline & -0,03431 & 1,98843 \quad -1,66477 & 0,03431 \\ & -2,43096 & -1,66454 \quad 8,62858 & 2,43096 \\ \hline 0,00003 & 2,44656 & 8,70087 & -0,00003 \quad -2,44956 \\ \hline -5,91178 & -0,67115 & 0,00667 & 5,91178 \quad 0,67115 \\ -0,67314 & -1,25007 & -2,44550 & 0,67314 \quad 1,25007 \\ \hline & -1,14403 & 0,03430 \quad 2,43114 & 1,14403 \\ \hline & -0,19057 & -2,01167 \quad 0,01758 & 0,19057 \\ & -2,43193 & -0,15967 \quad 3,83045 & 2,43193 \\ \hline 0,44421 & 2,50501 & 3,83628 & -0,44421 \quad -2,50501 \end{array} & \begin{array}{cc|cc} & & 0,43819 & \\ & & 2,49049 & \\ \hline & & -0,19057 \quad -2,43175 & \\ \hline & & -2,01168 \quad -0,15940 & \\ & & 0,01748 \quad 3,82951 & \\ \hline & & 3,81536 & \\ \hline & & -0,43819 & \\ & & -2,49049 & \\ \hline & & 0,19057 \quad 2,43175 & \\ \hline & & 1,88255 \quad -1,48820 & \\ & & -1,49850 \quad 8,63262 & \\ \hline & & 8,87739 & \end{array} \end{bmatrix}$$

IRODALOM

1. PRZEMIENIECKI, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw Hill, New York (1968)
2. GÁSPÁR Zs.—ROLLER B.: A véges szabadságfokú szerkezetek másodrendű elméletének néhány kérdéséről. *Építés-Építészettudomány* 4 (1973), 373—394
3. GÁSPÁR Zs.: Tetszőleges síkú kábelekkal merevített csőhidak számítása. *Mélyépítéstudományi Szemle* 25 (1975), 561—568
4. BÄCKLUND, J.: Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. Doktorsavhandlingar vid Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg, (1973), p. 132
5. RÓZSA P.: Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1974)
6. GÁSPÁR Zs.: Ideálisan rugalmas térgörbe tengelyű rúd alakjának meghatározása. *Műszaki Tudomány* 53 (1977), 227—238
7. SZABÓ, J.—RÓZSA, P.: Große Verschiebungen von Stabkonstruktionen. *Acta Techn. Hung.* 73 (1972), 53—60
8. SZABÓ J.—ROLLER B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1971)

Establishment of the Tangent Stiffness Matrix of an Ideally Elastic Space Bar. The equilibrium and compatibility equations of an ideally elastic bar having a space curve axis, loaded only at its extremities are deduced. With the equations the tangent stiffness matrix of the bar may be determined by derivation. The significant effect of the developed stress and deflection exerted on the stiffness matrix is demonstrated by numerical examples.

Ermittlung der Tangentialsteifheitsmatrix eines idealelastischen belasteten Raumstabes. Die Gleichgewichts- und Kompatibilitätsgleichungen eines idealelastischen nur auf den Stabenden belasteten Raumstabes werden abgeleitet, wovon die Tangentialsteifheitsmatrix des Stabes durch Derivation ermittelt werden kann. Die auf die Steifheitsmatrix ausgeübte bedeutsame Wirkung der schon entwickelten Spannung und Verformung wird durch numerische Beispiele demonstriert.

ELJÁRÁS MEREV TESTEK „TÁNCOLÁSI” REZGÉSÉT (GALLOPING VIBRATION) MEGINDÍTÓ LEGKISEBB SZÉLSEBESSÉG MEGHATÁROZÁSÁRA

JANKÓ LÁSZLÓ*

[Beérkezett 1977. május 14.]

A „táncolás” jelenségét megvizsgálták egyszabadságfokú, ill. folytonos modell esetében, de az elemzések során csak a szélsébségre merőleges síkban lejátszódó hajlító rezgést vették figyelembe. Cikkünkben meghatároztuk a kapcsolt hajlító-csavaró „táncolási” rezgést létrehozó szélsébségek kifejezéseit, melyek közül a legkisebb a mértékadó. Megállapítottuk, hogy az elcsavarodás figyelembevételével számítható határsebesség értéke — a test csillapítási, geometriai és rugalmassági tulajdonságaitól függően — kisebb is lehet, mint a tiszta hajlító „táncolási” rezgést végző rendszer határsebessége. Ez azt jelenti, hogy az elcsavarodás következtében a rendszer az eddig feltételezettnél kisebb szélsébségnél is „galloping” rezgésbe jöhet. Vizsgálataink szerint a kritikus szélsébség annál kisebb, minél távolabb esik a nyírasközéppont a tömegközépponttól.

1. Bevezetés

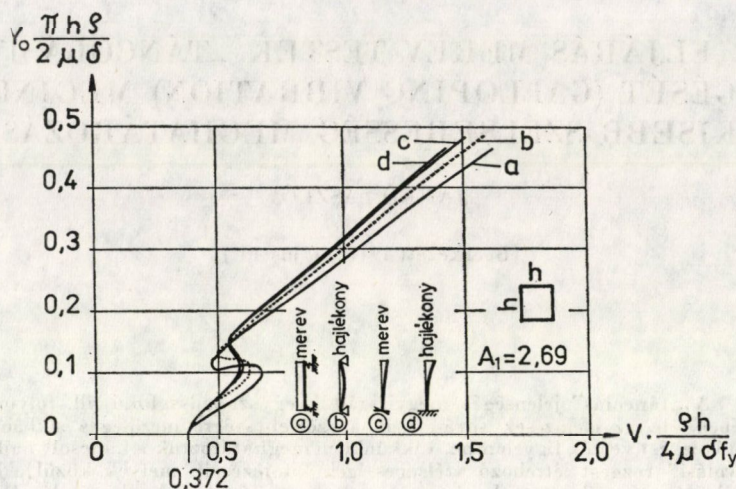
Széllal körüláramlott testeken bizonyos esetekben tapasztalhatunk olyan öngerjesztett rezgésfajtákat, melyekre az jellemző, hogy magának a testeknek a mozgása hozza létre az állandó erőhatásból azokat az alternáló erőket, amelyek fenntartják, ill. erősítik a rezgést. Ezen öngerjesztett rezgésfajták közül a legismertebb a „belebegés” (flutter) és a „táncolás” (galloping) [1], [4], [5], [7].

Mint ismeretes, az említett két öngerjesztett rezgési típus alapvetően eltér egymástól. A belebegés úgy alakul ki, hogy az állandóan fújó szél az eltolódási és az elfordulási rezgés komponens *fáziskülönbsége* következtében táplál be a rendszerbe energiát. A belebegés tehát csak oldalirányú eltolódást és elfordulást (elcsavarodást) is végezni tudó — s így *két szabadságfokú* — rezgő rendszeren jöhet létre.

A „táncolás” lényege pedig az, hogy bizonyos keresztmetszet-alakok *áramlástani instabilitása* következtében mindig az oldalirányú eltolódással azonos irányú gerjesztő erő hat a testre. Így ez a jelenség akkor is kialakulhat, ha a rezgő rendszer *egy szabadságfokú* (csak a szél irányára merőleges irányú eltolódási rezgés végzésére képes).

NOVAK és DAVENPORT [4], [5] részletesen megvizsgálták egyszabadságfokú ill. végtelenül sok szabadságfokú (folytonos) rendszerekre vonatkozóan

* Dr. Jankó László 1036 Bp. Lajos u. 142.



1. ábra „Táncolási” amplitudók $\Theta=0$ esetében (Novak szerint)

a „táncolás” folyamatát és meghatározták a „táncolást” előidéző legkisebb szélsébség nagyságát is. Megállapították, hogy a „táncolás” csak egy bizonyos *határ-szélsébség* felett jöhet létre. Ez a szélsébség a csillapítással arányos, függ a keresztmetszet alaki jellemzőitől és a szélnek kitett felület nagyságától, de nem függ sem a test megtámasztási módjától, sem a test rugalmas vagy merev voltától (vö. az 1. ábrával és (2.16)-tal).

Elemzéseik során csak a test *eltolódási mozgását* (2. ábra: a szél irányára merőleges, y irányú eltolódás) vizsgálták, s nem vették figyelembe azt, hogy a test *elcsavarodása* (2. ábra Θ szög) megnövelheti a szél relatív beesési szögét $\left(\frac{\dot{y}}{V} - t\right)$.

Felmerül a kérdés: ha a szélnek kitett test szilárdságtani tulajdonságai olyanok, hogy a szél irányára merőleges (y irányú) eltolódáson kívül elcsavarodást (Θ) is végezhet, akkor miként változik meg a „táncolást” előidéző legkisebb szélsébség nagysága?

A következőkben a merev test *kapcsolt* hajlítási-csavarási rezgését megindító $V_m^{\gamma, \Theta}$ határsebességet fogjuk meghatározni.

Jelölésjegyzék

c_y, c_Θ	a merev test eltolódási ill. elcsavarodási rugóállandója,
d	az F_y oldalirányú gerjesztő erő távolsága a G tömegközépponttól,
e	az R nyírási középpont távolsága a G tömegközépponttól,
f_y, f_Θ	a hajlítási, ill. csavarási szabad rezgés saját frekvenciája,
g	nehézségi gyorsulás,
h	a szél irányára merőleges oldalhossz,
k_y, k_Θ	a merev test eltolódási, ill. elcsavarodási mozgásának viszkózus csillapítási tényezője,
l	a test hossza,
m	a test tömege,
y, z	a hossz tengelyre és a szélirányra merőleges (y), ill. a szélsébség irányába mutató koordináta (z),

α	a V_{rel} relatív szélesebségnek a z tengellyel bezárt szöge (megfúvási szög),
γ	a test anyagának fajsúlya,
δ_y, δ_θ	a belső hajlítási ill. csavarási csillapítás logaritmikus dekrementuma,
μ	fajlagos tömeg,
μ_G, μ_R	a G ill. az R pontra vonatkoztatott fajlagos poláris tömeg-inercianyomaték,
Θ	elcsavarodás (elfordulás),
ρ	a levegő sűrűsége,
\bar{A}_i	az F_y oldalirányú erő hatványsorának i -edik együttthatója (alaki tényező),
\bar{A}_1	az A_1 alakítényező és a teljes szélerő szorzatából képzett paraméter,
B_i	a karakterisztikus egyenlet együttthatói,
D	a V_r relatív szélesebség irányába mutató emelő erő („drag”),
F	az aerodinamikai erő,
F_y	az aerodinamikai erő y irányú komponense,
I_{pG}, I_{pR}	a G ill. az R pontra vonatkozó poláris inercianyomaték,
G	tömegközéppont,
L	a V_r relatív szélesebség irányára merőleges emelő erő („lift”),
P	az F_y erő támadáspontja (aerodinamikai középpont),
R	nyírasközéppont,
V	szélesebség,
V_r	relatív szélesebség,
V_m	a „táncolást” előidéző legkisebb szélesebség,
$(\cdot) = d(\cdot)/dt$	az idő szerinti differenciálás szimbóluma.

2. Kétszabadságfokú rendszer „táncolása”

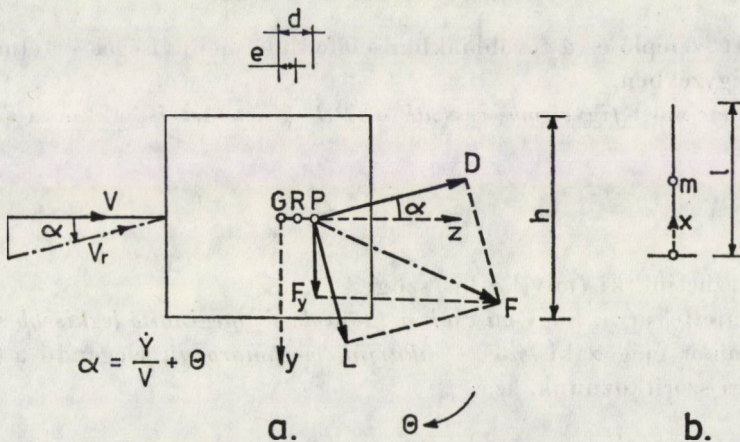
2.1 Elméleti alapok

Vizsgálatainkat kétszabadságfokú rendszeren végezzük (eltolódás és elcsavarodás ellen rugókra ágyazott merev test).

Adjunk a 2. ábrán vázolt testnek egy bizonyos y kezdősebességet az y tengely irányában, de egyelőre tekintsünk el az elcsavarodástól.

A szél relatív beesési szöge így \dot{y}/V lesz.

Az áramló levegő a felső szögleten leválik a testről, az alsó szögleten azonban még egy darabig hozzásimul, s ott az atmoszférikus nyomásnál kisebb nyomás fog kialakulni [1].



2. ábra A „táncolást” létrehozó aerodinamikai erők

Mivel a leválási pontok mögött levő *turbulens áramlás* belsejében kb. az atmoszférikus légnyomás uralkodik, létrejön az az y tengely irányába mutató erő, mely *továbbviszi (gerjeszti)* a rezgési folyamatot. Ezt a jelenséget hívják *áramlási instabilitásnak*. Lényege tehát az, hogy a légáram nemhogy fékezne a megindult mozgást, hanem még tovább erősíti („*negatív csillapítás*”).

Ez a jelenség a sík oldala felől fújó félkör alakú szelvény esetében mutatkozik meg a legjobban, de derékszögű négyszög keresztmetszetű testeknél is előáll.

Az F aerodinamikai erőnek a látszólagos V_r szélesség irányával párhuzamos D („*drag*”) és arra merőleges L („*lift*”) komponenseit szélsátnak kísérletekkel [1], [4], [5] határozhatjuk meg.

DEN HARTOG [1] kimutatta, hogy az *áramlási (dinamikai) instabilitás akkor jön létre*, ha az y irányú $F_y = L \cos \alpha + D \sin \alpha$ gerjesztő erőre fennáll a

$$\frac{dF_y}{d\alpha} < 0$$

összefüggés.

Ez az egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy dinamikai instabilitás esetében az F_y erő *növekménye mindig mozgásirányú*, azaz növeli mind a lefelé ($+$ y), mind a felfelé ($-$ y) irányuló mozgást.

A gerjesztő erőt [4], [5] szerint az

$$F_y = C_{F_y} \frac{1}{2} \rho h l V^2 \quad (2.1)$$

egyenletheől határozhatjuk meg, ahol

$$C_{F_y} = A_1 \tan \alpha + A_2 \tan^2 \alpha - A_3 \tan^3 \alpha - A_4 \tan^4 \alpha + \\ + A_5 \tan^5 \alpha + A_6 \tan^6 \alpha - A_7 \tan^7 \alpha \quad (2.2)$$

Az itt szereplő és a továbbiakban előforduló mennyiségek értelmezését l. a Jelölésjegyzékben.

Ha már most *figyelembe vesszük a Θ elcsavarodást is*, akkor a szél α becsési szögét

$$\alpha = \frac{\dot{y}}{V} + \Theta \quad (2.3)$$

módon fejezhetjük ki (mivel α kis szög).

Tekintettel arra, hogy *mi csak a „táncolást” megindító legkisebb szélességet* — amikor még α kis szög — *akarjuk meghatározni*, elegendő a (2.2) sor első tagjára szorítkoznunk, azaz

$$F_y = \frac{1}{2} A_1 \rho h l V^2 \left(\frac{y}{V} + \Theta \right). \quad (2.4)$$

Megjegyezzük, hogy az F_y erő elvileg függ ugyan az α beesési szög idő szerinti deriváltjától is, azonban a továbbiakban a „táncolási” rezgések technikai elméletének azt a szokásos közelítő feltevését alkalmazzuk, amely szerint a nyugalmi helyzetben mért áramlástan jellemzőket rezgés közben is érvényesnek tekintjük.

A kísérletek azt mutatják, hogy ez a feltevés a valóságot igen jól közelítő eredményeket ad [4], [5].

Az A_1 alakú tényező értékét szélcsatorna kísérletekből lehet meghatározni [4], [5].

Négzetkeresztmetszet esetén $A_1 = 2,69$.

2.2 A két szabadságfokú öngerjesztett rezgőrendszer differenciálegyenletei

A 2. ábrán három nevezetes pont látható: G a tömegközéppont, R a nyírásközéppont, P pedig az F_y aerodinamikai erő támadáspontja.

A kétszabadságfokú (y, Θ) öngerjesztett rezgőrendszer differenciálegyenleteit az alábbi módon írhatjuk fel (y irányú erővetületi és a G pontra vonatkozó csavarónyomatéki egyenlet):

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + c_y(y + e\Theta) - \frac{1}{2} A_1 \rho h l V^2 \left(\frac{\dot{y}}{V} + \Theta \right) + k_y(\dot{y} + e\dot{\Theta}) &= 0, \\ \frac{I_{PG} \gamma}{g} l \ddot{\Theta} + c_\Theta \Theta + c_y(y + e\Theta)e - \frac{1}{2} A_1 \rho h l V^2 d \left(\frac{\dot{y}}{V} + \Theta \right) + k_\Theta \dot{\Theta} + \\ + k_y(\dot{y} + e\dot{\Theta})e &= 0. \end{aligned} \quad (2.5a-b)$$

Ezen egyenletek megoldását

$$\begin{aligned} y &= Y_0 e^{st}, \\ \Theta &= \Theta_0 e^{st} \end{aligned} \quad (2.6a-b)$$

alakban keressük (a kitevőben levő s tényező $s = p \pm qi$ alakú komplex szám).

A (2.6a-b)-t a (2.5a-b)-be helyettesítve az

$$\begin{aligned} Y_0 \left[ms^2 + \left(k_y - \frac{\bar{A}_1}{V} \right) s + c_y \right] + \Theta_0 [k_y e s + c_y e - \bar{A}_1] &= 0, \\ Y_0 \left[\left(k_y e - \frac{\bar{A}_1 d}{V} \right) s + c_y e \right] + \Theta_0 [\mu_{IG} l s^2 + (k_\Theta + k_y e^2) s + c_\Theta + c_y e^2 - \bar{A}_1 d] &= 0 \end{aligned} \quad (2.7a-b)$$

algebrai egyenletrendszert kapjuk.

Itt alkalmaztuk az

$$\frac{1}{2} A_1 \rho h l V^2 = \bar{A}_1 \quad (2.8)$$

jelölést.

2.3 A hajlítási és a csavarási rezgés szétválásának feltétele

A (2.5a–b)-ből kiolvasható, hogy milyen feltételei vannak a hajlítási és a csavarási rezgés szétválásának (vagyis, hogy mely esetekben alakul ki tiszta hajlítási rezgés).

Amennyiben az R , G és p pontok egybeesnek ($d = e = 0$), akkor — gerjesztő nyomaték nem lévén — (2.5b) csillapított szabad csavarási rezgést ír le.

A $d = e = 0$ feltétel (2.5b)-ből kiejti y -t és ismertté teszi Θ -t. A Θ -t ezután (2.5a)-ba helyettesítve megoldást kapunk y -ra.

Ha kezdetben nincs elcsavarodás ($\Theta(t=0) = 0$), akkor (2.5a) tiszta eltolódási rezgést ír le (2.5a) csak y -ra ad egyenletet.

Ha a Θ -ra vonatkozó kezdeti feltétel nem homogén, akkor a test csavarási rezgése a csillapítással elhal.

A lecsillapodásig Θ befolyásolja az y mozgást, de utána a rendszer ismét csak hajlítási rezgést fog végezni. Tehát ha a G tömegközéppont egybeesik a P aerodinamikai középponttal és az R nyírásközépponttal, akkor az elcsavarodás nem befolyásolja a jelenséget. Ennek az az oka, hogy vagy ki sem alakul a Θ elcsavarodási rezgés, vagy gyorsan lecsillapodik.

2.4 Dinamikai instabilitási kritériumok

Ha a (2.7a–b) egyenletek determinánsát kifejtjük, akkor egy

$$s^4 + B_3 s^3 + B_2 s^2 + B_1 s + B_0 = 0 \quad (2.9)$$

alakú negyedfokú karakterisztikus egyenlethez jutunk. Az ebben szereplő B együtthatók részletesebben így írhatók fel:

$$B_3 = \frac{1}{m} \left(k_y - \frac{\bar{A}_1}{V} \right) + \frac{k_\Theta + k_y e^2}{\mu_{IG} l}, \quad (2.10)$$

$$B_2 = \frac{\bar{A}_1}{m \mu_{IG} l} \left[-dm + \frac{k_y e(d-e) - k_\Theta}{V} \right] + \frac{c_y}{m} + \frac{c_\Theta + c_y e^2}{\mu_{IG} l} + \frac{k_y k_\Theta}{m \mu_{IG} l}, \quad (2.11)$$

$$B_1 = \frac{\bar{A}_1}{m \mu_{IG} l} \left[-k_y(d-e) + \frac{c_y e(d-e) - c_\Theta}{V} \right] + \frac{1}{m \mu_{IG} l} [c_y k_\Theta + k_y c_\Theta], \quad (2.12)$$

$$B_0 = \frac{c_y}{m \mu_{IG} l} [c_\Theta - \bar{A}_1(d-e)]. \quad (2.13)$$

Ha a (2.6a–b) megoldásfüggvények kitevőjében levő $s = p \pm qi$ alakú komplex számok valós részei mind negatívak, akkor a rendszer dinamikailag stabil. Ez abból következik, hogy az e^p alakú szorzótényezők jellemzik a csillapítás jellegét és mértékét. Az előző gondolatmenet alapján a dinamikai stabi-

litás matematikai feltételei — az ún. Routh—Hurwitz-féle kritériumok [1], [2] — az alábbiak:

$$\begin{aligned} B_i &> 0, \\ i &= 0, 1, 2, 3 \\ \bar{B} &= B_1 B_2 B_3 - B_1^2 - B_3^2 B_0 > 0. \end{aligned} \quad (2.14a-b)$$

A (2.14a—b) egyenletek azt fejezik ki, hogy ha valamelyik B_i együtt-ható ill. a \bar{B} kifejezés negatívvá válik, akkor a rezgőrendszer egyre növekvő amplitúdóval instabillá válik. A $B_i = 0$ ill. a $\bar{B} = 0$ határesetekhez tartoznak a $V_{mi}^{\gamma, \theta}$ határsebességek, melyek közül a legkisebb indítja meg a „táncolást”.

2.5 A „táncolást” előidéző legkisebb szélsősebesség

Ezen pont alatt (a Routh-féle kritériumok alapján) előállítjuk a B_3 , B_2 , B_1 és B_0 együtthatókból számítható határsebességeket mind csillapított, mind csillapítatlan rendszerek esetén. Külön foglalkozunk a $\bar{B} = 0$ kritériummal.

Az elemzések során kitérünk az R , P és G pontok relatív helyzetének következményeire is.

A négyféle határsebesség közül természetesen a legkisebb a mértékadó.

2.5.1 $B_3 = 0$

a) Csillapított rendszer

A (2.10) egyenletet zérussal egyenlővé téve a

$$V_{m3}^{\gamma, \theta} = 2 \frac{k_y \left(1 + e^2 \frac{\mu}{\mu_{tG}} \right) + k_\theta \frac{\mu}{\mu_{tG}}}{\rho h l A_1} \quad (2.15)$$

kifejezés állítható elő.

Ez a határsebesség tehát független a rugóállandóktól, valamint a G és P pontok relatív helyzetétől is.

Ezzel szemben $V_{m3}^{\gamma, \theta}$ függ a szélnek kitett felület nagyságától, a G és R pontok relatív helyzetétől, az alaki tényezőtől, továbbá a fajlagos tömeg és a G pontra vonatkozó fajlagos poláris tömeg-inercianyomaték arányától. Amennyiben végrehajtjuk a $\mu_{tG} \rightarrow \infty$ (nem csavarodik el a test) határátmene-tet, akkor megkapjuk a NOVAK és DAVENPORT [4], [5] által meghatározott, egy szabadságfokú rendszerekre vonatkozó

$$V_m^\gamma = 2 \frac{k_y}{\rho h l A_1} \quad (2.16)$$

összefüggést. A

$$V_m^\gamma \frac{\rho h}{4\mu\delta_y f_y} = \frac{1}{A_1} \quad (2.17)$$

kifejezés értéke látható az 1. ábrán (négyzetkeresztmetszet esetén $1/A_1 = 0,372$).

A hajlítási csillapítás k_y tényezőjét [1] szerint a

$$\delta_y = \frac{k_y}{2\mu l f_y} \quad (2.18)$$

egyenletből határozhatjuk meg, a (2.15)-ben található k_θ csillapítási tényezőt pedig legegyszerűbben a

$$\delta_\theta = \frac{k_\theta}{2\mu_{IR} l f_\theta} \quad (2.19)$$

összefüggésből számíthatjuk.

A különböző szerkezetek δ logaritmikus dekrementumait (mivel a logaritmikus dekrementum az *anyagi hiszterézissel* kapcsolatos, a $\delta_y \approx \delta_\theta \approx \delta$ feltevés indokolt) [3]-ban és [6]-ban találhatjuk meg.

A (2.15)-öt a (2.16)-tal összehasonlítva megállapítható, hogy a kapcsolt rezgés ezen határsebessége nagyobb, mint a tiszta hajlítási rezgés határsebessége.

Minél kisebb a csillapítás mértéke, ill. a G és R pontok minél közelebb esnek egymáshoz (e), továbbá minél kisebb a μ/μ_{IG} arány és minél nagyobb a szélnek kitett felület (hl), annál kisebb szélsősebességnél indul meg a „táncolás”.

Az az eredmény, hogy (2.15) értéke nagyobb mint a (2.16)-é, az alábbi gondolatmenettel kontrollálható.

A (2.5a) egyenletben levő $c_y e \Theta$ és $k_y e \dot{\Theta}$ tagok attól függetlenül csökkentik egymást, hogy y és Θ fázisban van-e vagy sem. Ezek összege a $-\bar{A}_1 \Theta$ taggal együtt fejezi ki a kapcsolt rezgést végző test gerjesztő erejének eltérését a tiszta hajlítási rezgésnek megfelelő gerjesztő erőtől.

Belátható, hogy az említett három erőkomponens ($c_y e \Theta + k_y e \dot{\Theta} - \bar{A}_1 \Theta$) összege lehet pozitív is, de akkor az *elcsavarodás miatt lecsökkent gerjesztő erőhöz* tartozó határsebesség valóban nagyobb, mint a tiszta hajlítási rezgés határsebessége. A $V_{m3}^{y,\Theta}$ sebesség ennek az említett állapotnak felel meg.

b) *Csillapítatlan rendszer* ($k_y = k_\theta = 0$)

A (2.15) alapján nyilvánvaló, hogy ez esetben bármekkora szélsősebesség megindíthatja a „táncolást” ($V_{m3}^{y,\Theta} = 0$). Innen is látható, hogy a „táncolás” jelenségénél milyen *nagy szerepe van a csillapításnak* (ellentétben a „belebegéssel” [1]).

2.52 $B_2 = 0$

a) *Csillapított rendszer*

A (2.11) egyenletből ekkor a

$$V^2 - V \frac{k_y e(d - e) - k_\theta}{dm} - 2 \frac{c_y \mu_{IG} + (c_\theta + c_y e^2) m + k_y k_\theta}{\rho h l A_1 dm} = 0 \quad (2.20)$$

másodfokú egyenlet származtatható.

A következő (2.52b) pontban kimutatjuk, hogy csillapítás nélkül ez a határsebesség (l. (2.21)-et) azonos a DEN HARTOG által meghatározott [1], „belebegésre” („flutter”) vonatkozó kritikus sebességgel.

A „flutter” kritikus sebessége mindenképpen nagyobb a „galloping” határsebességénél, ezért $V_{m2}^{y, \theta}$ mindig nagyobb a (2.16) V_m^y -nál, és egyébként magas épületeknél kiesik az előforduló szélesebbégek tartományából, tehát vizsgálata a „galloping” rezgés szempontjából szükségtelen.

b) *Csillapítatlan rendszer* ($k_y = k_\theta = 0$)

A (2.20)-ból a $k_y = k_\theta = 0$ helyettesítéssel a

$$V = \sqrt{2 \frac{c_\theta + c_y \left(e^2 + \frac{\mu_{IG}}{\mu} \right)}{\rho h A_1 d}} \quad (2.21)$$

sebességet kapjuk.

A (2.21) pontosan megegyezik a DEN HARTOG-féle [1], a „belebegésre” (flutter) vonatkozó kritikus sebességgel.

A (2.11)-ből kiolvasható, hogy ha G egybeesik P -vel ($d = 0$), akkor a B_2 értéke soha nem lehet negatív, vagyis akkor nem kapunk „táncolási” határsebességet.

2.53 $B_1 = 0$

a) *Csillapított rendszer*

A $V_{m1}^{y, \theta}$ határsebességet a (2.12) kifejezésből származtatható

$$V^2 - V \frac{c_y e(d - e) - c_\theta}{k_y(d - e)} - 2 \frac{c_y k_\theta + k_y c_\theta}{\rho h A_1 k_y(d - e)} = 0 \quad (2.22)$$

másodfokú egyenletről számíthatjuk.

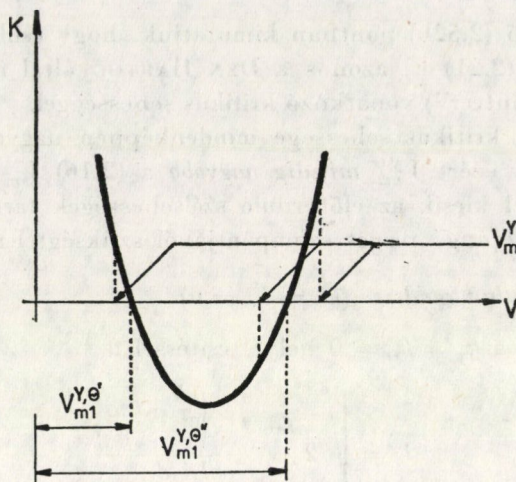
Helyettesítsük be (2.22)-be V helyére a tiszta eltolódási rezgésre vonatkozó (2.16) összefüggést. Ezután a $\delta_y \approx \delta_\theta = \delta$ feltételezéssel és a tiszta hajlítási, ill. csavarási szabad rezgésekre érvényes [1]

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_y}{l\mu}}, \quad (2.23)$$

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_\theta}{l\mu_{IR}}} \quad (2.24)$$

képletek felhasználásával az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\left[\frac{2\delta^2}{\pi^2 \rho h A_1} \mu - e \right] (d - e) \frac{f_y}{f_\theta} - \frac{\mu_{IR}}{\mu} = 0. \quad (2.25)$$



3. ábra

A most következő gondolatmenettel igazoljuk azt, hogy $V_{m1}^{y, \theta}$ lehet kisebb, mint V_m^y :

A (2.22) egyenlet bal oldalán álló függvényt K -nak nevezve a $K = K(V)$ függvény a 3. ábrán vázolt koordináta-rendszerben felülről homorú parabola-ként ábrázolható.

Amennyiben a (2.25) egyenlőség bal oldala (vagyis a $V = V_m^y$ helyen egyúttal a K függvény is) pozitív értéket vesz fel, akkor a V_m^y kritikus sebesség a (2.22)-ből származtatható *mindkét gyöknél* (a 3. ábrán egy ill. két vesszővel jelölve) vagy kisebb, vagy nagyobb.

Ha viszont a (2.25) egyenlet bal oldala (egyúttal a K függvény is) negatív, akkor V_m^y csak a két $V_{m1}^{y, \theta}$ gyök közé eshetik.

A fentiek alapján tehát belátható, hogy a kapcsolt „táncolási rezgést” végző test $V_{m1}^{y, \theta}$ határsebessége lehet kisebb mint a csak eltolódási rezgést végző test V_m^y kritikus sebessége. Az eddigiekből az is kitűnik, hogy egyszerű módon, pl. pusztán a (2.25) egyenlőség bal oldalának előjele alapján nem dönthető el az, hogy V_m^y kisebb-e vagy nagyobb-e mint $V_{m1}^{y, \theta}$.

Erre a (2.22) egyenlet numerikus megoldásra ad csak választ.

Megjegyezzük továbbá azt is, hogy ha a két $V_{m1}^{y, \theta}$ határsebesség valamelyike pontosan egyenlő V_m^y -nal (azaz a (2.25) egyenlet teljesül), attól még a másik $V_{m1}^{y, \theta}$ gyök lehet kisebb is és nagyobb is, mint V_m^y (speciális esetben e három érték persze egybe is eshetik: ez a helyzet a $d = e = 0$ esetben, amikor is csak eltolódási rezgést végez a test (vö. a 2.3. ponttal)).

b) Csillapítatlan rendszer ($k_y = k_\theta = 0$)

A (2.12) kifejezés vizsgálata alapján belátható, hogy csillapítatlan rendszer „táncolását” bármekkora sebesség megindíthatja ($V_{m1}^{y, \theta} = 0$; vö. 2.51b/-vel).

2.54 $B_0 = 0$

a) *Csillapított rendszer*

A (2.13)-at zérussal egyenlővé téve a

$$V_{m0}^{y, \theta} = \sqrt{\frac{2c_{\theta}}{\rho h l (d - e) A_1}} \quad (2.26)$$

kifejezést kapjuk.

Ez azonban nem igazi „táncolási” határsebesség, hanem egy *statikus elcsavarodási instabilitást* okozó szélsősebesség. Lényegében azt fejezi ki, hogy a külső csavarónyomaték egyre növekszik az elcsavarodással (ill. a belső csavarónyomaték nem képes utolérni a külső csavarónyomatékot), vagyis ez statikai, nem pedig dinamikai instabilitás. DEN HARTOG [1] a (2.26) összefüggést a „belebegéssel” (flutter) kapcsolatban vezette le.

Az áramlástanban a $V_{m0}^{y, \theta}$ sebességet *divergenciának* nevezik.

Amennyiben $R \equiv P(d = e)$, ill. $G \equiv R \equiv P(d = e = 0)$, akkor a divergencia nem léphet fel.

b) *Csillapítatlan rendszer* ($k_y = k_{\theta} = 0$)

Mivel a divergencia független a csillapítástól, csillapítatlan rendszer esetén is a (2.26) érvényes.

2.55 $B_3 \cdot B_2 \cdot B_1 - B_1^2 - B_3^2 \cdot B_0 = 0$

A B_3, B_2, B_1 ill. B_0 együtthatókra levezetett (2.10), (2.11), (2.12) ill. (2.13) kifejezések bonyolultsága miatt a (2.14b)-vel jelzett Routh-féle dinamikus stabilitási kritériumból nem állítunk elő képletszerű, analitikus megoldást. A (2.14b) feltételből a

$$\bar{B} = B_3 \cdot B_2 \cdot B_1 - B_1^2 - B_3^2 \cdot B_0$$

kifejezés zérussal egyenlővé tételével legfeljebb ötödfokú algebrai egyenletet kapunk, amelynek a megoldását célszerű numerikusan megkeresni.

A további vizsgálatainkat a B_3, B_2, B_1 , ill. B_0 kifejezésekre írt elektronikus számítógépi programok alapján végeztük (l. a Számpéldát).

2.6 Általános értékelés

Az eddigiekből kitűnik, hogy *csak* a $B_1 = 0$ és $\bar{B} = 0$ esetekből számítható kritikus sebességek lehetnek kisebbek, mint a tiszta eltolódási „táncolási” rezgést megindító V_m^y sebesség. A számpélda alapján valószínűsíthető, hogy a $\bar{B} = 0$ kritérium adja a legkisebb kritikus szélsősebességet.

3. Számpélda

A számításhoz szükséges alapadatokat úgy vettük fel, hogy megfeleljenek egy elcsavarodó kihajlás ellen is megfelelően méretezett merevítőmaggal ellátott acélszerkezetű magasház adatainak.

Az alul mereven befogott konzolnak tekintett, l magas merevítőmag tiszta elcsavarodás esetén fellépő, a magassága mentén állandó $q = Q/l$ terhelésből származó kritikus összterhe (jó közelítéssel) a

$$q_{cr} \cdot l = \frac{1}{i_p^2} \left[GI_t + \frac{7,84}{l^2} EI_\omega \right]$$

képletből számítható. Itt i_p az épület alapterületének a mag nyírasközéppontjára (2. és 4. ábra „R” jelű pont) vett poláris inerciasugara, GI_t a mag de Saint-Venant-féle csavarási merevsége (a mag kialakítása a jelen példában olyan, hogy $GI_t \approx 0$) EI_ω pedig a mag öblösödési merevsége.

A tiszta elcsavarodás és az Euler-féle kihajlás ($q_{cr}^E = 7,84 EI/l^3$) kombinációja esetén érvényes kisebb kritikus teher felvételére közelítően úgy méretezzük a magot, hogy az előbbi két kritikus erő mindegyikére az $n = 4$ biztonsági tényezőt alkalmazzuk. Az így meghatározott EI és EI_ω merevségek birtokában a konzol hajlítási ill. csavarási sajátfrekvenciáit az

$$f_y = \frac{0,56}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}},$$

ill.

$$f_\theta = \frac{0,56}{l^2} \sqrt{\frac{EI_\omega}{\mu i_{pR}^2}}$$

képletekből kaphatjuk meg [7].

A sajátfrekvenciákból pedig a merev testre vonatkozó (2.23) ill. (2.24) kifejezések segítségével számíthatjuk ki a szerkezet c_y ill. c_θ rugóállandóit.

Ezt a lépést az 1. ábráról leolvasható alábbi körülmény [4], [5] indokolja:

Merev és hajlékony konzol is (1c., ill. 1d. ábra) azonos szélesség mellett jön táncolási rezgésbe, ha a sajátfrekvenciájuk és a hosszegységre eső tömegük azonos.

A fentiek alapján az alapadatok a következők:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2,69, \\ h &= 20,0 \text{ m}, \\ l &= 100,0 \text{ m}, \\ \rho &= 0,125 \text{ kpm}^{-4} \text{ s}^2 = 1,2263 \text{ kg m}^{-3}, \\ w &= 200 \text{ kp m}^{-3} = 1,9620 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \text{ (légköbmétersúly)} \\ \mu &= \frac{wh^2}{g} = 8,0 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-1}, \\ I_{pG} &= 2 \frac{h^4}{12} = 2,666 \cdot 10^4 \text{ m}^4, \\ \mu_{pG} &= I_{pG} \frac{w}{g} = \mu \frac{h^2}{6} = 5,3333 \cdot 10^6 \text{ kgm}, \\ \delta_y &\sim \delta_\theta = \delta = 0,05 \\ EI &= 4 \frac{wh^2 l^3}{7,84} = 4,0 \cdot 10^{11} \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2}, \end{aligned}$$

$$EI_{\bullet} = 4 \frac{wh^2 l^3}{7,84} i_{pR}^2 = EI i_{pR}^2 = EI \left(\frac{h^2}{6} + e^2 \right),$$

$$f_y = \frac{0,56}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = 0,1252 \text{ s}^{-1}.$$

$$f_{\Theta} = f_y = f,$$

$$\mu_{IR} = \mu \cdot i_{pR}^2 = \mu \left(\frac{h^2}{6} + e^2 \right),$$

$$c_y = 4\pi^2 f^2 \mu l = 4,951 \cdot 10^6 \text{ kg s}^{-2},$$

$$c_{\Theta} = 4\pi^2 f^2 \mu i_{pR}^2 l = c_y \cdot i_{pR}^2 = c_y \left(\frac{h^2}{6} + e^2 \right),$$

$$k_y = 2\mu l f_y \delta_y = 1,0016 \cdot 10^6 \text{ kgs}^{-1},$$

$$k_{\Theta} = 2\mu i_{pR}^2 l f_{\Theta} \delta_{\Theta} = k_y i_{pR}^2 = k_y \left(\frac{h^2}{6} + e^2 \right),$$

$d = 0$ és $-\frac{h}{4}$ (a $d = h/4 = +5\text{m}$ esetet is megvizsgáltuk, de ennek csak elméleti jelentősége van, mert az F_y aerodinamikai erő támadáspontja a G pont és a széltámadta oldal közé esik).

A számítások során az e külpontosságot $-h/4$ -től $+h/4$ -ig változtattuk (4. ábra).

A numerikus megoldás azt az eredményt szolgáltatotta, hogy a $B_2 = 0$ feltételből kapható $V_{m2}^{y,\Theta}$ határsebességek nagyobbak, mint 200 ms^{-1} , a $B_0 = 0$ -nak megfelelő $V_{m0}^{y,\Theta}$ sebességek pedig nagyobbak, mint 118 ms^{-1} .

Ezek tehát kiesnek a reális szélesebességek tartományából. A $B_3 = 0$ és $B_1 = 0$ feltételekből kapott határsebességek mindegyike is nagyobbra adódott, mint a csak eltolódó táncolási rezgést végző test $V_m^y = 30,36 \text{ ms}^{-1}$ határsebessége (vö. a (2.16) képlettel).

Ezzel szemben a (2.14b) kombinált feltételből azt kapjuk, hogy a táncolási rezgés a $d = -h/4$ és $e = +h/4$ esetben már a V_m^y sebességnek kb. 60%-ánál megindul!

A számpélda fő tanulságai:

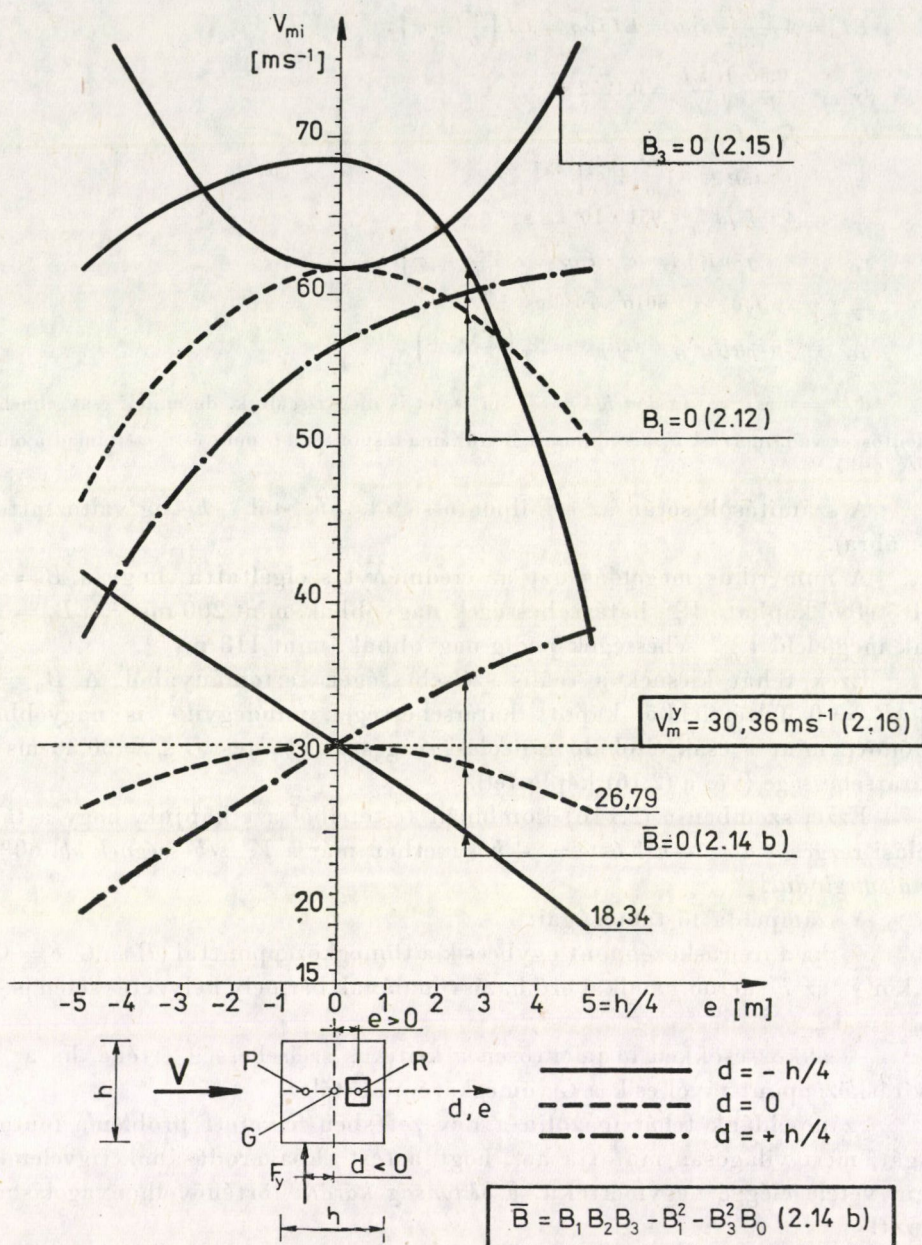
— ha a nyírasközéppont egybeesik a tömegközépponttal ($R \equiv G, e = 0$), akkor — az F_y aerodinamikai erő hatásvonalának bármely helyzete esetén is — $V_m^{y,\Theta} = V_m^y$,

— akkor csökken le jelentősen a kritikus szélesebesség értéke, ha az R nyírasközéppont távol esik a G tömegközépponttól.

Számpéldánk tehát igazolja a Bevezetésben felvetett probléma fontosságát, mert világosan mutatja azt, hogy a test elcsavarodásának figyelembe nem vétele eléggé nagymértékű, a biztonság kárára történő elhanyagoláshoz vezet.

4. Összefoglalás

A „táncolás” (galloping vibration) jelenségét megvizsgálták [4], [5] egy szabadságfokú, ill. folytonos modell esetében, de az elemzések során csak a szélesebességre merőleges síkban lejátszódó hajlító rezgést vették figyelembe.



4. ábra

Cikkünkben meghatároztuk a *kapcsolt hajlító-csavaró* „táncolási” rezgést létrehozó szélesebességek kifejezéseit, melyek közül a legkisebb a mértékadó.

Megállapítottuk, hogy az elcsavarodás figyelembevételével számítható határsebesség értéke — a test csillapítási, geometriai és rugalmassági tulajdonságaitól függően — kisebb is lehet, mint a tiszta hajlítás „táncolási” rezgést végző rendszer határsebessége. Ez azt jelenti, hogy az elcsavarodás következtében a rendszer az eddig feltételezettnél *kisebb szélesebességnél* is „galloping” rezgésbe jöhet.

Vizsgálataink szerint a kritikus szélesebesség annál kisebb, minél távolabb esik a nyírasközéppont a tömegközépponttól.

IRODALOMJEGYZÉK

1. DEN HARTOG, J. P.: Mechanical Vibrations. 4th Ed. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N. Y., 1956
2. FRANK, PH.—v. MISES, R.: Die Differential — und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. I. Mathematischer Teil. 2. Aufl. Dover (New York) — Vieweg (Braunschweig) 1961, 204
3. KOLLÁR, L.: Magas építmények rezgései a szél hatására. BME Továbbképző Intézete. Budapest, 1970
4. NOVAK, M.—DAVENPORT, A. G.: Aeroelastic Instability of Prisms in Turbulent Flow. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, February, 1970, 17—39
5. NOVAK, M.: Aeroelastic Galloping of Prismatic Bodies. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, February, 1969, 115—142
6. SCRUTON, C.—FLINT, A. R.: Wind-excited Oscillations of Structures. *Proc. Inst. Civ. Eng. London*, 27, 1964, 673—702
7. TIMOSHENKO, S.—YOUNG, D. H.: Vibration Problems in Engineering. Third Ed. D. Van Nostrand Co., Inc. Princeton (New Jersey) Toronto (London) Melbourne, 1955

The Minimal Wind Velocity Causing Coupled Bending-Torsional Galloping Vibration of a Rigid Body. The phenomenon of galloping vibration was investigated by several authors, on models of one degree of freedom and on continuum models, respectively. In these investigations, however, only the bending vibration in the plane perpendicular to the wind direction was taken into account. In this paper, formulae for the wind velocity causing coupled bending-torsional galloping vibration have been developed, when the lowest value of velocity is to be regarded as the critical one. It has been established that depending on the geometrical, elastical and damping properties of the body, the critical velocity computed for a system capable of torsion may be lower than that computed for the same system when torsion is prevented. That is a galloping vibration can occur at wind velocities lower than those established before. The critical wind velocity has been found reducing, if the shear and the mass centers move off each other.

Die “Galloping”-Schwingung eines steifen Körpers von zwei Freiheitsgraden anlassende kleinste Windgeschwindigkeit. Die Erscheinung der “Galloping”-Schwingung wurde im Falle eines Modells von einem Freiheitsgrad, bzw. eines kontinuierlichen Modells untersucht, jedoch im Laufe der analitischen Untersuchung wurde nur die in der auf die Richtung der Windgeschwindigkeit senkrechten Ebene ablaufende Biegeschwingung in Betracht genommen. In diesem Aufsatz wurden die Ausdrücke der konjugierten Biege-Verdrehungs-“Galloping”-Schwingung hervorruhenden Windgeschwindigkeiten ermittelt, wovon die kleinste die massgebende wird. Es wurde festgestellt, daß der Wert der unter Berücksichtigung der Verdrehung gerechnete Grenzgeschwindigkeit — in der Abhängigkeit der Dämpfungs =, geometrischen und elastischen Eigenschaften des Körpers — auch niedriger sein kann, als die Grenzgeschwindigkeit eines Systems, welches eine reine Biege-“Galloping”-Schwingung führt. Nach den Untersuchungen des Autors gilt es, daß je weiter der Schubmittelpunkt von dem Massenmittelpunkt liegt, desto niedriger wird die kritische Windgeschwindigkeit.

A HAZAI LIGNITVAGYON ERŐMŰVI FELHASZNÁLÁSÁNAK KÉRDÉSÉHEZ

REMÉNYI KÁROLY*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1978 március 13.-án]

A hazai lignitvagyon hasznosításakor a lignit éghetőtartalmának, nedvességtartalmának és hamutartalmának együttes viselkedését kell figyelembe venni. A lignit éghető része jelentős xilitmennyiséget tartalmaz, amely rosszul őrlhető. A hamutartalom rontja a gyulladási viszonyokat és mind a malomnál, mind pedig a kazánberendezésben jelentős kopást okoz. A nedvességtartalom az őrlési gyulladási és korróziós viszonyokat kedvezőtlenül befolyásolja. Félig nyíltciklusú szénpor és fluidizált kombinált tüzeléssel mind a nedvességtartalom mind a hamutartalom káros hatásai jelentősen csökkenthetők.

Bevezetés

A hazai lignitvagyonunk hasznosítása alapvetően nagy erőművi kazánberendezésekben való eltüzeléssel történhet. E területen igen nagyszámú vizsgálat, gazdag tervezési, üzemeltetési és kutatási tapasztalat áll rendelkezésre és igen jelentős az a szakembergárda, amely a bányászat és az erőművi felhasználás egyes területein kiművelődött. A különböző szakterületeken igen sok szempontból számos, színvonalas értékelés látott napvilágot, amelyek igazolják, hogy a hazai tapasztalatokat figyelembe véve, a biztonságos hasznosítás megvalósítható. A következők néhány, elsősorban tüzeléstechnikai vonatkozású olyan észrevételt tesznek, amelyek a lignittüzelés kedvező feltételeinek megvalósításához járulnak hozzá.

A lignit összetételének szerepe

A tüzelőanyag értékelésekor alapvetően éghetőtartalmának, nedvességtartalmának és hamutartalmának az előkészítés és a tüzelés közbeni viselkedését kell vizsgálni. Az észak-magyarországi lignitek éghető része a származási hely mélységének növekedésével növekvő fűtőértéket és karbontartalmat mutat. A Gagarin Hőerőmű létesítését megelőző fúrásmintánál az összetételt a következő 1. táblázat szemlélteti.

Az éghetőtartalomban jelentős hányadot képvisel a xilit, amelynek főbb alkotói a cellulóz, a lignin, a huminsav, a karbon és a hidrogén. A viszontai

* Reményi Károly, 1014 Bpest, Úri u. 38

1. táblázat

	n	h	C	H	N	O	S _{égh}	É/kcal/kg	F/kcal/kg
	%								
Felső réteg	45,8	27,4	16,0	1,6	0,3	8,3	0,3	1593	1252
Középső réteg	31,5	35,7	20,0	1,8	0,4	9,1	1,2	1990	1717
Alsó réteg	27,5	15,7	36,7	3,0	0,7	15,5	0,5	3513	3189

Hamu összetételi adatok

(%)	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	SO ₂	SiO ₂
Felső réteg	7,1	20,5	5,4	1,9	3,9	59,9
Középső réteg	10,3	19,4	5,4	2,8	3,7	56,6
Alsó réteg	5,5	13,7	14,9	3,6	8,3	52,2

lignit átlagos xilittartalma eléri a 13,3%-ot, amely szerkezetére nézve szálas, fás szerkezetű és összetételére nézve három főbb csoportba sorolható.

2. táblázat

Átlagos xilittartalom	13,3%
szárazanyagra	
szélsőértékek	1 — 84%
világos xilit	5%
sötét xilit	30%
meta xilit	65%

3. táblázat

A xilitfajták kémiai jellemzői

	Cellulóz	Lignit	Huminanyag	Carbon	Hidr.
	%				
Világos xilit	12	76,7	11,3	65,8	5,2
Sötét xilit	11,8	80,5	7,7	64,0	5,72
Meta xilit	6,7	79,5	13,8	64,1	4,83

Az éghető részek gyulladási hőmérsékletét a Godbert—Greenwald módszer szerint meghatározva a 4. táblázatba foglalt értékeket állapították meg.

4. táblázat

Gyulladási hőmérséklet °C

	Levegő	Levegő és nitrogén 1 : 1 arányú keveréke
Metaxilit	568	800
Sötét xilit	658	800
Világos xilit	653	800
Nyerslignit	558	758

A gyulladási hőmérsékletértékek alapján megállapítható, hogy a gyulladás viszonylag magas hőmérsékleteken következik be, ezért a tüzelő berendezés kialakításakor és a tüzelési rendszer megválasztásakor azt messzemenőleg figyelembe kell venni, mert mint a táblázat mutatja, az oxigénkoncentráció csökkenésével a gyulladás hőmérséklete jelentősen nő. A táblázatban közölt értékek minőségi értékeléskor jó támpontot adnak. Ha azonban a teljes égésfolyamatot szemléljük még további alapvető megállapítást tehetünk a kedvező tüzelési feltételek megvalósításához.

A gyulladás a tüzelőanyag fizikai-kémiai tulajdonságainak és a környezeti viszonyok kölcsönhatásának együttes eredőjeként jön létre.

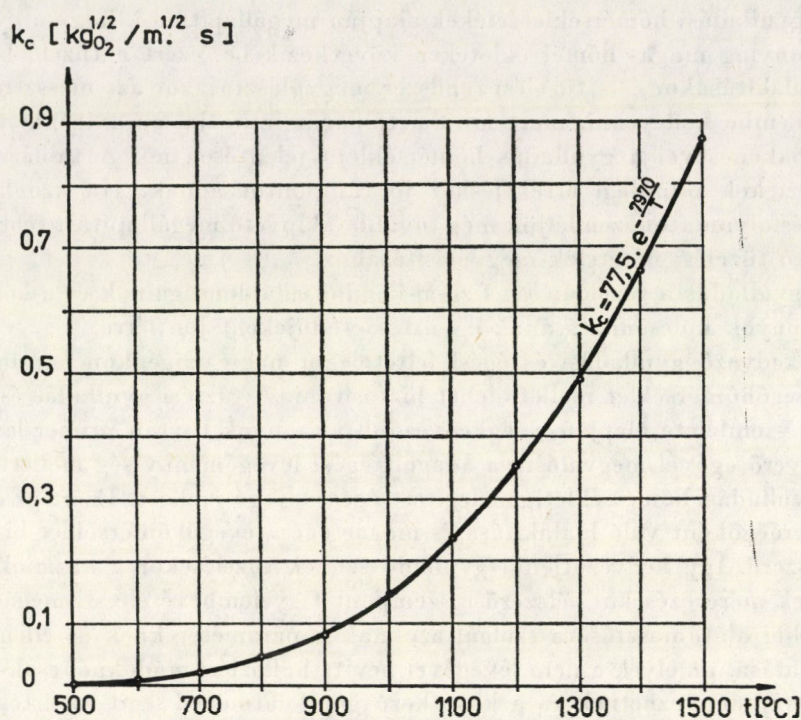
A kedvező gyulladási és égési feltételeket nagy oxigénkoncentráció és nagy levegőhőmérséklet mellett lehet biztosítani. A tűztéri gyulladás és égés komplex szemlélete alapján a legkedvezőbb viszonyok tisztán primer levegőként, keverő égővel megvalósítva adagolt égési levegőmennyiség mellett várhatók, gyulladási hőmérsékletig melegített égési levegő mellett. Ezért az égőknek keverőégőként való kialakítása és magas égési levegőhőmérséklet biztosítása célszerű. Így kedvezőtlenül gyulladó szenek tüzelésekor a kazánok léghevítőinek méretezésekor célszerű e szempont figyelembevételével. E megállapítás további alátámasztására szolgál azoknak a paramétereknek az ellentétes irányú hatása, amelyek a nem levegővel bevitt hőközlési módoknál csak optimumot eredményezhetnek és a következő gondolatmenet segít az értékelésben. Ha a tüzelőanyag a gyulladási hőmérsékletnél alacsonyabb hőmérsékleten jut a tűztérbe, akkor a gyulladáshoz szükséges hőközlés alapvetően két módon történhetik:

- sugárzás,
- forró égéstermékek visszakeveredése.

A sugárzásos hőközlés különösen ilyen nagy térfogatú sugarak esetében csak a felületi rétegre korlátozódik és a tapasztalat szerint a visszaáramlás jelentősége nagyobb. Visszaáramláskor a gyulladási és az égési viszonyokat befolyásoló ellentétes hatások:

- a turbulens gyulladási sebesség változása,
- a visszaáramló égéstermékek (N_2 , CO_2 , H_2O stb.) befolyása a hőközlés és a gyulladás szempontjából,
- a visszaáramló gázban az égési fázisban levő lángelemek gyulladási góccokat képeznek (ez kedvező),
- a recirkulációs zóna méretének szerepe.

A gyöngyösi lignitnek gyulladás utáni jellemzésére, forró levegőben való égésére laboratóriumi körülmények között végeztek kísérleteket. A kísérletekkel empirikus, a reakciómechanizmus váltásokat elhanyagoló az 1. ábrán látható közelítő összefüggés volt megállapítható az Arrhenius egyenlet alapul vételével:



1. ábra. A visontai lignit reakciósebességi állandója a szénszemcse-hőmérséklet függvényében[1]

$$k_c = A \cdot \exp - \frac{E}{RT}$$

ahol — E — az aktiválási energia
 R — univerzális gázállandó
 T — az égés hőmérséklete; K
 A — frekvenciafaktor, állandó.

A lignit hamutartalma mind a tüzelőanyag előkészítésben, mind a tüzelésben továbbá a tüzelőberendezés üzemeltetésében jelentős gondot okoz. Jelentős problémák merülnek fel a tüzelőanyag szállításánál, az aprításnál, a gyulladásnál, a kazánszabályozásnál, a salakosodással kapcsolatosan, a malom és a szénporvezetékek kopása folytán, a kazánberendezés egyes elemeinek kopásával és a salakeltávolítás rendszerében. A magas hamutartalom, továbbá az igen erőteljes változás okozta problémák mellett mégis nyomatékosan rá kell mutatni arra, hogy nem szabad csak a hamutartalom káros hatásának egyoldalú szemléletében értékelni a lignittüzeléskor keletkező problémákat, mert kedvező feltételeket teremteni az éghető tulajdonságai, a xilit hatása, a hamu tulajdonságai és a nedvesség káros hatásának együttes figyelembevételével kialakított berendezéssel lehet.

A következőkben a hamutartalom hatását csak a tüzelőberendezés és a tüzelés szempontjából, nevezetesen az őrlési gyulladási, a salakosodási és kopási viszonyok figyelembevételével értékeljük.

A gyöngyösi lignitnél a tényleges, üzemi viszonyok közötti aprításkor a két alkotó, a hamu és a xilit ellentétes aprítási tulajdonságai a meghatározók. A viszonylag jó őrlhetőségi tulajdonságú hamu a szívós jellegű, fás szerkezetű xilittel együttesen őrlve a hamu felesleges túlőrléséhez vezet. A laboratóriumi őrlhetőségi vizsgálatoknál a Hardgrove index azt mutatta, hogy a hamutartalom növekedésével az őrlhetőség javul. Az őrlhetőségi tényezőről nem szabad azonban mechanikusan a tüzelési rendszerbe épített malom teljesítményére következtetéseket levonni. Figyelembe kell venni, hogy melyik komponens változása javítja az őrlhetőséget, és melyik komponens aprításának figyelembevétele szükséges a tüzelés szempontjából. Ha az éghető anyagtartalom növekedésével javul az őrlhetőségi tényező, akkor egyértelműen kedvező a szén viselkedése a malomteljesítmény szempontjából. Lignit esetében az éghetőtartalom jelentős xilit mennyiséget is magában foglal, amely nehezen őrlhető. Az üzemi malomberendezésen végzett kísérletek azt mutatták, hogy a szénminőség romlásával, a hamutartalom növekedésével a malmok terhelhetősége jelentősen csökken. Az 1 mm fölötti frakciókban a xilit, különösen a világos xilit részaránya 40% fölötti értéket ér el. Mivel a tüzelés szempontjából az éghető részek aprítására kell figyelemmel lenni, a hamutartalmat viszont azzal együtt kell őrlni, a nehezen őrlhető rész a meddő túlőrlését vonja maga után. A hamutartalom növekedésével a malom szárítógázigénye is csökken, a malom szárítógáz szénpor koncentráció növekszik, ami további malomteljesítmény csökkenést eredményez.

A finomra őrlt meddő a tüztérbe jutva kedvezőtlenül befolyásolja a gyulladási viszonyokat, továbbá salakosodáshoz vezethet. A Gagarin Hőerőmű kazánjainál lényeges salakosodási probléma tisztán lignittüzelésnél nem lép fel, csak annak következtében, hogy a változó szénminőség miatt olaj támasztótüzelést kell állandó jelleggel üzemben tartani. Ezen égők környezetében kialakuló magas hőmérsékletnél már különösen a finomabb frakciók elérik a ragadósági hőmérsékletet és a hűtetlen falrészekeken megtapadnak.

A nagy hamutartalom kedvezőtlen hatása viszont fokozott mértékben jelentkezik a tüzelőberendezés és a kazánberendezés egyes elemeinek kopásánál. A malomnál a teljes vasfelhasználódás 100–120 g/t_{szén} értékre tehető és az effektív nettó vas kopás 40–50 g/t_{szén} értéket tesz ki. Még erőteljesebben kihat a kazán üzembiztonságára a kazánberendezés csőelemeinek intenzív kopása. A gyöngyösi lignit átlagosan 38,6%-os szárazanyagra vonatkoztatott hamutartalmában 48,5% az SiO₂. A kopások legnagyobb mértékben a kazán második huzamában elhelyezett fűtőfelületeknél, elsősorban a vízhevítőnél jelentkeznek. A koptató hatást a tüzelés is jelentősen befolyásolja. Az alacsony tüztérhőmérséklet esetében a szénszemcse kiégése után visszamaradó pernye

éles sarkú és így koptató hatása nagyobb. Magasabb, de még nagymértékű salakosodást nem okozó tüztérhőmérsékletnél a pernyeszemcsék éles sarkai lekerekednek, a koptató hatás is csökken. A lignit hamuösszetétele és a tüzelési mód mellett a pernye szemcseméretösszetétele, az áramlási sebesség és a pernye-koncentráció jelentősen befolyásolják a koptató hatást. Laboratóriumi körülmények között A 00.22 minőségű sík lapra 45° beesési szöggel végzett kopási kísérletek eredményeit a 2., 3. és 4. ábrák mutatják [3]. A végzett kísérleteknél a bükkábrányi szén pernyéjénél a finomabb frakció hipotetikus szemcsemérete $200\ \mu\text{m}$, a durvábbé $240\ \mu\text{m}$, a gyöngyösi lignitnél $240\ \mu\text{m}$, illetve $330\ \mu\text{m}$ volt. A vizsgálatok mutatják, hogy a helyi sebességsúcsok elkerülése és a hamutartalom csökkentése javítja a kopási viszonyokat. A diagramon az elkoptatott m anyagmennyiség a kopási sebességhez viszonyítva került értékelésre.

A tüzelőanyag nedvességtartalma által okozott problémákat az utóbbi időben kevésbé tárgyalják. Pedig a nagy hamutartalom és nedvességtartalom együttes hatásaként lépnek fel a lignit hasznosítás nehézségei és az egyoldalú szemlélet helytelen következtetések levonására vezethet. A nedvesség gondot okoz a szállításkor, az aprításkor, a gyulladáskor a szénporban maradó és tüztérbe kerülő nedvesség együttesen, a kopáskor és az utófűtőfelületek korróziójánál is. A következők röviden csak az aprításkor és a tüztéri viszonyokra gyakorolt hatásról szólnak. A tüzeléshez való szénporrelőkészítés első alapvető szakasza a szárítás, amely a malomban való őrléskor a szárító gázokkal történik. A szárításkor létrejövő folyamatok a szén és a nedves gázok együttes rendszerének egyensúlyi állapotának megismerésén keresztül lehetségesek.

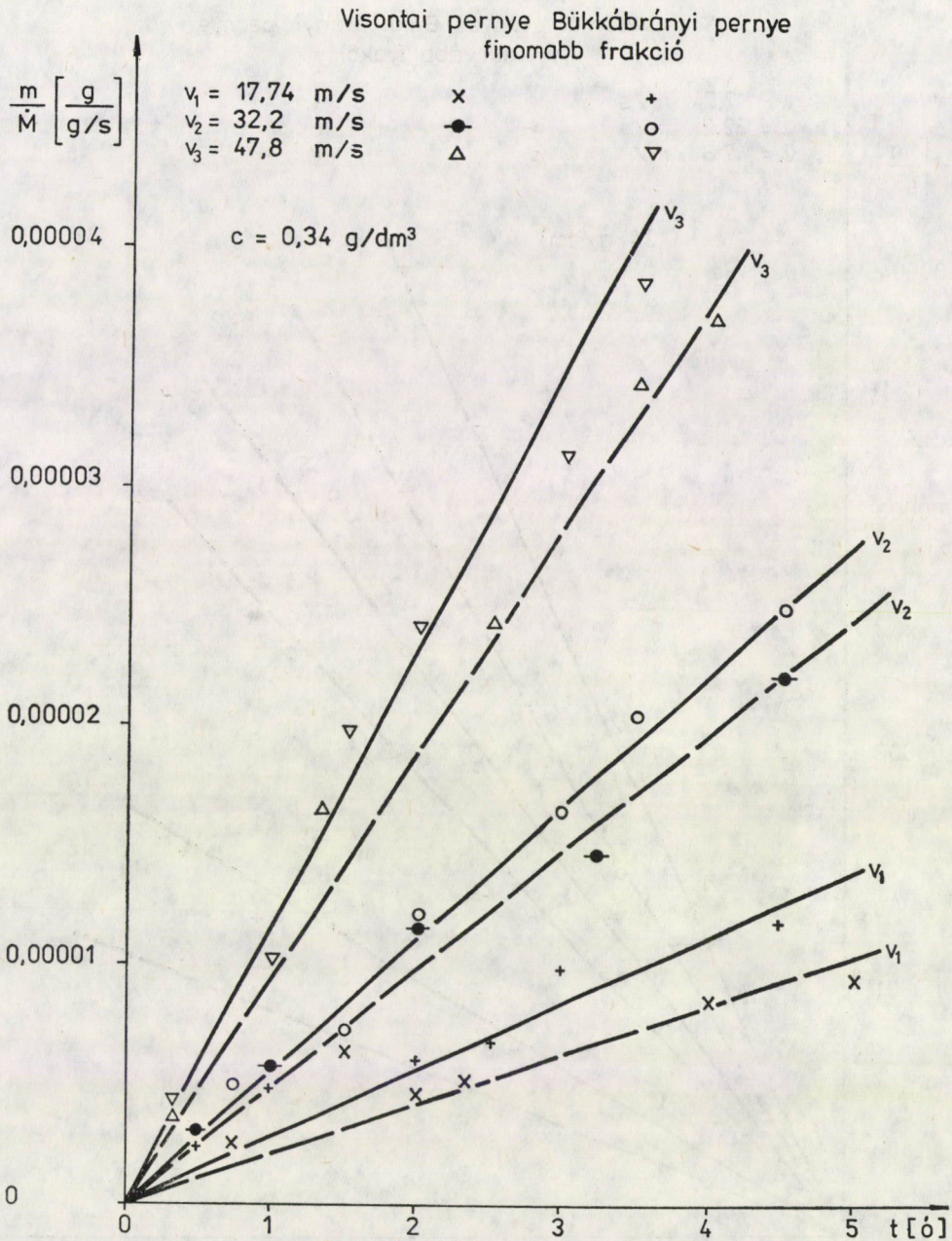
A szén—vízgőz rendszernél az eredeti szén nedvességtartalmát ismerve, kiszámítható a szén különböző vízgőz nyomásokkal egyensúlyban levő nedvességtartalma.

Az izotermák több hőmérsékleten való mérésével az izoszter szorpciós hők kiszámíthatók a Claudius—Clapeyron egyenlet felhasználásával

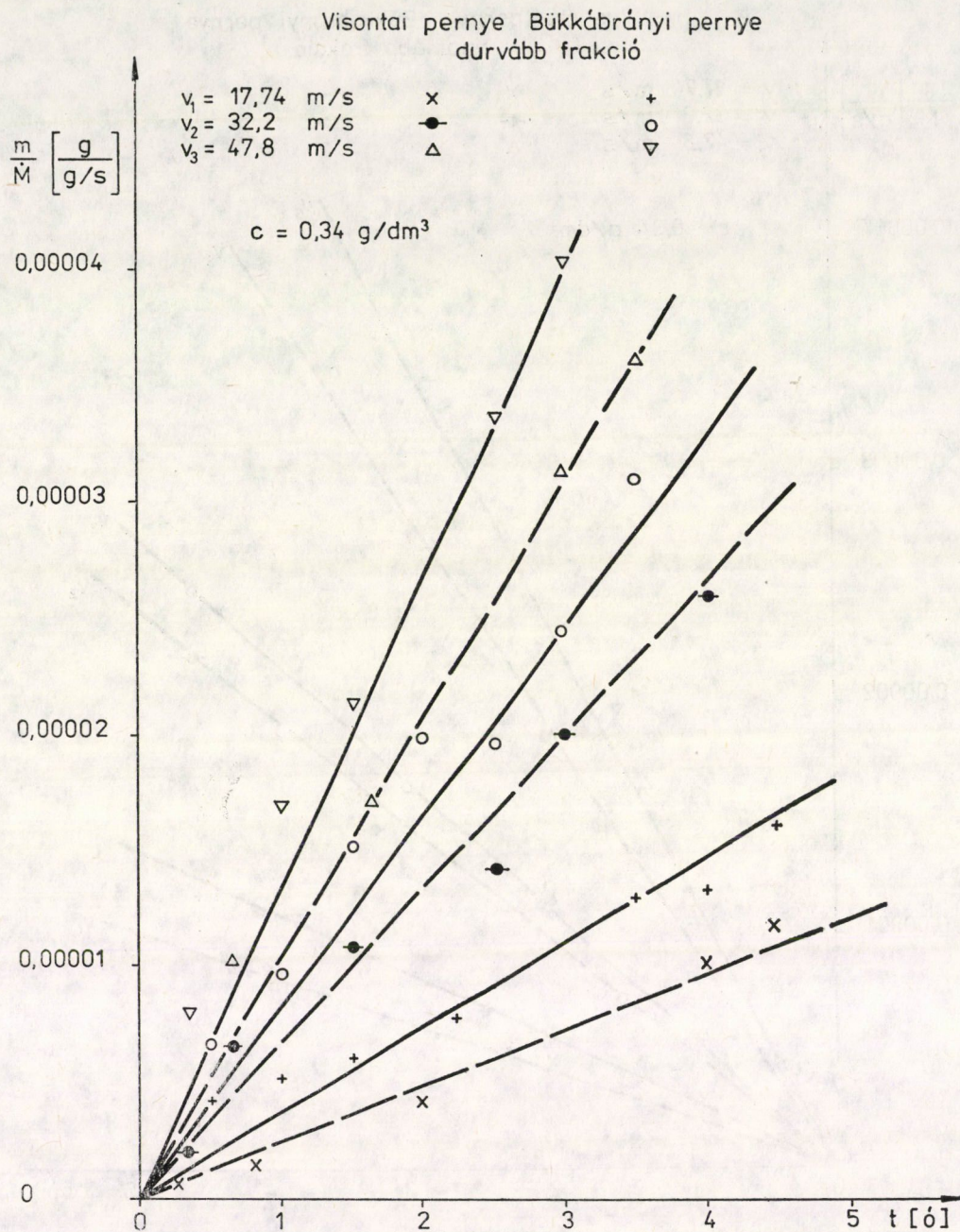
$$\left[\frac{\partial \ln p}{\partial T} \right]_v = q_{st}/RT^2 ,$$

ahol q_{st} az izoszter szorpciós hő állandó v fedettség mellett. Integrált alakjában ez az egyenlet arra az eredményre vezet, hogy az $1/T$ függvényében felrakott $\log p$ görbe hajlását bármely fedettségre $-q_{st}/2,303 R$ adja meg, továbbá, hogy ha a szorpciós hő lényegében független a hőmérséklettől egy adott fedettségénél, a görbének lineárisnak kell lennie.

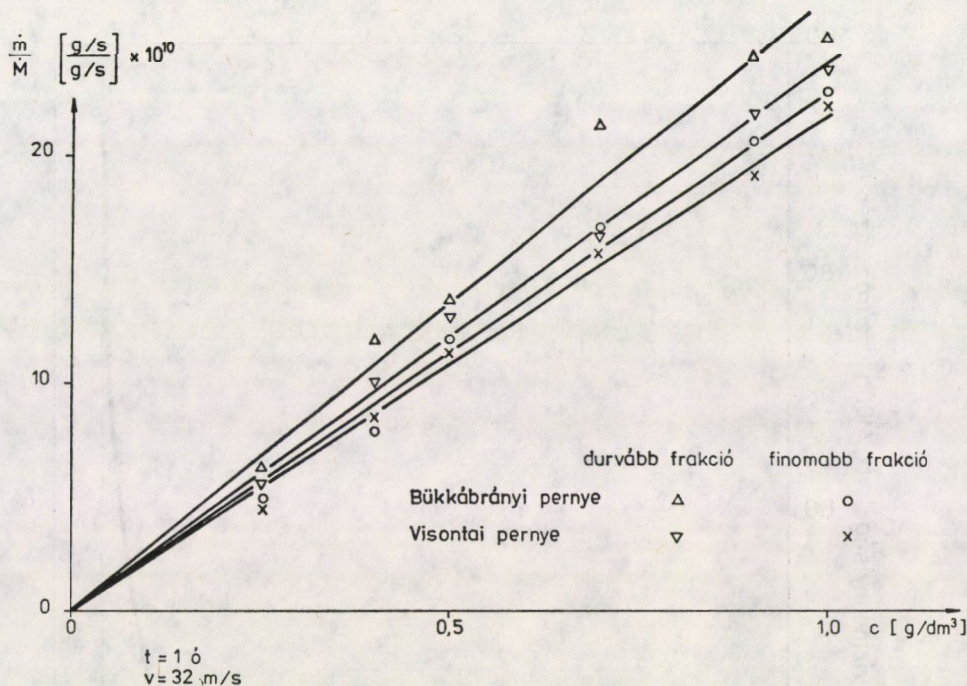
A vizsgálatok azonban azt mutatták, hogy „nedvesség tartalom” függeni fog attól a hőmérséklettől, amelyen a meghatározást végeztük. Eszerint egy adott hőmérsékleten legalább kétféle víz kapcsolódik a szénhez. Először is a gyengén kötődő víz, amely eltávolítható izotermikus evakuálással, másodszor



2. ábra. A visontai és bükkábrányi pernye által elkoptatott anyagmennyiség változása az idő függvényében (finomabb frakció) [3]



3. ábra. A visontai és bükkábrányi pernye által elkoptatott anyagmennyiség változása az idő függvényében (durvább frakció) [3]



4. ábra. Az elkoptatott anyagmennyiség változása a pernyekonzentráció függvényében [3]

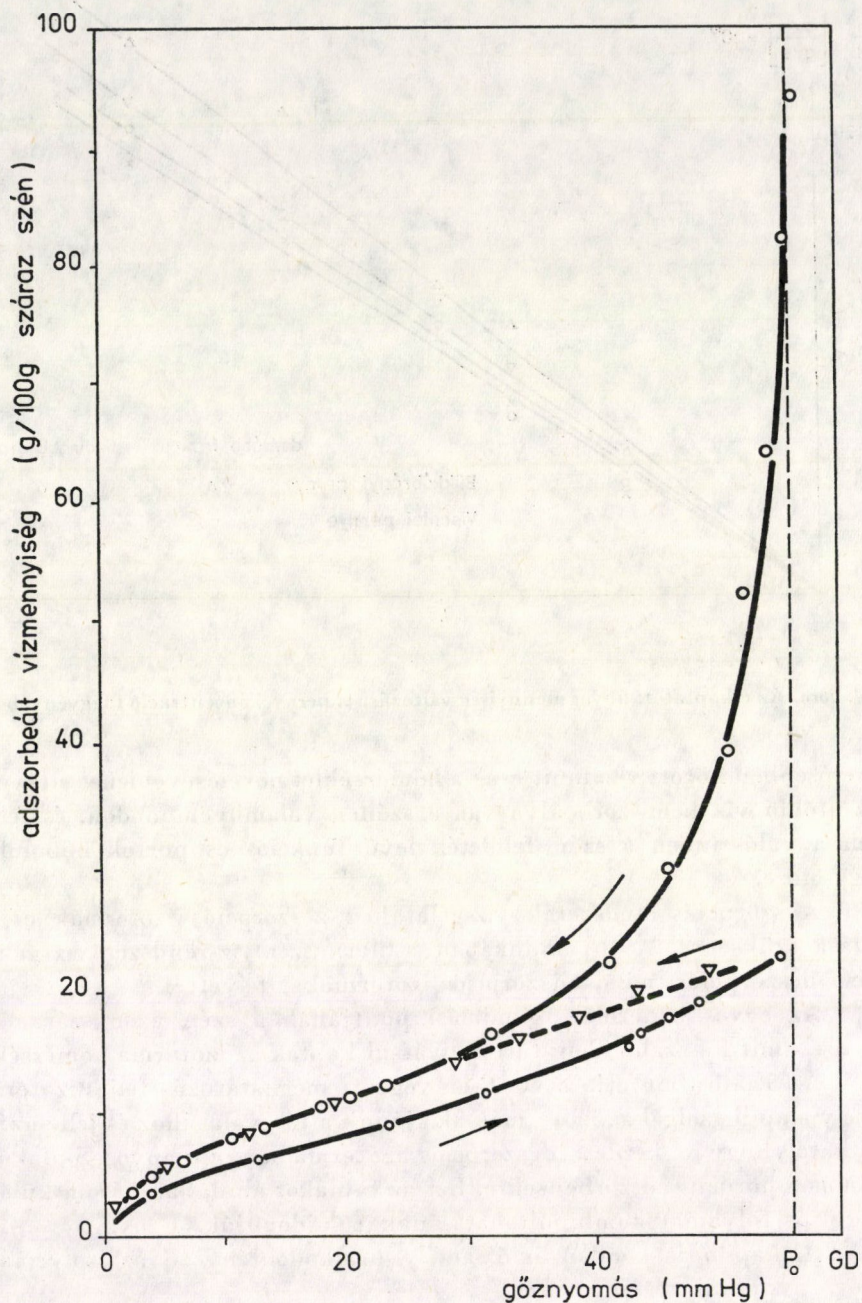
az erősebben kötött víz, amit csak a hőmérséklet növelésével lehet eltávolítani. Ez utóbbi víz kemiszorbeálva van a szénen valamilyen módon, és felszabadulása valószínűen a szén felületén levő funkciók csoportok hőbomlásával függ össze.

A szorpciós rendszerek vizsgálatához a szorpciós izotermák meghatározása szükséges. A [6] munkában a barnaszén/víz-rendszer vizsgálatához mind deszorpciós, mind adszorpciós izotermákat felvettek.

Az egyes izotermák kiindulási pontjának a szén azon száraz súlyát vették, amit hosszabb ideig tartó szívással kaptak az izoterma hőmérsékletén.

Az 5. ábra mutatja a 40 °C-on végzett meghatározás teljes izotermáját, amely alapul szolgál az izotermák alakjának a tárgyalásához és jellemzéséhez. Látható, hogy a kezdeti deszorpciós izoterma a szabványos S-alakú, ami tipikus a porózus adszorbensekre. Ezt az S-alakot általában három különböző szorpciós folyamat kombinált hatásának tulajdonítják. Ezek:

- (1) kapilláris kondenzáció, amely uralkodó tényező az izoterma felső konkáv részében.
- (2) Többréteges kondenzáció, amely felelős az egyenes vonalú szakaszért az izoterma középső szakaszán.
- (3) Monomolekuláris szorpciós réteg, amely az izoterma alsó konvex részében fordul elő, ahol a vízgőz nyomása zérushoz közeledik.



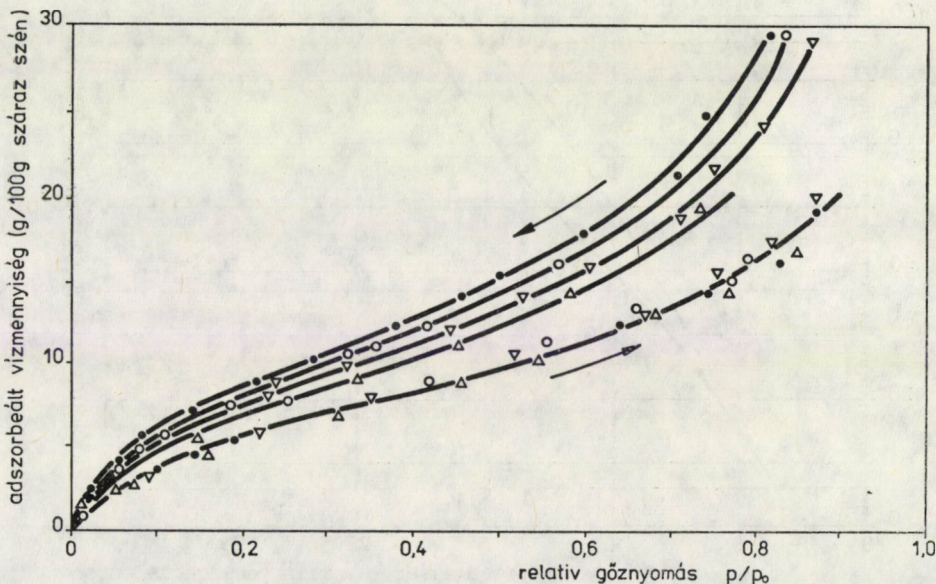
5. ábra. A teljes deszorpciós és readszorpciós izotermák a vízgőz parciális nyomásának függvényében 40 °C hőmérsékleten [6]
 ○ első deszorpció; ● readszorpció; ▽ második deszorpció

Az 5. ábra mutatja, hogy kifejezett különbség van a 40 °C-os izoterma deszorpciós és readszorpciós ágainak az útjai között. Ilyen hiszterézist gyakran figyeltek meg szorpciós rendszerekben. A hiszterézis kiterjed egészen olyan nyomásokig lefelé, amelyek sokkal alacsonyabbak annál, ahol kapilláris kondenzáció működhethet. Ez a kis nyomás hiszterézis a legnagyobb valószínűség szerint azzal a duzzadással és zsugorodással függ össze, ami a barnaszén/víz-rendszerben az adszorpcióval, illetve deszorpcióval következik be.

A 6. ábra valamennyi izotermát a relatív gőznyomás függvényében felrakva mutatja, a gőznyomás helyett, és nagyobbított víztartalom skálával.

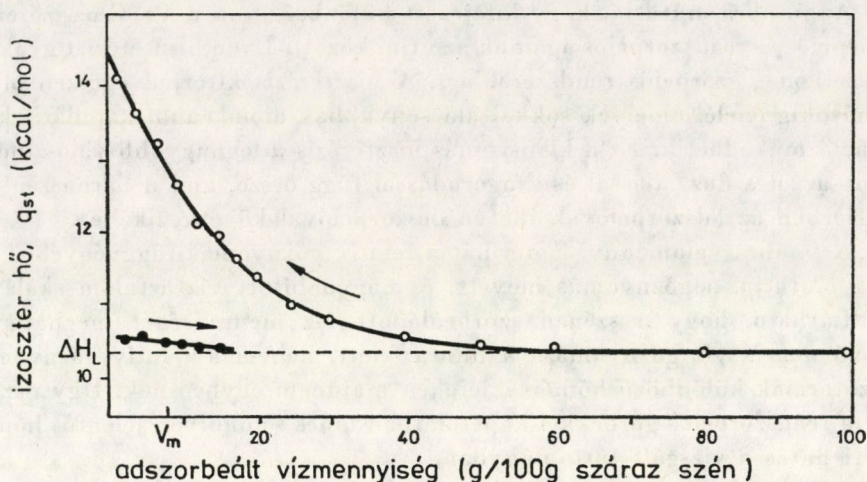
Látható, hogy a szénen szorbeálódott víz mennyiségét meghatározó változó nem a víz gőznyomása a minta felett, hanem a relatív gőznyomás. Az izotermák különböző hőmérsékleteken majdnem egybeesnek. Úgy néz ki, hogy a readszorpciós görbékkel kapcsolatban nincs semmilyen jelentős hőmérsékleti hatás a vizsgált tartományban.

Itt is rá kell mutatni egy olyan jelenségre, amely felületesen értékelve ellentmondást jelentene az üzemi malmoknál tapasztaltakkal. Az üzemi méréseken azt tapasztaljuk, hogy a malom utáni őrlemény nedvességtartalma a malom utáni hőmérséklet egyértelmű függvénye. Ez azzal magyarázható, hogy a malomban rendelkezésre álló esetleg néhány másodperc alatt nem jut el a szárítógáz—szén rendszer az egyensúlyi állapotig, tehát a hőmérséklet növekedésével, mivel a száradási sebesség viszont nő, a szén leszáradás mértéke is növekedik. A malom utáni hőmérséklettel jellemezhető hőmérséklet

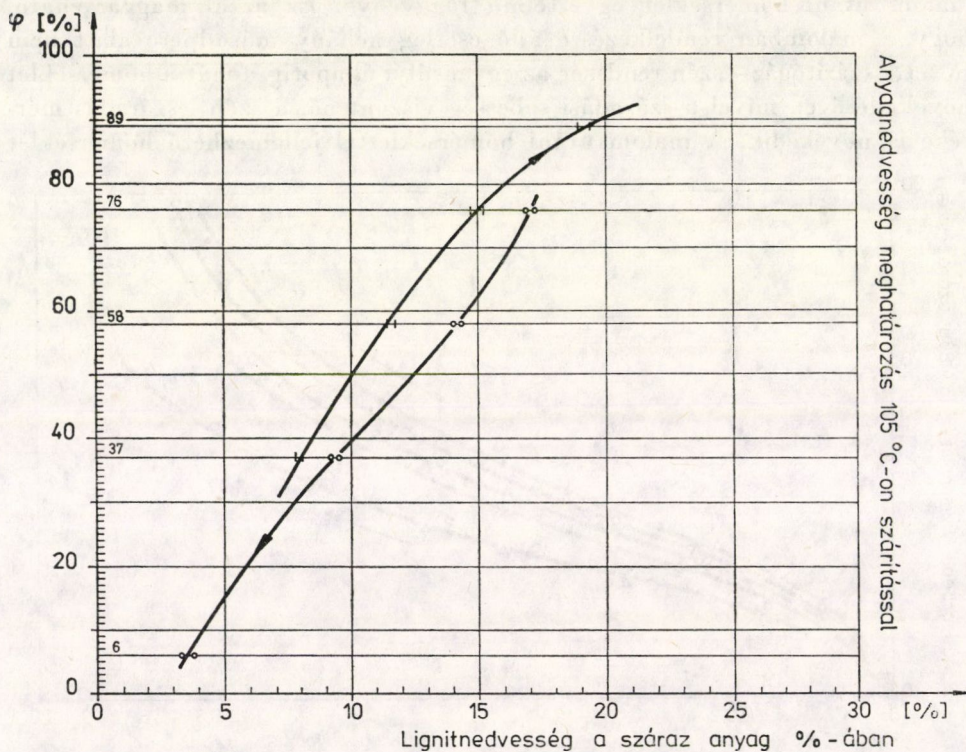


6. ábra. Különböző hőmérsékleten felvett adszorpciós izotermák a relatív gőznyomás függvényében [6]

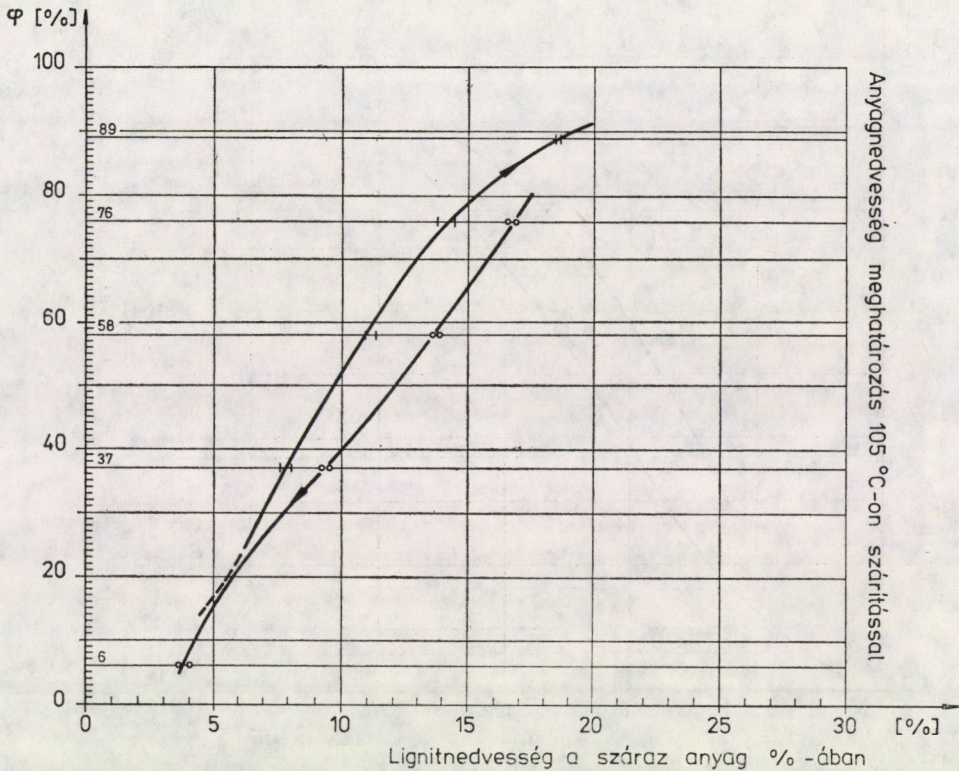
□ 30 °C; ○ 40 °C; ▽ 49 °C; △ 60 °C



7. ábra. A szorpció hő változása gőz-barnaszén rendszerénél a nedvességtartalom függvényében [6]; deszorpció; readszorpció; a folyadék víz elgőzölgesi hője



8. ábra. A gyöngyösi átlaglignit adszorpció és deszorpció izotermái 105 °C-on való szárítással meghatározva. A lignitnedvességtartalom változás, a száraz anyag %-ában kifejezve a környezeti relatív nedvességtartalom (φ) függvényében [8]

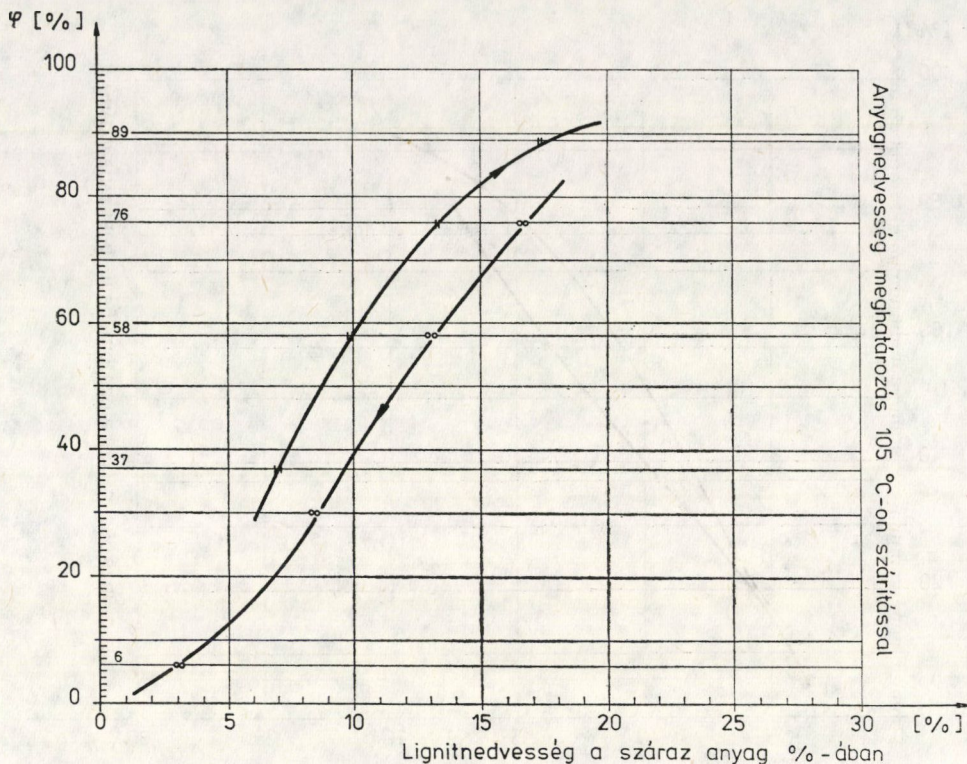


9. ábra. Ua. mint 8. gyöngyösi szén xilit-mentes része

növelés, tehát hasznos eszköz a száradás növeléséhez. E mellett a hőmérséklet-hatás mint említettük a szén zsugorodási viszonyait befolyásolja, tehát az aprítási viszonyokat is, amely kedvező a szárítás szempontjából. E mellett igen fontos következtetésre ad lehetőséget a relatív gőznyomás alapvető szerepének felismerése abból a szempontból, hogy a szén aprításakor felhasznált szárító gázként minél kisebb gőztartalmú gázt célszerű felhasználni. A szén száradási viszonyai ezzel kedvezően befolyásolhatók.

A száradási hőigény meghatározásához a szorpciós hőket megkaphatjuk szorpciós rendszerekre, ha megszerkesztjük az izosztereket (egyensúlyi gőznyomás a hőmérséklet függvényében állandó fedettségénél) és felrakjuk őket a Clausius—Clapeyron egyenlet alapján ($\log p$ $1/T$ függvényében). Az izoszter szorpciós hő kiszámítható ezekből a grafikonokból, minthogy a Clausius—Clapeyron kifejezés szerint az egyenes hajlását a $(-q_{st}/2,303 R)$ összefüggés adja meg.

A Clausius—Clapeyron egyenlet egyik alapvető feltételezése, hogy csak olyan rendszerekre vonatkozik, amelyek termodinamikailag reverzibilisek.

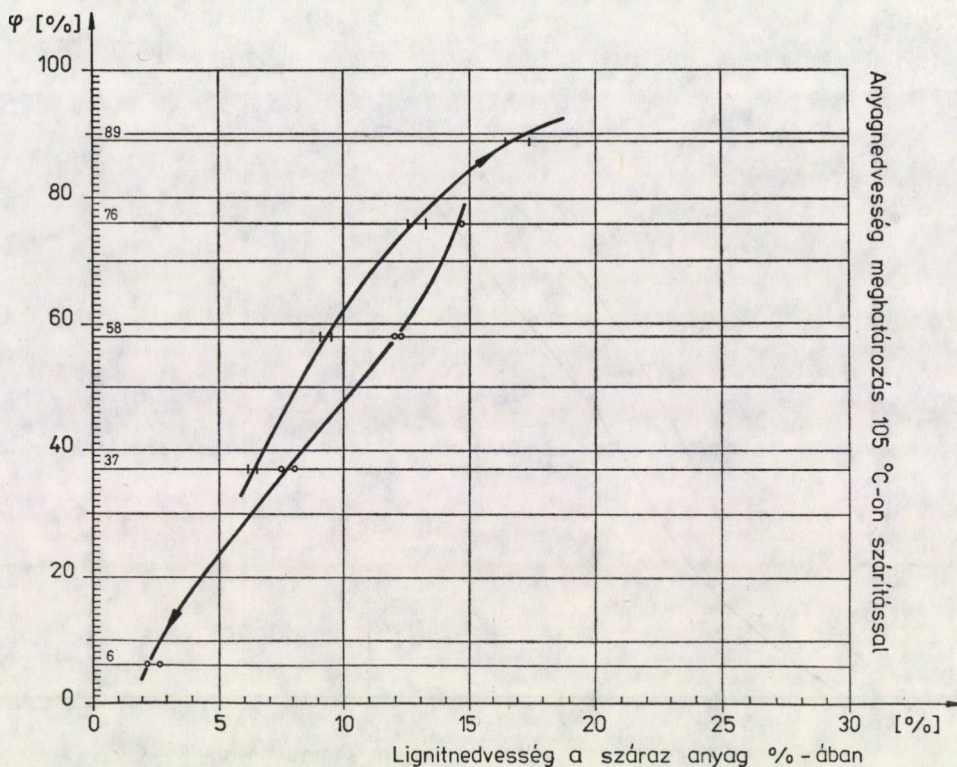


10. ábra. Ua. mint 8. gyöngyösi világos-xilit

Lehet-e alkalmazni hiszterézist mutató izoterma adatokra, mert az ilyen izotermák egyensúlyi pontok egy sorozatát képviselik, termodinamikailag nem reverzibilisek a hiszterézis területén. Ez arra mutat, hogy hasznos munka megveszendőbe egy hiszterézis hurok ciklus teljessé tételében és ennek következtében a differenciális kalorimetriás és izoszterikus szorpció hői nem ekvivalensek.

Azonban kísérletileg kimutatták, hogy a különbség e között a két mennyiség között kicsi (néhány százalék). Az izoszter deszorpció hő a 7. ábra szerint megközelítően egyenlő a víz párolgási hőjével egészen kb. 60 g/100 g száraz szén-víz-tartalmakig lefelé. Ez a hő mutatja, hogy az ezen a területen deszorbeálódott víz semmiképpen sem kapcsolódik a szénhez. A 60 és kb. 15 g víz/100 g száraz szén közötti területen a deszorpció hő 10,4 kcal/mol-ról fokozatosan 11,9 kcal/mol-ra nő. Az izoszter hő ezen növekedését a víz a fokozatosan kisebb kapillárisokból vagy pórusokból való deszorpciójának lehet tulajdonítani.

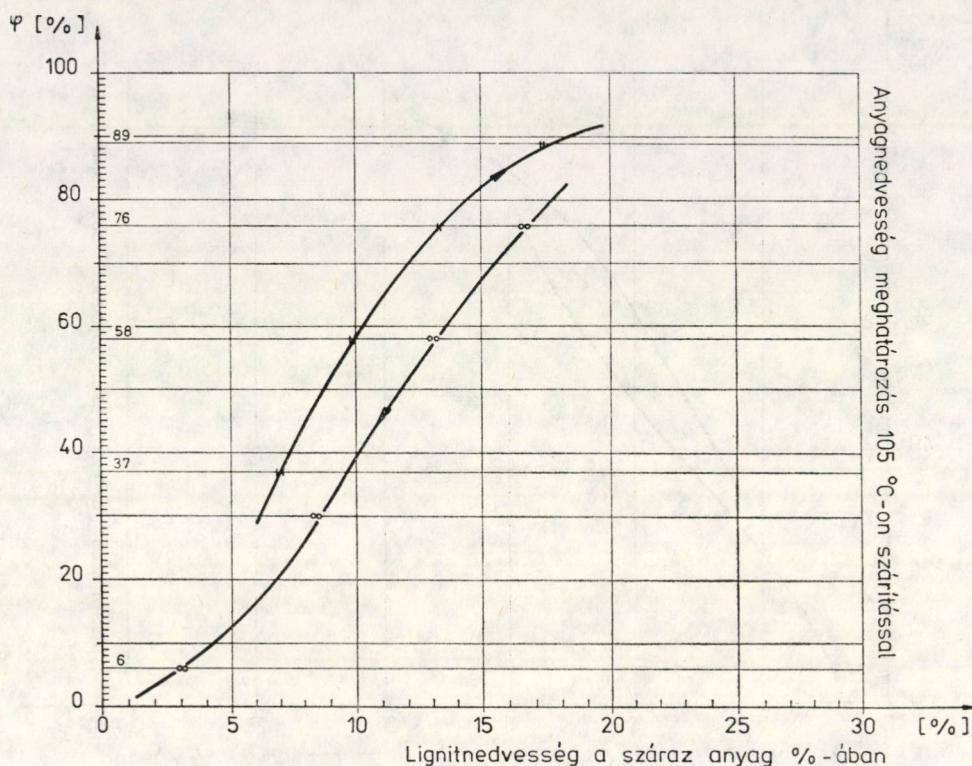
15 g/100 g száraz szén víztartalom alatt a deszorpció hő meredeken emelkedik 11,9 kcal/mol-ról kb. 14,0 kcal/mol-ra a megvizsgált legkisebb fedett-



11. ábra. Ua. mint 8. gyöngyösi sötét-xilit

ségnél, 2,5 g/100 g száraz szénnél. Ezt a növekvő hő a többrétegű víz deszorpciójának lehet tulajdonítani, és ezt követően a monomolekuláris vízréteg deszorpciójának, amely egyre erősebben kapcsolódik a felülethez, ahogy a víztartalom csökken. A deszorpció hőjével ellentétben, az izotermák readszorpció ágából meghatározott hő csak alig valamivel magasabbak, mint a víz párolgási hője, még a monomolekuláris réteg területén is, és csak kis függést mutatnak a felületi fedettségtől. Ez arra utal, hogy az újra adszorbeálódási folyamat nagyon közel áll ahhoz, hogy egyszerűen egy fizikai kondenzáció legyen a felületen, jelentős kölcsönhatás nélkül a víz és a szén között.

A vizsgálat eredményei tehát azt mutatják, hogy az aprítás folyamán a kis nedvességtartalom eléréséhez fokozottabb hőmennyiség hozzávezetéssel kell számolni. Az aprítás hőmérsékletviszonyai ebből a szempontból nem kedvezőek, mivel a hőmérsékletkülönbség a szárítógáz és a szén szemcse között csökken az aprítás előrehaladtával, tehát a hőhozzávezetés sebessége is csökken. Ez szintén azt támasztja alá, hogy a száradási viszonyokat a szárítógáz relatív nedvességtartalmának csökkentésével javíthatjuk.



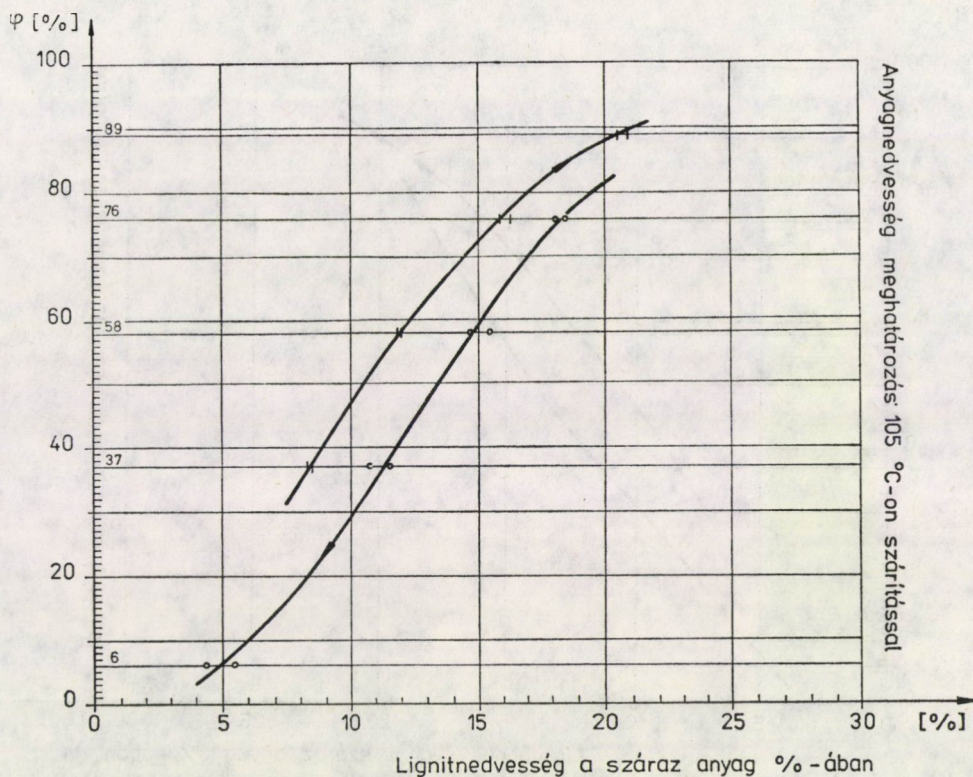
12. ábra. Ua. mint 8. gyöngyösi meta-xilit

A hazai lignitfajtáink közül a gyöngyösi és a bükkábrányi lignitre végeztük el a száradásviszonyokra jellemző higroszkópikus izotermák meghatározását. A szárítás 105 °C-on történt, bár az előkísérletek szerint ezen a hőmérsékleten a nedvességen kívül feltehetően más alkotó is távozik a szénből. Ezt alátámasztják azok az adatok, amelyek a 70 °C és 105 °C hőmérsékleten való különböző környezeti relatív nedvességtartalomnál egyensúlyi nedvességtartalomig való szárítás esetében adódtak, például egy gyöngyösi átlag szénmintára az 5. táblázat szerint.

5. táblázat

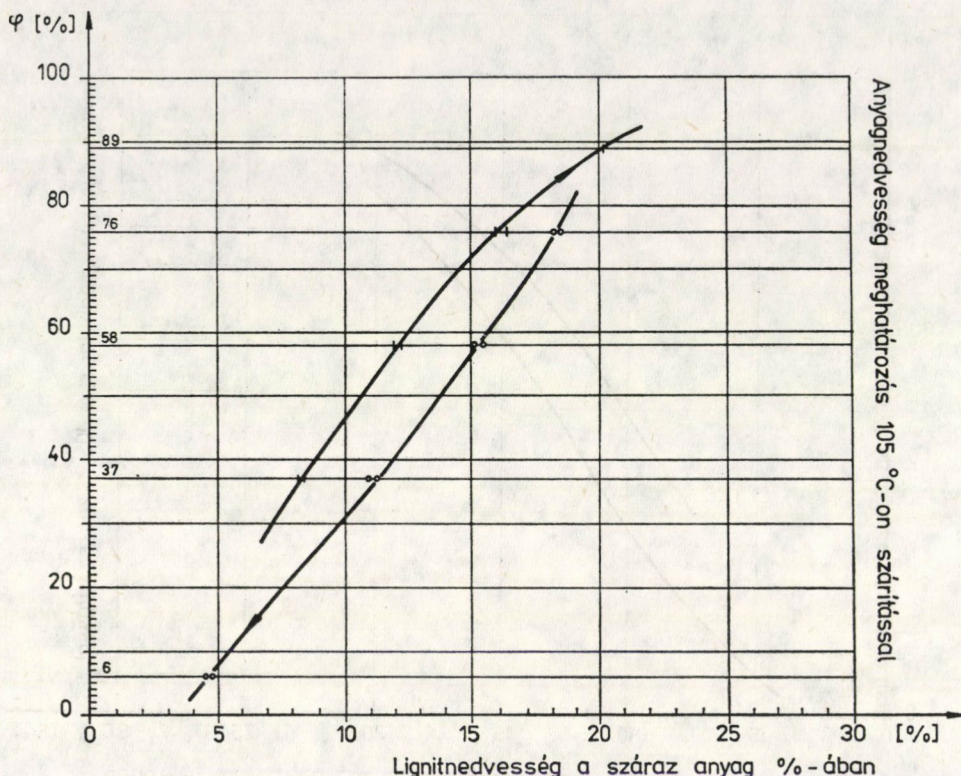
A szénminta nedvességtartalma a szárazanyag %-ában

Szénminta	A nedvesség meghat. hőmérsékletek °C	A környezet relatív nedvesség tartalma %			
Gyöngyös Átlag	70	6	58	75	89
	105	1,30 4,40	8,32 11,63	11,62 15,04	15,13 18,65



13. ábra. Ua. mint 8. bükkábrányi átlag I
 $n_1^h = 15,6\%$; $h = 38,15\%$; $F = 3198$ kcal/kg

A gyöngyösi és a bükkábrányi szénre vonatkozó higroszkópikus izotermákat mutatják a különböző lignitalkotókra a 8—18. ábrák. Az eredmények alátámasztják azt, hogy milyen jelentős szerepe van a szárítóközeg nedvességtartalmának a szárítás folyamatára. A valóságos üzemi malomban tehát a hőmérséklet szerepe a szárítás folyamatában érvényesül elsősorban. A hőelvitelt a szárítóközeg és a szénszemcse közötti hőmérsékletkülönbség befolyásolja, amely elsősorban a szárítóközeg hőmérsékletétől függ, mivel a szemcse hőmérséklet nem változik jelentősen a malomban való tartózkodás során. A szemcse hőmérséklete a száradás során a hőcsere egyensúly és környezeti nyomás függvényeként eléri a $60 \div 80$ °C értéket és közel állandó marad. Ezért elsősorban nagy nedvességtartalmú szeneknél a kazánból visszaszívott nedves szárítógáz esetében a száradás folyamatát alapvetően befolyásoló szárítógáz-nedvességtartalom az elszívás helyétől függően alakul kedvezőbben vagy kedvezőtlenebbül. A malom utáni hőmérséklet szerepe a hőbevitel sebességében érvényesül. Természetesen ez, mint a gyakorlat mutatja, szintén jelentős, mert az aprítandó szén a malomban rövid ideig tartózkodik.

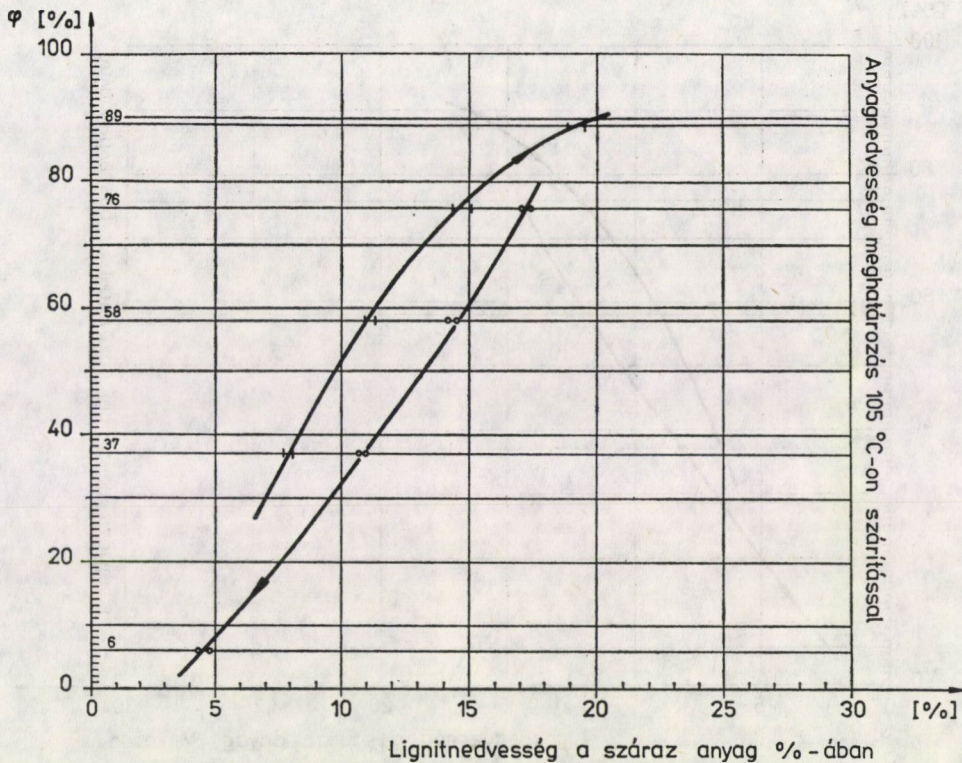


14. ábra. Ua. mint 8. bükkábrányi átlag II.
 $n_1^h = 19,4\%$; $h = 31,39\%$, $F = 3893$ kcal/kg

A gyöngyösihez hasonló nagy nedvességtartalmú szenek tüzelésekor nem túl kedvező a tüztér szempontjából sem a zárt tüzelési rendszer alkalmazása, mivel egyszerű módszerrel hatásos páraszétválasztás nehezen valósítható meg, továbbá mindenképpen a kazán összes huzamára kihatnak a pára bekeverése folytán előálló kedvezőtlen hatások. A tüztérben romlanak a gyulladási viszonyok, a párában levő szénpor gyulladása különösen kedvezőtlen. A párával növelt füstgázmennyiség alacsonyabb tüztérhőmérséklet elérését teszi lehetővé, amelynek negyedik hatványával arányosan romlik a hőátadás. Hatásos páraszétválasztással elérhető tüztér hőmérsékletváltozást a 19. ábra mutatja.

Az alacsonyabb tüztérhőmérsékleten a gyulladási és kiegészi viszonyok romlásával számolni kell. Az éghető veszteséget a kedvezőtlen gyulladás következtében lerövidült égési idő, továbbá az alacsonyabb tüztérhőmérséklet következtében exponenciálisan csökkenő égési sebességsökkenés befolyásolja.

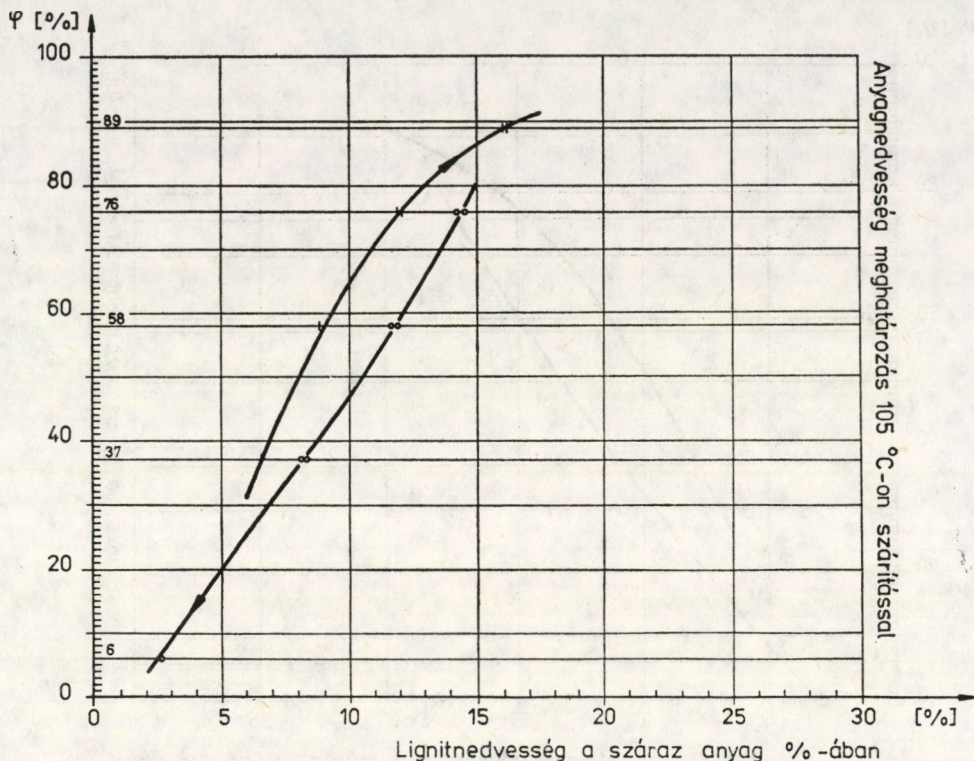
Kedvező tüzelési feltételek érhetők fluidizálással kombinált félig nyílt-ciklusú szénpor tüzelés alkalmazásával. A tüzelési rendszer környezetvédelem



15. ábra. Ua. mint 8. bükkábrányi lignit xilit-mentes része

szempontjából is előnyös, mivel a finomabb frakciók kéntartalomban feldúsulva a fluidizációs rendszerben kerülnek eltüzelésre, amelyben a kénlekötés a tapasztalatok szerint kedvezően alakul. A kazánüzem salakosodás szempontjából is kedvezőbbé válik, mivel a legnagyobb meddőtartalmú finomabb szemcsézetű szénporrész nem kerül a szénportüzelésű kazán tűzterébe. A következőkben az eljárásról rövid ismertetést adunk.

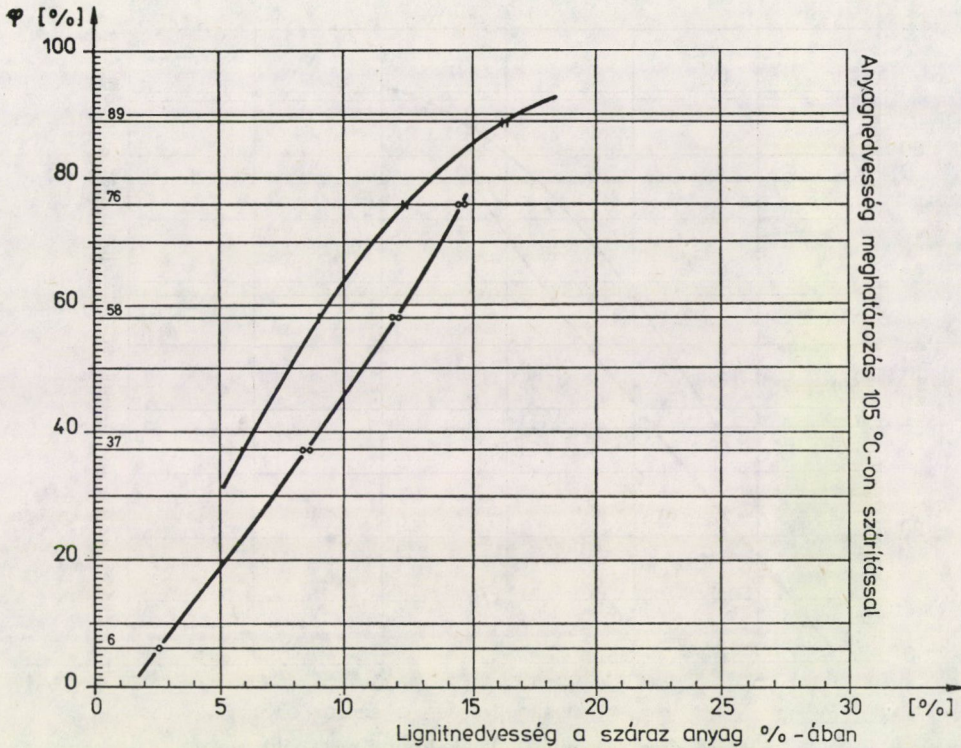
Ha nagy nedvességtartalmú széneknek zárt ciklusú rendszerben való tüzelésekor a teljes szárítógáz-szénpor keveréket közvetlenül a tűztérbe juttatják, szénvesztesség nincs ugyan, de a keverékben levő nagy páratartalom rendkívül kedvezőtlenül befolyásolja a gyulladási viszonyokat, emellett a berendezés méretei is megnövekszenek. Éppen ezért nagy nedvességtartalmú szénknél ezt a módszert úgy alkalmazzák, hogy a malom után a szénpor vezetékben két részre választják a szárítógáz-szénpor áramot, mégpedig a nagyobb szén szemcséket tartalmazó, kisebb nedvességtartalmú áramra, amely a szénpor mennyiségnek kb. 80%-át tartalmazza, és ezt a részt a tűztér alsó részén fújják be a főgőzökön keresztül viszonylag kedvező gyulladási feltételek mellett.



16. ábra. Ua. mint 8. bükkábrányi világos-xilit

A másik részt, amely nagy páratartalmú és a szénpornak kb. 20%-át tartalmazza, a tüztér felső részén mellékégőkön keresztül fűjják a tüztérbe. Ennek következtében ez a felső részen befűjt áram a gyulladási feltételeket kevésbé befolyásolja, és a szénvesztiséget, amely a nyílt ciklusú rendszernél van, teljes egészében elkerüli. Minthogy azonban a pára mégis bejut a tüztérbe, az ezzel járó hátrányok lényegileg megmaradnak.

A 20. ábra szerinti rendszernél is fő- és mellékégőket alkalmazunk és a kb. 80% szénport tartalmazó kis nedvességtartalmú szénáramot kedvező gyújtási feltételek mellett a főégőkön keresztül tápláljuk be. A szénfajtától függő szénportartalommal rendelkező mellékáramot a pernyeleválasztó előtt bekötve a fő füstgázáramba a szállító gáz szénportartalma a pernyével keveredve a pernyeleválasztóban leválasztásra kerül. A pernyeleválasztóban leválasztandó anyag széntartalmát úgy kell beállítani, hogy az fluidtüzelésre alkalmas keverék legyen. Ezt a megfelelő szénportartalmú keveréket egy utóégető fluidkazánba vezetve fluidizált eljárással eltüzelhetjük és a felszabadított hőtartalmat a kazánrendszer technológiájához illesztve hasznosítjuk. Ez lehet közvetlen gőzfejlesztés, vízelőkészítés, illetve fluidkazánból füstgázzal elveze-

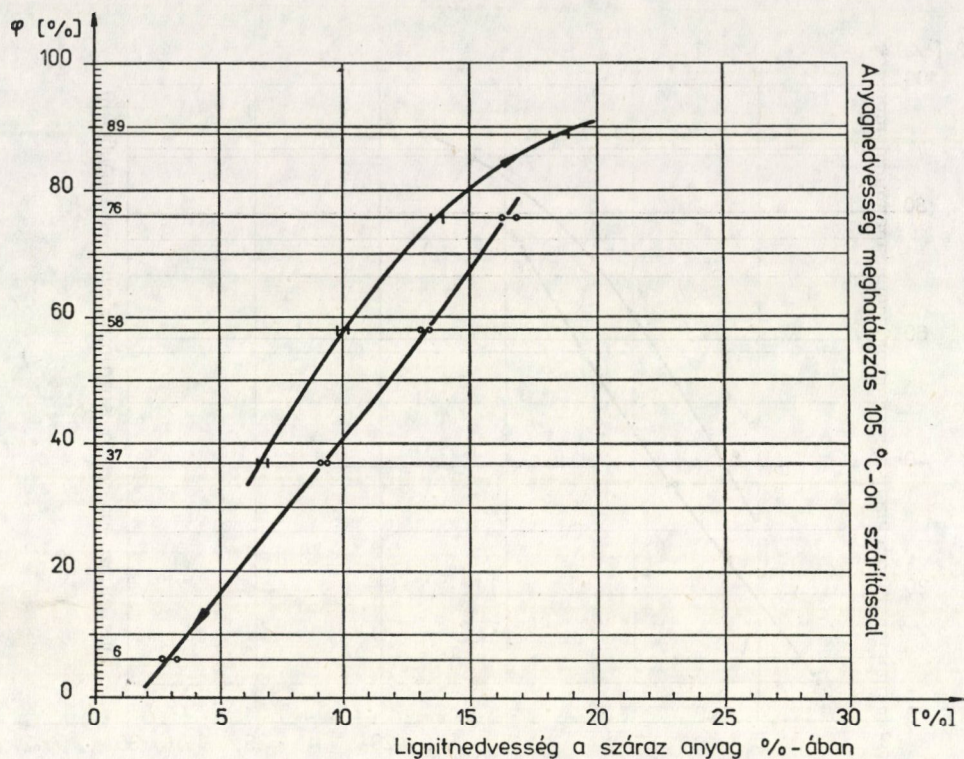


17. ábra. Ua. mint 8. bükkábrányi sötét-xilit

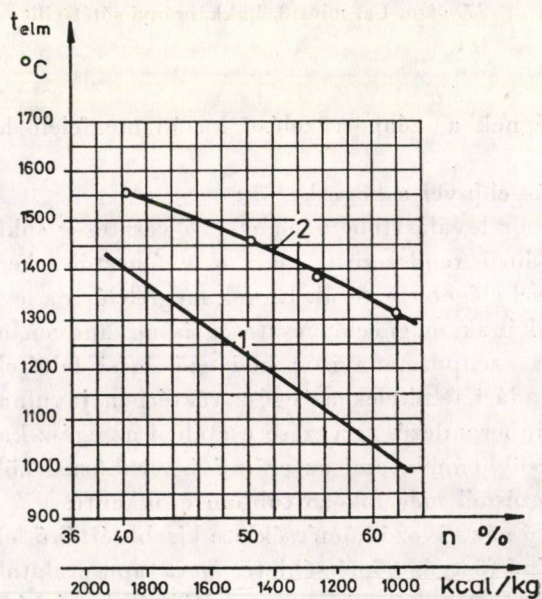
tett hőmennyiségnek a szénportüzelésű kazán megfelelő helyén való visszatáplálása is.

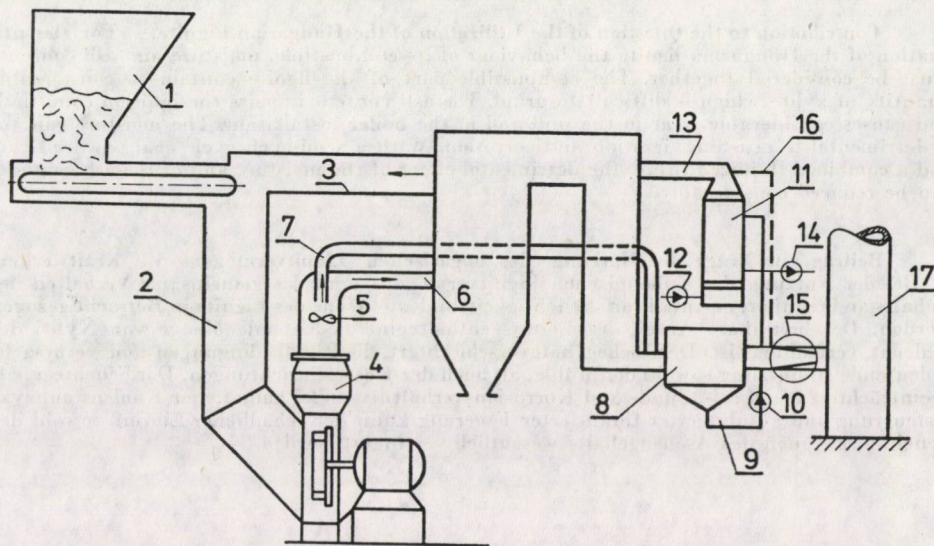
A megoldás előnyei a következők:

- A szénpor leválasztóban jelentkező veszteség sokkal kisebb, mint a nyíltciklusú rendszerénél, mert a leválasztóba kerülő szénpor fluidtüzeléssel elégetésre kerül. Ennek megfelelően a leválasztó berendezés hatásfokának megfelelő veszteség is ugyanilyen arányban csökken;
- a teljes szénpormennyiség kedvező égési feltételek mellett ég el;
- a gyulladási feltételek az egész tüztérben javulnak;
- új kazánberendezés tervezése esetében az egész kazán méretei jelentősen csökkennek, ami az erőművi beruházási költségeket a kazánberendezésnél még fokozottabban csökkenti;
- a szárító gáz távozó hőmérséklete kisebb értékű lehet, mint a kazánból kilépő füstgáz hőmérséklete, mert tapasztalatok szerint a malomból kilépő gáz korrózió szempontjából kevésbé veszélyes, mint a tüztéri füstgáz;



18. ábra. Ua. mint 8. bükkábrányi meta-xilit

19. ábra. Az elméleti égési hőmérséklet alakulása [7]
1. párasztválasztás nélkül; 2. párasztválasztással



20. ábra. Berendezés fluidizált tüzeléssel kombinált szénportüzeléshez [9]

— az egész kazánra nézve a távozó füstgáz veszteség értéke csökkenthető, mert ugyanolyan kéntartalmú szén tüzelése esetében a füstgáz harmatpontját a füstgázban levő páratartalom parciális nyomása és főképpen a kéntartalom határozza meg. Mivel a nedvesség mennyisége a füstgázban jelentősen csökken, annak parciális nyomása és az ahhoz tartozó telítési hőmérséklet is csökken. Így tehát új konstrukciókon már a méretezéskor figyelembe vehető a kisebb harmatpont, régi berendezés átalakításánál pedig pót-utófűtő felületek kiegészítésével csökkenthető a távozó füstgáz veszteség.

IRODALOM

1. HERMAN P.—ILLÉS B.—NAGY A.—VÖRÖS L.: Összefoglaló jelentés a külfejtésű lignitre települt Gagarin Erőmű tapasztalatairól. VEIKI Budapest, 1976. HTF 53
2. REMÉNYI K.: Szénhidrogén és szénportüzelések stabilitási kérdései. BME Továbbképző Intézete, Budapest 1973
3. BARKÁCS E.: Jelentés a Bükkábrányi Erőműben várható pernyejellemzőkről. VEIKI, Budapest, 1976. HTF 45
4. VOLTAY G.: Őrlési kísérletek visontai, illetve bükkábrányi lignittel. VEIKI, Budapest, 1976. HTF 38
5. HORVÁTH F.—HORVÁTH A.—VÖRÖS L.: Félüzemi kísérletek a visontai és bükkábrányi lignittel. VEIKI Budapest, 1977. 11—94—042—2
6. ALLARDICE, D. I.—EVANS, D. G.: The Brown-coal/Water System Part I—II. *Fuel the Science of Fuel and Energy* 1971. ápr. Vol. 50. No 2
7. TODORIEV, M.—GEORGIEV, At.: Electrical Power Stations Using Highmoisture Lignites Hieg-Ash Brown Coal. VIII. WEC, Bucharest, 1971
8. FENYVES I-né: A visontai és bükkábrányi lignitek higroszkópikus izotermáinak vizsgálata. VEIKI, Budapest 1975
9. REMÉNYI K.: Berendezés fluidizált tüzeléssel kombinált szénportüzeléshez. F 23 D 19/00 jelű szabadalom

Contribution to the Question of the Utilization of the Hungarian Lignite. — For the utilization of the Hungarian lignite the behaviour of its combustible, moisture and ash contents must be considered together. The combustible part of the lignite contains a considerable quantity of xylite which is difficult to grind. The ash content impairs the ignition conditions and causes considerable wear in the mill and in the boiler installation. The moisture content is detrimental to crushing, ignition and corrosion. With a semi-open cycle coal powder firing and a combined fluidized firing, the detrimental effect of the moisture and of the ash contents can be reduced considerably. —

Beitrag zur Frage der Nutzung des ungarischen Lignitvermögens in Kraftwerken. — Bei der Nutzung des einheimischen Lignitvermögens muß das gemeinsame Verhalten des Gehalts an brennbarem Anteil, an Feuchtigkeit und an Asche des Lignits in Betracht gezogen werden. Der brennbare Anteil des Lignits enthält eine bedeutende Menge von Xylit, der schlecht vermahlbar ist. Der Aschegehalt verschlechtert die Zündbedingungen und verursacht bedeutende Abnützung sowohl der Mühle, als auch der Kesseleinrichtungen. Der Feuchtegehalt beeinträchtigt die Mahl-, Zünd- und Korrosionsverhältnisse. Bei halboffener Kohlenstaubzyklusfeuerung und kombinierter fluidisierter Feuerung kann der schädlicher Einfluß sowohl des Feuchte-, als auch des Aschegehalts wesentlich verringert werden. —

A MECHANIKA VARIÁCIÓS ELVEIHEZ KAPCSOLÓDÓ ELMÉLETI ÉS ALKALMAZOTT KUTATÁS ÁTTEKINTÉSE*

HELYZETKÉP

SCHARLE PÉTER**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

és

VÖRÖS GÁBOR***

A dolgozat felvázolja a variációs elvek és módszerek alkalmazásának fejlődését. Bemutatja a legfontosabb új eredményeket és értékeli a hazai kutatás helyzetét. Felhívja a figyelmet néhány időszerű kutatási célkitűzésre.

1. Történeti áttekintés

Bár több forrás említi ARISTOTELÉST, mint a „virtuális sebesség” fogalmának megalkotóját, mégis helyesebb a történet kezdetét Johann BERNOULLI vizsgálataihoz, a brachistochron-feladat tárgyalásához kapcsolni (1696). A variációszámítás alapjait a XVIII. században dolgozták ki. Ebben is nagy részt vállalt Leonhard EULER. Rugalmasságtani feladat vizsgálatára Daniel BERNOULLI (1738) alkalmazta az elsők között a variációszámítást. LAGRANGE 1760-ban adott általános gondolatmenetet a következő feladat megoldására:

legyen adott az

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$$

határozott integrál. Válasszuk ki azt az $x = x(t)$ görbét az $x(t_1)$, $x(t_2)$ pontokra illeszkedő görbék közül, amelyre I lokális minimumot vesz fel.

LAGRANGE megmutatta, hogy a minimum létezésének szükséges feltétele a

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{x}} \right) \delta x \right] dt$$

mennyiség — az úgynevezett első variáció-eltűnése, ahol

$$\delta x = \left(\frac{dx}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha$$

* Megvitatta és elfogadta az MTA Műszaki Mechanikai Bizottsága 1978. március 7-i ülése.

** Dr. Scharle Péter, H-1076 Budapest, Péterfy u. 44.

*** Dr. Vörös Gábor, H-1118 Budapest, Nagyszebeni u. 1985/3.

és α skalár paraméter. A $\delta I = 0$ kijelentéssel ekvivalens összefüggést

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} - L_x = 0$$

alakban először EULER írta fel, mint a minimum létezésének szükséges, de nem elégséges feltételét. A térbeli klasszikus rugalmasságtani feladathoz rendelhető variációs elvet GREEN (1838) — az elmozdulásmezőre — és CASTIGLIANO (1879) — a feszültségmezőre — fogalmazták meg. Az alkalmazásokban később mind gyakrabban merültek fel olyan feladatok, amelyekben nem valamely integrál minimumának megkeresése volt a cél, hanem olyan görbék meghatározása, amelyekre a δI variáció eltűnik, azaz I stacioner.

Például a mechanikában vizsgált véges szabadságfokú konzervatív pontrendszerekre áll, hogy az

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

Hamilton integrál stacionárius értéket vesz fel a tényleges mozgásnál minden „szomszédos”, kinematikailag lehetséges mozgáshoz képest (T a kinetikai, U a potenciális energia).

Egy adott feladat esetén a megoldás a következő lépésekben történhet:

- ismerni kell, vagy elő kell állítani a feladathoz tartozó funkcionált;
- módszert kell adni a stacionaritási ponthoz tartozó függvény meghatározására;
- numerikus úton meg kell keresni az egzakt megoldást, vagy annak közelítését.

A XIX. században a figyelem elsősorban az első lépés felé fordult. A törekvések minden bizonnyal ösztönözte EULER egy 1744-ben tett — némileg derülátó és inkább filozófiai, mint természettudományos jellegű — megjegyzése. Eszerint: „Mivel a mindenség felépítése a lehető legtökéletesebb, lévén egy mindentudó Teremtő műve, semmi olyan nem lelhető a világban, amelyben valamilyen maximum vagy minimum-tulajdonság nem mutatkozik. Következésképpen kétségtelen, hogy a szélsőérték-módszerrel a világban működő összes hatás levezethető közvetlen vagy végső okaiból” (FINLAYSON, 1972, p. 335).

A numerikus megoldás kérdésében a múlt századvég hozott jelentős eredményt. RAYLEIGH, majd RITZ fejlesztette ki azt az eljárást, amelynek alap gondolata szerint a közelítő megoldást önkényesen választott függvények lineáris kombinációjaként vesszük fel, és az együtthatókat a minimumfeltételből határozzuk meg. A variációs módszer széles körű elterjedését ezután már csak egyetlen — de súlyos — gond korlátozta: „olyan próba függvényrendszer konstruktív megadásának nehézségei, amely a feladat megoldásának speciális

tulajdonságait tükrözi, egyúttal e függvények kis száma ellenére a megoldás kielégítő approximációját biztosítja” (MARCSUK, 1976).

Ez lehetett az egyik oka annak, hogy az elmélet fejlődése a XX. század első felében lelassult. Igaz, HELLINGER (1914) felismerte, hogy a valóságos folyamat környezetében megengedett variációk egyidejűleg kiterjeszthetők a kinematikai és kinetikai változókra is, és olyan általánosított (mai szóhasználattal vegyes) funkcionált írt fel, amelyben mind az elmozdulásvektor, mind a feszültségtenzor komponenseit variálni lehet. TREFFTZ a Ritz-eljárást általánosította (1926).

Sok részeredmény mégis feledésbe merült, és a negyvenes évek végén megjelent monográfiák nagyjából lezárt területként tárgyalhatták a variációszámítást (LANCZOS, 1949).

REISSNER irányította ismét a figyelmet a kérdéskörre (1950). Újrafogalmazott néhány korábbi felismerést (így a Hellinger-elvet), részben általánosította az ismert eredményeket (például megmutatta a peremfeltételek variálhatóságát). Lényeges általánosítást adott HU és WASHIZU is, akik felírták a lineáris rugalmasságtanban értelmezhető legáltalánosabb funkcionált (1955).

Az orosz nyelvterületen folyó párhuzamos kutatások eredményei közül leginkább MIHLIN művei váltak ismertté. Az első jelentős monográfia (1950) újdonságot jelentett azért is, mert a kérdéskört a funkcionálanalízis eszközeivel tárgyalta. Ezt a kezdeményezést később maga MIHLIN találta korainak (1970) és átmenetileg visszatért az elemibb tárgyalásmódhoz (1957). Angol nyelven is megjelent második monográfiája az energiatér fogalmának bevezetésével tárgyalta a lineáris operátorokhoz kapcsolódó variációszámítási kérdéseket.

A 60-as évek elejétől igen gyorsan terjedtek a direkt módszerek. A gyakorlati alkalmazásig jutott a lokális bázisfüggvények használatának COURANTTÓL származó gondolata (1943): gomba-módra szaporodtak a különféle „véges-elem módszer” változatok. A műszaki alkalmazások területén — a gépi számítási lehetőségekben fennálló adottságok miatt — a fejlett tőkésországok diktálták a tempót.

Egyre több publikáció látott napvilágot, melyekben a szerzők különböző hatásokat figyelembe vevő elveket közöltek. Ilyenek pl. a termodinamikai, magnetodinamikai, piezoelektromos hatások. Ezen elvek származtatási módja „a megfelelő funkcionál szerkezetének kitalálása”, és azt követően annak megmutatása, hogy a felírt elvből valóban az adott feladat már ismert egyenletei és peremfeltételei származnak. Ebben az időszakban még nem voltak ismertek a szisztematikus származtatás módszerei, de a lehetőség adva volt. A továbblépést a funkcionálanalízis eredményei és a klasszikus variációszámítás kapcsolatának felderítése jelentette. A terek topológiai szerkezetének megválasztására, a köztük értelmezett funkcionálok tulajdonságaira, a Gateaux-

differenciálra és a funkcionálok kritikus pontjainak létezésére vonatkozó eredmények a matematikában már korábban ismertek voltak. Ezek — legtöbbet idézett — összefoglalását VAINBERG (1956) közölte.

Ebben az irányban a megindult vizsgálódások legjelentősebb eredménye TONTI (1973) azon felismerése volt, mely szerint a variációs elv létezése nemcsak az adott probléma operátorának felépítésétől, hanem az operátor értelmezési tartományán és értékkészletén előírt skalárszorzási formától is függ.

Érdekes, hogy szinte ezzel egyidőben — de úgy tűnik, teljesen függetlenül — a nemegyensúlyi termodinamika területén is felmerült az igény a feladatok variációs formában történő megfogalmazása iránt. A GLANSDORFF és PRIGOGINE (1964) által közölt lokális potenciál minimum elve a feltételes szélsőérték elvek egy érdekes és hasznos fajtája. Megjegyezzük, hogy az ilyen típusú elvek is származtathatók a Vainberg-féle kritériumok alapján.

Napjainkban már nagyon sok könyv tárgyalja részletesen a variációs módszerek előnyeit. Kiváló monográfiák állnak rendelkezésre, és a témakör a mérnökképzésben világszerte jelentős — néhol központi — szerepet tölt be, lehetőségeit, gyakorlati és elméleti jelentőségét tekintve nem indokolatlanul.

A közelmúlt fejlődésének fő jellemzője, hogy határozottan jelentkezett a szisztematikus tárgyalásmód és a szintézis igénye. Ezen a téren TONTI (1973), ODEN és REDDY (1976) publikációit lehet megemlíteni. Széles körű áttekintést ad WASHIZU (1968, 1974) és SCHECHTER (1967) — a várható fejlődés alapjait VAINBERG második monográfiája (1972) körvonalazza.

2. Az eredmények áttekintése

Tekintsük át vázlatosan az előzőekben tárgyalt fejlődési folyamat néhány eredményét. A továbbiakban kizárólag a gondolatmenet követéséhez feltétlenül szükséges meghatározásokat ismertetjük. Legyen X és Y két Banach-tér; Banach-térnek nevezzük az olyan normált, lineáris tereket, melyekben érvényes a Cauchy-féle konvergencia kritérium (a valós számok R^1 tere például lineáris Banach-tér). Értelmezhető az X és Y terek közöttinek nevezhető alábbi skaláris szorzat, vagy külső szorzat:

$$\langle x, y \rangle = k, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad k \in R^1.$$

Az $L(x) = y$ egy leképezés vagy operátor X egy résztartományáról Y -ba,

$$\text{azaz } L: X \rightarrow Y.$$

Az L operátor értelmezési tartományát X -nek az a részhalmaza alkotja, amelynek elemei eleget tesznek az L -hez rendelt (általában inhomogén) perem és/vagy kezdeti feltételeknek.

Az $I(x)$ operátort funkcionálnak nevezzük, ha $I: X \rightarrow R^1$. Az L operátor Gateaux-differenciálja az η irányban

$$\delta L(x, \eta) = \left[\frac{\partial L(x + \eta\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = 0, \quad \eta \in K.$$

Az $I(x)$ funkcionál kritikus pontja x_0 , ha ott $\delta I(x_0, \eta) = 0$. Az η irány az X -téren képezett $(x - x_0)$ különbségelem, és K a különbségelemek tere. K elemei az eredeti (inhomogén) perem és/vagy kezdeti feltételekhez rendelhető homogén perem és/vagy kezdeti feltételeket elégítenek ki.

Legyen valamely problémát leíró egyenlet

$$L(x) = 0_y$$

alakú, megoldása x_0 . (O_y az Y tér zéruseleme.) Ha

$$\langle \delta L(x, \eta), \xi \rangle = \langle \delta L(x, \xi), \eta \rangle; \quad \xi, \eta \in K, \quad x \in X \quad (1)$$

— azaz ha L úgynevezett szimmetrikus operátor — akkor létezik egy olyan $I(x)$ funkcionál, melynek kritikus pontja x_0 .

Az $I(x)$ funkcionál:

$$I(x) = \int_{\lambda=0}^1 \langle L(\lambda x + (1 - \lambda)x_0), (x - x_0) \rangle d\lambda. \quad (2)$$

Érdemes megemlíteni, hogy ennek az integrálképletnek az alaposabb elemzésével szoros kapcsolat mutatható ki a variációszámítás és a potenciálmélet között.

Az eddigiek alapján látható, hogy a szélsőérték elv létezése függ:

- a) a skalárszorzat megválasztásától,
- b) az L operátor szerkezetétől,
- c) az η irányok megválasztásától.

A továbbiakban ezeket a lehetőségeket vizsgáljuk meg részletesebben néhány egyszerű szemléltető példa segítségével.

a) Egy Banach-téren többféle skalár szorzatot definiálhatunk, és megvan a lehetőség, hogy ezek közül azt válasszuk ki, melyre az (1) feltétel — az adott kezdeti és peremfeltételek figyelembevételével — teljesül.

Példaként vizsgáljuk meg a következő egyszerű egyenletet:

$$x'' - k(s)x = 0; \quad \text{megoldása: } x_0(s, t); \quad 0 \leq s \leq l; ,$$

és a kezdeti és peremfeltételek:

$$x(s, 0) = \alpha(s); \quad x(0, t) = \beta(t), \quad x(l, t) = \gamma(t).$$

Az s és t szerinti deriváltak jelei ' és \cdot . Az $L = [(\cdot)' - k(s)(\cdot)']$ operátor lineáris, ezért $\delta L = L(\eta)$. Értelmezési tartománya az adott kezdeti és peremfeltételeket kielégítő — elegendő sokszor deriválható — függvények tere. Ennek a térnek nincs zéruseleme és nem lineáris. Az $\eta = (x - x_0)$ különbségelemek értéke az $s = 0$, $s = l$, $t = 0$ helyeken zérus.

Ha a szokásos

$$\langle u, v \rangle = \int_0^l \int_0^T u(s, t) v(s, t) ds dt$$

alakú skalár szorzatot választjuk, akkor a $(\partial/\partial t)$ operátorra nem teljesül az (1) kritérium. Viszont egy úgynevezett konvolúciós forma esetében már igen:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^l \int_0^T u(s, t) v(s, T - t) ds dt.$$

Ennek felhasználásával (2)-ből meghatározható az $I(x)$ funkcionál:

$$I(x) = \int_0^l \int_0^T \left[-\frac{1}{2} x'(s, t) x'(s, T - t) - \frac{1}{2} k(s) x'(s, t) x(s, T - t) \right] ds dt + \\ + \int_0^l \frac{1}{2} k(s) x(s, T) x(s) ds.$$

Az irodalomban a skalár szorzásnak további — általánosabb — formái is használatosak.

b) Bizonyos esetekben nem célszerű, vagy nem lehet egy adott skalár-szorzási formától eltérni. Ilyenkor az operátor felbontásával próbálkozhatunk.

Bontsuk fel az L operátort egy szimmetrikus és egy maradék részre:

$$L(x) = S(x) + M(x),$$

és most az eredeti egyenlet helyett vizsgáljuk a következő egyenletrendszer:

$$S(x) + M(\tilde{x}) = 0_y,$$

$$x = \tilde{x}.$$

Az első egyenlethez — ha csak az x -et tekintjük „lokálisan” független változónak — hozzárendelhetünk egy (2) alakú funkcionált, mely az $x = \tilde{x}$ mellékfeltétellel felel meg az eredeti $L(x) = 0_y$ feladatnak. Az első ilyen típusú szélsőértékkelv a nemegyensúlyi termodinamika Glansdorff–Prigogine–Schechter-féle lokális potenciál minimum elve.

Például az előző pontban vizsgált egyenlet esetén egy lehetséges felbontás

$$x'' - k(s) \tilde{x}' = 0,$$

$$x = \tilde{x}.$$

A szokásos skalárszorzat használatával a funkcionál

$$I(x) = \int_0^t \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \{x'(s, t)\}^2 - k(s) \tilde{x}(s, t) x(s, t) \right] dt ds,$$

és a mellékfeltétel: $x = \tilde{x}$.

c) Ismeretesek olyan feltételes elvek is, melyeknél a mellékfeltétel nem az operátor független x változójára, hanem az $\eta = x - x_0$ irányokra vonatkozik. Példaként vizsgáljuk meg a klasszikus rugalmasságtan alapegyenlet-rendszerét:

$$\begin{aligned} \alpha: N(\sigma) + f &= 0 && \text{egyensúlyi egyenlet,} \\ \beta: E(u) + \epsilon &= 0 && \text{geometriai egyenlet,} \\ \gamma: \sigma &= C(\epsilon) && \text{Hooke törvény.} \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer egyértelműen leírja a rugalmas test σ feszültségtenzor, ϵ alakváltozási tenzor és u elmozdulásvektor mezőit adott térfogati erőrendszert f , dinamikai és geometriai peremfeltételek mellett. Használjuk a következő skalár szorzatot az N és C operátorok értelmezési tartományán:

$$\langle u, v \rangle = \int_V u \cdot \cdot v dV.$$

Az N és E operátorok kapcsolata:

$$\int_V N(v) \cdot u dV = \int_V E(u) \cdot \cdot v dV + \left\{ \begin{array}{l} \text{felületi} \\ \text{integrál} \end{array} \right\}$$

Vizsgáljuk meg, hogy a β és γ egyenletekből felírható

$$E(u) + C^{-1}(\sigma) = 0$$

egyenlethez rendelhető-e funkcionál. Mivel L lineáris

$$L = E(u) + C^{-1}(\sigma), \quad \delta L(\sigma, \eta) = L(\eta).$$

Az (1) feltétel, ha $\eta = \sigma - \sigma_0$,

$$\langle E(u), \eta \rangle + \langle C^{-1}(\sigma), \eta \rangle = \langle N(\eta) u \rangle + \langle C^{-1}(\eta), \sigma \rangle - \left\{ \text{felületi integrál} \right\}.$$

Látszik, hogy a szimmetriafeltétel csak akkor teljesül, ha olyan η irányokat választunk, melyek esetében mindkét oldal első tagja zérus, azaz

$$N(\sigma - \sigma_0) = 0.$$

A funkcionál a (2) képletből:

$$I(\sigma) = \frac{1}{2} \langle C^{-1}(\sigma), \sigma \rangle - \{ \text{felületi integrál} \} .$$

Ez a feltételes elv a Castigliano-féle variációs elv, mely a kompatibilitási egyenletet, az anyagtörvényt és a megfelelő peremfeltételeket tartalmazza.

Az ilyen típusú elvek természetesen csak akkor fogadhatók el, ha a mellékfeltétel nem mond ellent a feladatot leíró többi egyenletnek — esetünkben az α egyensúlyi egyenletnek.

3. Hazai helyzetkép

A variációs elvek hosszú időn keresztül kívül estek a hazai kutatók érdeklődési körén, ezért a műszaki mechanikai kutatás helyzetét elemző tanulmányok (1967, 1976) sem tehettek említést eredményekről. A „variációs elv” kifejezés is csak elvétve fordult elő ebben az időszakban. Egy-egy szakirodalmi közlés esetenként hírt adott külföldi kutatási eredményekről — példaként a képlékenységtan extrémumtételeit és a szovjet iskola legfontosabb elméleti kezdeményezéseit említhetjük [2], [27], [1], [21], [39].

A variációs elvekhez kapcsolódó hazai kutatás helyzetét a következő csoportosításban elemezzük: az elméleti alapok fejlesztése; újabb variációs elvek és változatok kidolgozása; alkalmazás feladatok numerikus megoldására; a variációs elvek szerepe a felsőoktatásban. A fentiekből következik, hogy e részterületeken az eredmények súlya lényegesen különböző lehet.

3.1 Elméleti eredmények

Tudomásunk szerint a 60-as évek végéig e kérdéskörben elmélyült vizsgálatokat nem is folytattak. A kutatás megindulásának első szakaszában a külföldi eredmények megismerésén és a fejlesztési irányok felderítésén volt a hangsúly.

1972 körül — a fejlődés ütemét diktáló tudományos iskolák közléseinek rendszeres elemzése révén — már világosan látszott, hogy a továbblépést a variációs elvek matematikai hátterének mélyebb megértése és az erre alapozott (inkább módszeres, mint intuitív) általánosítások fogják jelenteni. Természetesen elhibázott igyekezet lett volna a hazai kutatás lehetőségeit túlbecsülni — helyes mértéktartással a legújabb eredmények rendszeres feltárására, megismertetésére és hasznosítására kellett fordítani a rendelkezésre álló szerény eszközöket. E felfogás ugyanakkor nem zárta ki egy-egy érdekes részeredmény elérését, melyek nemzetközi összehasonlításban is új elemeket tartalmaztak. Hazai eredmények születtek az alábbi területeken:

- a hagyományos skalárszorzatértelmezés általánosítása nem-potenciális operátor esetére, szimultán minimizáló eljárás kidolgozása [13];
- általános konstruktív módszer szakaszosan folytonos függvények illesztési feltételeinek variációs elvben való figyelembevételére [29], [30];
- a variációs elvek értelmezése a hibaelvre épülő közelítő módszerek családján belül, más módszerekhez fűződő kapcsolatok tisztázása [24];
- kontinuumok sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása a sajátértékek variációs értelmezése alapján [5], [7].

3.2 Új variációs elvek, változatok

A különböző variációs elvek kapcsolatainak feltárása, különleges változatok kidolgozása több szempontból lehet hasznos. Az idevágó eredmények rendszerint rávilágítanak egymástól látszólag távoleső feladatok összefüggéseire, lehetővé teszik ismert eljárások általánosítását, bevált módszerek alkalmazását más feladatok esetében.

E területen a hazai kutatás a 70-es évek eleje óta eredményesen fejlődik és számos érdekes részeredmény érdemel említést:

- rugalmas szerkezetek sajátfrekvenciáinak behatárolása hagyományos és újabb módszerekkel (közbenső operátoros módszerrel, ortogonális invariánsok felhasználásával, véges elemes módszerrel [5], [7]);
- normál érintkezési feladatok tárgyalására alkalmas, diszkrét modellek esetén használható variációs funkcionálok kidolgozása [20], [37], [38];
- a rúdszerkezetelmélet alapegyenletének levezetése a háromváltozós kontinuumfeladatra vonatkozó variációs elvből [22], [26];
- homogén prizmatikus rudak csavarási merevségére vonatkozó becslések javítása [9];
- prizmatikus, különböző anyagokból összetett rudak csavarási feladatának vizsgálata [8];
- extrémum tételek alkalmazása a vonal- és felületkontinuumok másodrendű elméletében [22].

3.3 Numerikus eljárások

E téren a hazai kutatás 1970-től mutat fel eredményeket [23], és a fejlődés üteme megítélésünk szerint megfelel az átlagos nemzetközi szintnek. A szakirodalom rendszeres elemzése azt mutatja, hogy a hazai számítási modellek a teljesítőképességet, a feltevések általánosságát tekintve 3–5 éves lemaradással követik a vezető kutatóhelyek eredményeit. A különbség — amelynek oka részben a gépi hardware korlátozottsága — nem tűnik nagynak,

bizonyos mértékig előnyös is, mivel így nagyobb biztonsággal választhatók ki az ígéretes változatok a kevésbé jelentékenyek közül.

A variációs elvekhez kapcsolt numerikus eljárások számbavételénél érdemes megjegyezni, hogy a szóhasználat e téren nem teljesen egyértelmű. Egyetértés van abban, hogy az ide sorolt változatokban valamilyen integrálkifejezés stacionaritási feltételét (kritikus pontját) keressük meg. Sokan ezt az értelmezést olyan funkcionálokra szűkítik, amelyeknek fizikai — közelebbről energetikai — tartalma is van. Talán az az álláspont a legkövetkezetesebb, amely a variációs elvet valamilyen integrálkifejezés variációképzésének tényleges végrehajtásával kapcsolja össze. Lényegesebb az a tény, hogy mindeddig nem kellett szót ejtenünk a véges-elemes módszerek (mozaikmódszerek) részleteiről, noha az alkalmazások terén a kérdés nyilvánvalóan nem kerülhet meg. Kezdetben a véges-elemes módszerek és a variációs elvek kapcsolata szorosabbnak látszott. Sokan azt állították, hogy a mozaikmódszer a Ritz-eljárás változata. Ma már világosan látjuk, hogy erről nincs szó. A mozaik-elv, mint a lokális bázisfüggvények használatának elve, nem kötődik egyetlen hibaelvhez, közelítés meghatározására alkalmas, funkcionálanalízisből vett eszközökkel felépített módszerhez sem. Az alkalmazásokban e felismerés újabban már tükröződik. Korábban a közlemények jelentős hányada ismertetett különféle elemtípusokat, megadva a mérnöki mechanika elmozdulásmódszerében szemléletes tartalmat hordozó „elemi merevségi mátrixot”. Ma, amikor az alkalmazások száma gyorsan nő a matematikai fizika más területein is, e fogalom veszít jelentőségéből; nyilvánvaló, hogy használata a véges résztartomány alakját, a bázisfüggvények felvételénél tett megfontolásokat ismertető tanulmányban nem nélkülözhetetlen.

Nem adhatunk e helyen teljes képet azokról a hazai alkalmazásokról, amelyek az utóbbi tíz évben a variációs elvek használatát jelentették. A közelmúltban igen részletes áttekintés készült a Műszaki Mechanikai Bizottság számára, csaknem teljes bibliográfiával [23] — e tanulmány megállapításait magunkévá tesszük. Az alábbiakban csak jelezni kívánjuk az általunk ismert — variációs elvekre épülő módszereket rendszeresen alkalmazó — legfontosabb kutató-oktató központokat és fő tevékenységi területeiket:

— Budapesti Műszaki Egyetem

Az építő-, építész-, gépész-, villamos- és közlekedésmérnöki kar mechanikát oktató tanszékein szinte teljes spektrumában szerepel az alkalmazás. Kiegészíti ezt a geotechnikai, vízépitési, elektrodinamikai vizsgálatok több érdekes példája, valamint a képlékeny alakítási folyamatok vizsgálata [39].

— Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc

A budapestihez hasonlóan széles körben foglalkoznak e kutatócentrumban alkalmazásokkal, újabban kedvezően változtak a géphasználati lehetőségek is.

— ÉVM SZÁMGÉP

A vállalat keretében 1978 elejéig osztálynyi egység foglalkozott mérnöki számításokkal, számos kérdésben — elsősorban általános algoritmusfelépítési kérdésekben — úttörő szerepet vállalva [10], [11], [12].

— Tervezővállalatok, kutatóintézetek

Szinte valamennyi tervezővállalat rendelkezik ma már olyan gépi programokkal, amelyek a variációs elvre alapozott valamelyik véges-elemes módszer változatai (UVATERV, IPARTERV, TTI stb.). Hasonló a helyzet több kutatóintézetnél (ÉTI, TAURUS stb.). Elméleti érdekességű fejlesztés folyik a bányakutatás területén is (BÁNYATERV, BKI). Az örvendetes tény fonákjaként említhető az, hogy sokszor párhuzamos munka folyik, lényegében azonos használati értékű programokat öt-hat helyen is kidolgoznak. Máig megoldatlan a koordinálás kérdése e területen is.

3.4 Oktatás

Az utóbbi időben a variációs módszerek szerepe megnőtt a felsőoktatásban. Ilyen irányú alaposabb képzés azonban — mely igényesebb matematika oktatással párosul — egyelőre csak a BME és NME néhány szakán folyik. Emellett több szakmérnöki tanfolyam anyagában is komoly súllyal szerepel az elmélet és az alkalmazások kérdésköre.

Didaktikai szempontok indokolják, hogy még tovább kell lépni ebben az irányban. Ezt az egységesebb tárgyalásmód és a numerikus alkalmazásokban való közvetlen felhasználás indokolja. Meg kell kísérelni a lényegesebb alapfogalmak beépítését az alaptárgyi oktatásban is. Ilyen irányú törekvések láthatók már néhány egyetemi jegyzetben [3], [15].

4. Következtetések, ajánlások

A már említett, a hazai műszaki mechanikai kutatás helyzetét elemző tanulmány ([6], 1976) megjelöli a közeljövő legfontosabb kutatási feladatait. Ezek egyike

„— a variációs elvek továbbfejlesztése és szélesebb körű alkalmazása”.

Az előző fejezetek tartalmából következik, hogy elsősorban nem az elméleti alapok kutatásának kiszélesítése a fő cél. Hazai adottságaink nem teszik lehetővé — nem is indokolják — a variációs elvek elméleti kérdéseinek széles körű, rendszeres és intenzív vizsgálatát. A 3.2 szakaszban tárgyalt körben bőven akad tennivaló, és ha — szerencsés esetben — sikerül elméleti értékű eredményre jutni, ez „melléktermékként” is kellően értékelhető.

Az eddigi tapasztalat szerint a funkcionálanalízis [18] és a numerikus alkalmazások növekvő jelentősége és vonzása elegendő ösztönzést is ad a

variációs elvek tanulmányozásához és használatához. A kutatás e területének jelentőségét napjainkban ezért már nem kell külön hangsúlyozni.

A variációs elvek és a mozaikmódszer kapcsolata felvet néhány érdekes — napjainkban vitatott — részletkérdést is. A véges elemes módszer, mint matematikai szempontból teljes szigorral kiépíthető közelítő eljárás, ma már általánosan elfogadott. Nem változtat ezen az a tény sem, hogy továbbra is gyakoriak az intuitív, szemléletre alapozott alkalmazások. Érdekes, és meggondolandó viszont az az álláspont, amely szerint e numerikus technika nem eléggé szellemes, szinte automatikussá teszi a feladatmegoldást és elsorvasztja a mérnöki, alkotó feladatmegoldó készséget. Ezért — vetik ellene a tudományterület elismert, vezető kutatói közül is többen — elsősorban azoknak ajánlható, akik idegenkednek egy adott feladat esetén a mélyebb meggondolásoktól, a nagyobb szellemi erő kifejtés árán elérhető, numerikus vonatkozásban már kevesebb ráfordítást igénylő számítási eljárások kidolgozásától.

El kell ismerni, hogy e megállapítás adott esetben találó lehet. Ugyanakkor viszont érdemes szem előtt tartani YOUNG egy megjegyzését, amely ugyan elsősorban a variációs elvek és a funkcionálanalízis szoros kapcsolatára vonatkozik, de a fenti összefüggésben is helytálló:

„A concept is like a public conveyance: it helps a person to reach his destination. Of course some people prefer to walk, but life is then not really long enough.” [32], p. 94.

Ha a véges elemek módszerét annak tekintjük, ami, azaz egyszerűen bázismegválasztási technikának, akkor a vita némileg szűkebb keretek közé szorítható: arra a kérdésre, hogy e technikai eszköz bevezetése mikor indokolt és mikor nem. A válasz nyilvánvalóan összefügg a mindenkori kutatói alkattal, matematikai ismeretszinttel, de az adott feladat természetével és a gépi számítási lehetőségekkel is. Ezért úgy tűnik, nem megalapozott a véges elemes módszer használóitól elvitatni az elméleti igényességet.

Egy másik, részben ismeretelméleti kérdés a következő: mi a magyarázata annak, hogy a newtoni leírásmód és a variációs megfogalmazás (a Hamilton-elv) oly sok esetben vezet azonos eredményre? Miért mutatkozik különböző fizikai elvekre épülő ismereteinkben redundancia? A felvázolt helyzetkép ismeretében tarthatónak látszik a következő gondolatmenet:

Adott mezőegyenletrendszerhez igen gyakran lehet konstruálni olyan funkcionált, amelynek stacionaritási feltétele éppen az alapegyenletek kielégülése. A kapcsolat azonban ilyenkor matematikai természetű. A két leírásmódhoz rendelt fizikai „elvek” a matematikai modell interpretációjaként értelmezendők, és nem kell szükségképpen függetlennek lenniük.

Ilyen felfogásból kiindulva megszűnik az a kényszerítő érzés, amely a nem-konzervatív rendszerek vizsgálatánál kellemetlen fogyatéknak tekintette energetikailag nem értelmezhető additív tagok figyelembevételét. Ha a vizsgált operátorhoz sikerült megfelelő bilineáris alakot találnunk, és az operá-

tor potenciálját felírtuk, kétségtelenül előny az, ha utóbbi fizikailag is értelmezhető. Nem kell azonban kételkednünk az így létrehozott módszer alkalmazhatóságában csak azért, mert a felírt funkcionálnak „nincs fizikai tartalma”. EULER említett (történeti érdekességű, de a tudományos vizsgálódás szempontjából nem mértékadó) megjegyzésére talán ez a helyes válasz.

A hazai kutatás előtt álló feladatokat tekintve elsősorban az alábbi kérdéseket ajánlhatjuk a kutatók figyelmébe:

- tovább kell folytatni a duális variációs elv-változatok kidolgozását, alsó-felső korlátok meghatározására alkalmas eljárások összeállítását;
- a gyakorlatban sűrűn előforduló nem-konzervatív feladatokhoz is keresni kell a megfelelő variációs elveket;
- figyelmet kell fordítani a helyes numerikus technika (bázisfüggvényter megválasztása, numerikus integrálformulák, általános algoritmusok, mátrixkezelő rendszerek) fejlesztésére;
- célszerű kimunkálni a kapcsolatot a variációs elvek és néhány szintén gyorsan fejlődő, alapelveiben hasonlóan általános terület (matematikai programozás, katasztrófa-elmélet) között;

A kutatás e területeken nemzetközi méretekben és intenzíven folyik — hazai eredményeink pedig a gyakorlatban közvetlenül is hasznosíthatók lesznek.

IRODALOM*

1. BARTA J.: A rugalmas lemez hajlítása (magántanári előadás — kézirat) 1939
2. BÉDA Gy.: A szilárd testek anyagtörvényei, *Műszaki Tudomány* 47, 427 (1973)
3. BÉDA Gy.: Variációs elvek, Tankönyvkiadó, 1974
4. BOSZNAY Á. — CSONKA P. — KOZÁK I. — SZABÓ J.: A műszaki mechanikai kutatás hazai helyzetképe, *Műszaki Tudomány*, 38, (1967), 5
5. BOSZNAY Á.: Kontinuumnak modellezett rúdszerkezet sajátfrekvenciáinak javítható közfogása, Doktori értekezés, 1974
6. BOSZNAY Á. — KOZÁK I. — KALISZKY S. — LAZÁNYI I. — VAJDA Z.: A hazai műszaki mechanikai kutatás, *Műszaki Tudomány*, 51, (1976), 391
7. BOSZNAY Á.: Old and New Methods for Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Structures, Előadás, Université de Liège, 1976. Nov.
8. ECSEDI I.: Variációs módszer összetett anyagú prizmatikus rúd csavarási feladatának megoldására, *Acta Techn. Hung.* Megjelenés alatt
9. ECSEDI I.: The Lower Bound for Torsional Rigidity of Elastic Non-Homogeneous Prismatical Bars, *NME Közlemények, D. Natural Sciences.* Megjelenés alatt
10. FEKETE S. — SCHARLE P.: A mozaikmódszer alapelve és alkalmazása az alapozási kontinuumfeladatokban, *SZÁMGÉP* (1971)
11. FEKETE S.: A variációs számítás numerikus módszerei, *SZÁMGÉP* (1975)
12. FEKETE S.: A variációs számítás újabb irodalmának feldolgozása, *SZÁMGÉP* (1975)
13. FEKETE S.: Az energiamódszer általánosítása és a szimultán minimalizálás, *Acta Techn. Hung.* Megjelenés alatt
14. FINLAYSON, B. A.: The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972
15. KALISZKY S. — SZILÁGYI Gy.: Általános szilárdságtan, Tankönyvkiadó, 1976
16. LANCZOS, C.: The Variational Principles of Mechanics, Toronto, 1949

* A fenti irodalomjegyzék csak néhány alapvető, összefoglaló munkát tartalmaz a nemzetközi irodalomból. A magyar szerzők azon munkáit sorolja csak fel, amelyeket a helyzetkép összeállítása során a szerzők közvetlenül felhasználtak.

17. MARCSUK, G. I.: A gépi matematika numerikus módszerei, Műszaki Kiadó, 1976
18. MÁTÉ L.: Funkcionálanalízis műszakiaknak, Műszaki Kiadó, 1976
19. ODEN, J. T.—REDDY, J. N.: Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer Verlag, 1976
20. PÁCZELT I.—HERPAI B.: Note to the Solution of Contact Problems of the Elastic Shells, *Euromech 66 Colloquium*, Jablonna, 1975
21. REUSS E.: Lüders-Hartmann vonalak csavart prizmatikus rúdban, I. *Magyar Mechanikai Konferencia*, 1967. (Miskolc)
22. ROLLER B.—SZENTIVÁNYI B.: Extrémum tételek és alkalmazásaik a rúd és felületszerkezetek másodrendű elméletében, *MTA Műszaki Mechanikai Munkaközösség, Tudományos ülészek*, 1974
23. ROLLER B.: Műszaki mechanikai kutatásaink a finit módszerek területén, *Műszaki Tudomány* 61, (1976), 377
24. SCHARLE P.: On the Relationship between Different Approximation Methods, *Acta Techn. Hung.* 82 (1976), 53
25. SCHECHTER, R. S.: The Variational Method in Engineering, McGraw-Hill, New York 1967
26. SZABÓ J.—SCHARLE P.: Über die Beziehungen zwischen der Theorie der Stabkonstruktionen und der Kontinuumaufgabe, *Acta Techn. Hung.* 79 (1974), 51
27. SZMODITS K.: A plaszticitástan extrémumtételei, *Építési és Közlekedéstudományi Közlemények*, 1 (1958), 295
28. TONTI, E.: On the Variational Formulation for Linear Initial Value Problems, *Annali Mat. Pura Appl.* 95 (1973), 331—360
29. VÖRÖS G.: A Modified Lagrangian Variational Principle for Discontinuous Elastic Stress and Strain Fields. *Euromech 66 Colloquium*, Jablonna 1975
30. VÖRÖS G.: Variational Principle for Discontinuous Stress-Displacement Field, *Third Nat. Congress on Mech.* Várna 1977
31. WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1968
32. YOUNG, L. C.: Calculus of Variation and Optimal Control Theory, Saunders, Philadelphia 1969
33. Вайнберг, М. М.: Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, 1956 г.
34. Вайнберг, М. М.: Вариационный метод и метод монотонных операторов, Наука, 1972 г.
35. Михлин, С. Г.: Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, 1950 г.
36. Михлин, С. Г.: Вариационные методы в математической физике, Изд. 1, 1957 г., Москва, Изд. 2, 1970 г., Москва, Наука.
37. Пацельт, И.: Итерационный метод для решения контактной задачи упругих систем с однородными связями, *Acta Technica*, 76, p. 217 (1974)
38. Пацельт, И.: О вариационных принципах в теории упругости для неоднородных тел, Институт Проблем Механики Академии Наук СССР, препринт № 98, Москва, 1977 г.
39. CSER, L. G.: Method of Calculation of Non-Stationary Deformation Processes, *Annales of the CIRP*. 25/I (1976)

A Survey on the Theoretical and Applied Research Work to the Principles of the Variation of Mechanics. The development of the application of principles and methods of variation is outlined. The latest and the most significant results as well as the situation with research work in Hungary are reported. Attention is called to some research objectives of topical interest.

Übersicht der theoretischen und angewandten Forschungsarbeit in Zusammenhang mit den Variationsprinzipien der Mechanik. Die Entwicklung der Anwendung der Variationsprinzipien und Methoden wird beschrieben. Die neuesten und wichtigsten Ergebnisse sind dargelegt und die Lage der heimischen Forschungsarbeit wird ausgewertet. Einige zeitgemäße Forschungsziele werden erwähnt.

A SZÁL-MÁTRIX TAPADÁSI HIBÁK VIZSGÁLATA

IJJAS GYÖRGY*

[Beérkezett: 1977. június 27-én]

Az 1960-as évektől kezdve igen sokan foglalkoztak a szálerősítésű műanyagok keresztirányú modulusai meghatározásának kérdésével. Eddig nem történt kísérlet arra, hogy a szál-mátrix tapadási hibák keresztmetszeti eloszlásának hatását vizsgálják. A szerző egy ismétlődő elem negyedben vizsgálta a tapadási hibák eloszlásának hatását, síkbeli alakváltozási állapot feltételezésével. Elemzése révén megállapította, hogy ezek hatása nem elhanyagolható a keresztirányú modulus szempontjából. Ugyancsak lényeges megállapítást tett a tapadási hibahely és a repedésérzékenység összefüggésének vonatkozásában. További meglepő eredményeket kapott a mátrix energiatartalmának meghatározása során.

1. Bevezetés

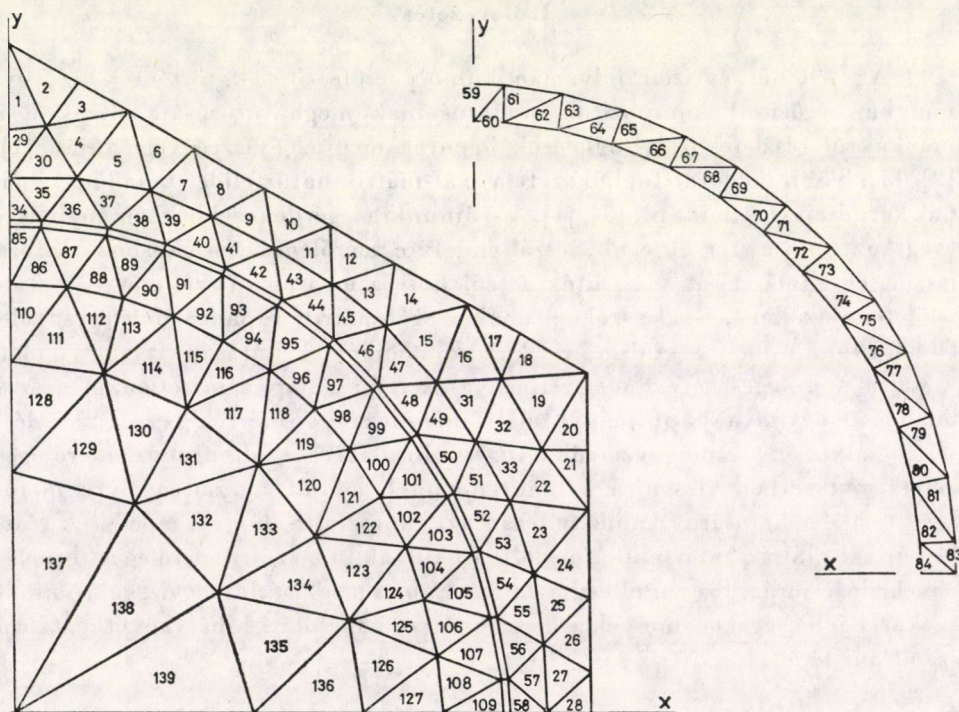
Az 1960-as évtized folyamán komoly erőfeszítések történtek az egyirányban erősített kompozitok modulusainak meghatározására. Ezekről a munkákról részletes összefoglalások jelentek meg az évtized vége táján [1], [2], [3]. Több dolgozat foglalkozott a szál-mátrix határfelület tapadási hibáinak kérdéseivel is, mint pl. [5], [4]. A számunkra legérdekesebbekben, melyekre hivatkoztunk, a szerzők csak a száltengelyre merőleges normálishoz tartozó feszültségek eloszlását vizsgálták a szál hossza mentén, a szál-mátrix határfelületen, azokon a szakaszokon, ahol a szál-mátrix tapadás tökéletes volt. Olyan munka, mely a szál-mátrix kapcsolat hibáinak hatását vizsgálta volna a száltra merőleges keresztmetszetben, a szerző számára ismeretlen. A szerző mindössze egy olyan tanulmányt talált, mely bizonyos mértékig ezzel a kérdéssel foglalkozott. Ennek szerzője ADAMS [6], aki a száltengelyre merőleges keresztmetszetben vizsgálta a tönkremenetel módját a száltengelyre merőleges terhelés hatására. Analízise során azt tapasztalta, hogy a repedések részben a szál-mátrix határfelület mentén alakulnak ki a száltra merőleges terhelés növekedése során. Szerző ebben a dolgozatában megkísérli megvizsgálni mindazokat a jelenségeket, melyekre a szál-mátrix kapcsolati hibák következtében számítani lehet.

* Ijjas György, 1147 Budapest, Öv u. 165.

2. A probléma felvetése és a megoldás módja

Munkánk során egy ismétlődő elemet vizsgáltunk és felhasználva ennek kétszeres szimmetriáját — ami az analízis e módjának bizonyos kötöttségeivel is együtt jár (a felületi hibák elhelyezkedése is szükségszerűen csak szimmetrikus lehet) — ennek csak egy negyedét elemeztük numerikusan. Az ismétlődő elem alakját ADAMS és TSAI [7] nyomán hatszög alakúra választottuk, a keresztmetszetben síkbeli alakváltozási állapotot tételeztünk fel, amelynek analízisét végeelem módszerrel végeztük el. A végelem felosztás az 1. ábrán látható. Az alkalmazott háromszög elemek ún. állandó nyúlásúak voltak. A síkbeli alakváltozás feltételezése elegendően hosszú szál-mátrix tapadási hiba esetén a Saint-Venant-elv, valamint az [5]-ben bemutatott feszültségeloszlás alapján elfogadható. A végelem-analízis során csak a rugalmas állapotot vizsgáltuk. A mátrix/szál rugalmassági modulusainak aránya 1/10 volt, a szál Poisson tényezője 0,2; a mátrixé 0,34.

A végelem-analízis során a szál-mátrix kapcsolati hibákat úgy vettük figyelembe, hogy azokon a szakaszokon, ahol a hiba létezését feltételeztük, az elemek rugalmassági modulusait zérusnak vettük. Ezek az elemek az 59—



1. ábra. A kompozit keresztmetszet negyedének háromszög felosztása végeelem analízishez

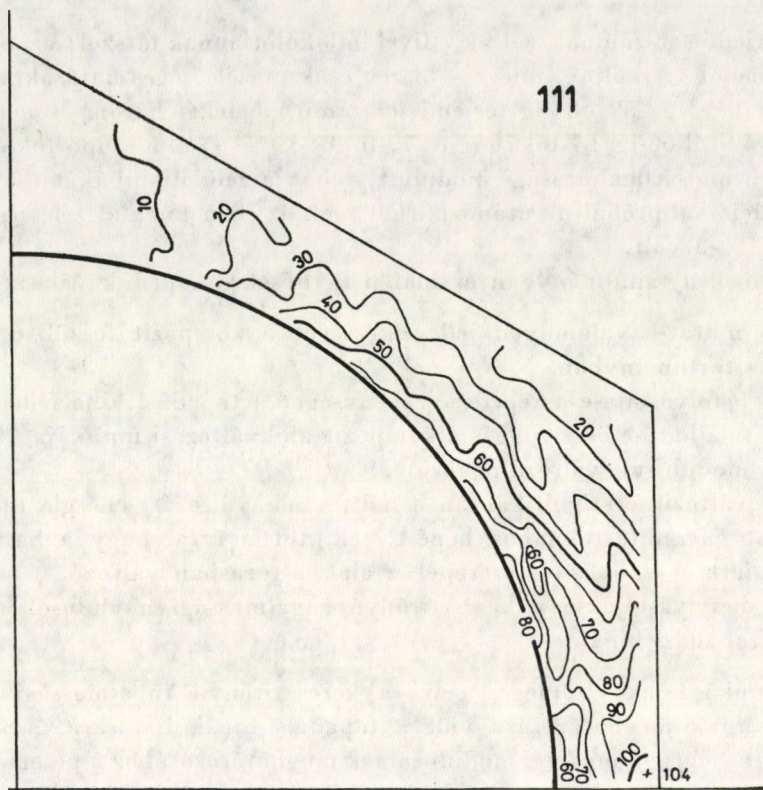
84-ig terjedő sorszámúak voltak. Mivel indokolatlannak látszott az, hogy igen sok variációt vizsgáljunk meg — hiszen csak a szélsőséges hatásokra voltunk kíváncsiak — az 59—84-ig terjedő sorszámú elemeket három csoportba rendeztük (59-től 66-ig, 67-től 76-ig és 77-től 84-ig) és ezek a csoportok egyszerre kaptak azonos rugalmassági moduluszt, tehát a felületi hibákat a csoportok kombinációival próbáltuk utánózni. Ezeknek az elemeknek a szélessége a szálatmérő 1%-a volt.

Ebben a tanulmányban az alábbi kérdésekre kaptunk választ:

- a) mutat-e valamilyen jellegzetességet a kompozit feszültségeloszlása rugalmas tartományban,
- b) befolyásolja-e a repedésérzékenységet a tapadási hiba fellépése,
- c) található-e összefüggés a kompozit alakváltozási munkája és a rugalmassági modulusuk változása között,
- d) változik-e szignifikánsan a mátrix alakváltozási energia tartalma a kompozit energiatartalmához képest, tekintettel arra, hogy a határfelületi hibák miatt a szálerősítés szerepe az alakváltozásban változó,
- e) befolyásolják-e a keresztirányú rugalmassági modulusokat a szálmátrix tapadási hibák.

Munkánknak elsődleges célja a keresztirányú rugalmassági modulus változásainak meghatározása volt a tapadási hibák hatására. A kompozit keresztirányú rugalmassági modulusainak meghatározásához a peremek elmozdulását úgy vettük fel, hogy makroszkopikus szempontból közel egytengelyű állapotot kapjunk. Ezt úgy értük el, hogy ugyanazt a száltartalmat vizsgáltuk, melyhez tartozó rugalmassági modulusokat PICKETT [8] dolgozatában meghatározta (63 térfogat%). Így előírva egy, az x tengelyre merőleges irányú peremnek az x tengellyel párhuzamos elmozdulását, az egyes perempontok y tengellyel párhuzamos elmozdulása egyszerűen meghatározható. Ugyanígy egyszerűen meghatározható a hatszögnegyed ferde peremének x , ill. y tengelyekkel párhuzamos elmozduláskomponense. Ha ehhez az elmozdulásrendszerhez tartozó peremmenti feszültségek eloszlását meghatározzuk, akkor a homogén testek rugalmasságtanának anyagtörvényei alapján a keresztirányú rugalmassági modulusok numerikusan egyszerűen meghatározhatók. Egyébként makroszkopikus szempontból a fentiek alapján csak akkor kapunk egytengelyű állapotot, ha a szálmátrix tapadás tökéletes.

Annak megfelelően, hogy a szál pereme mentén mely harmadba eső elemcsoportok rugalmassági modulusát vesszük fel zérusnak, ill. melyeket nem, nyolc esetet különböztethetünk meg. Ebből egyet — amikor nincs tapadás a szál és mátrix közt — nem vizsgáltunk meg. Egynek eredményei, nevezetesen amikor csak az y tengelyhez legközelebb eső harmadban tételeztünk fel kapcsolatot arra mutattak, hogy a használt modell erre az esetre nem alkalmazható.

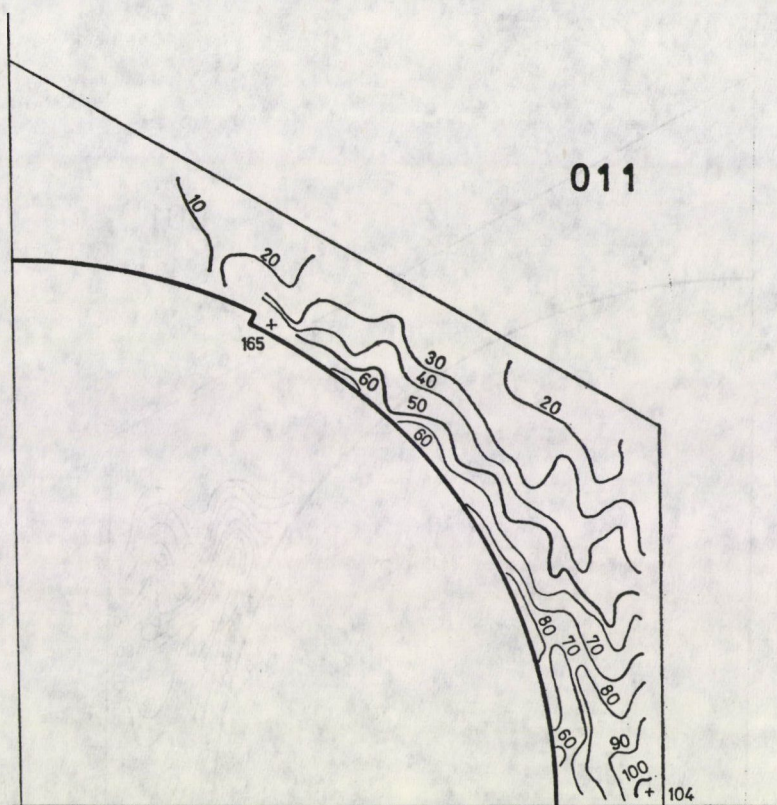


2. ábra. A feszültségdeviátor második invariánsa értékének eloszlása a kompozitelem negyedének keresztmetszetében (a megadott értékek 10^3 -nal szorozva, kp^2/cm^4 -ben értendők)
 a) A szál-mátrix tapadás tökéletes; b) A szál-mátrix tapadás az y tengelyhez legközelebb eső harmadban nincs; c) A szál-mátrix tapadás az x tengelyhez legközelebb eső harmadban van; d) A szál-mátrix tapadás az x tengelyhez legközelebb eső harmadban nincs; e) A szál-mátrix tapadás csak a középső harmadban van; f) A szál-mátrix tapadás a középső harmadban nincs

Későbbiekben, hogy a tárgyalást rövidítsük, az alábbi jelölést vezettük be. Ha a hatszögnegyed adott harmadában a tapadás tökéletes volt a szál és mátrix között, azt 1-es számjeggyel, ha nem volt tapadás, azt 0-ával jelöltük. Így a különböző esetek három számjeggyel az 1-es és 0-ás számjegyek kombinációival jelölhetők, mégpedig úgy, hogy az 1. ábrán látható hatszög y tengelyhez legközelebb eső harmadát jelöljük az első számjeggyel, és így haladunk az óramutató járásával ellentétes irányban.

3. Az eredmények értékelése

Meghatároztuk a háromszög hálózat háromszög súlypontjaihoz rendelhető feszültségek értékét. Érdekességgént az adódott, hogy a vizsgált hat esetből kettőben a σ_y érték minimuma és a τ_{xy} maximuma a mátrixban azonos

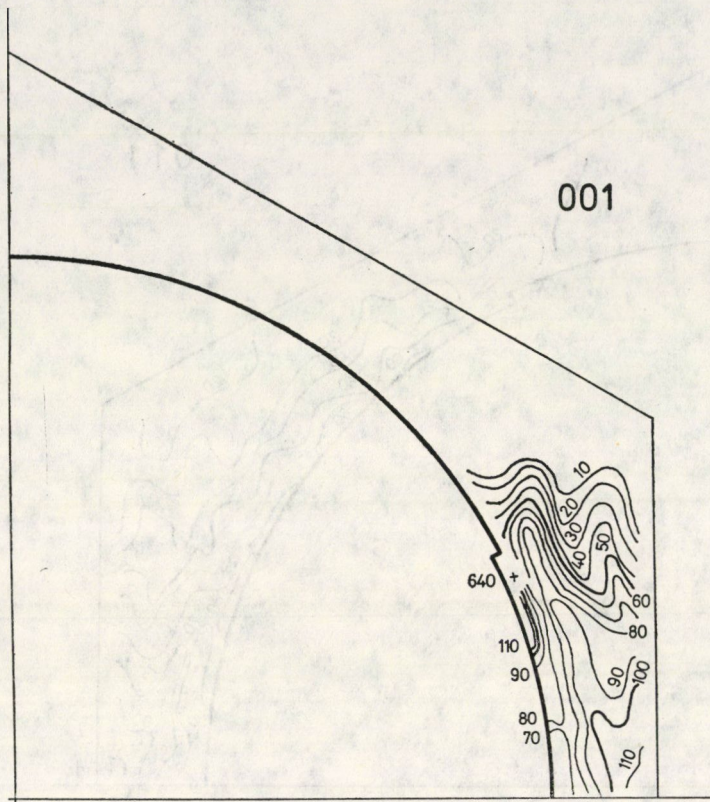


2. b) ábra

pontban lépett fel. Ugyanezen két esetben kaptuk a σ_x maximumát és a τ_{xy} minimum értékét a mátrixban ugyanazon pontban. (Lásd 1. táblázat első két sorát.) Ugyancsak két esetben a σ_y minimuma és a τ_{xy} maximuma a mátrixban azonos pontban lépett fel amellet, hogy a σ_y maximuma és a τ_{xy} minimuma is azonos pontban lépett fel (1. táblázat utolsó két sora).

1. táblázat

Jel	Elem sorszám	σ_x kp/cm ²	Elem sorszám	σ_y kp/cm ²	Elem sorszám	τ_{xy} kp/cm ²
1,0,1	36	-2,97242	66	-429,031	77	-523,151
	77	1592,40	84	457,741	66	883,809
0,0,1	48	-4,3627	50	-288,771	77	-558,833
	77	1620,77	84	461,613	50	376,528
0,1,1	40	-65,0264	67	-283,361	79	-242,304
	58	899,604	84	455,872	67	467,039
1,1,0	55	-17,8217	66	-178,82	52	-436,213
	76	1483,92	52	249,554	66	236,217
0,1,0	40	-76,6735	67	-343,811	52	-437,894
	76	1488,98	52	250,675	67	466,897

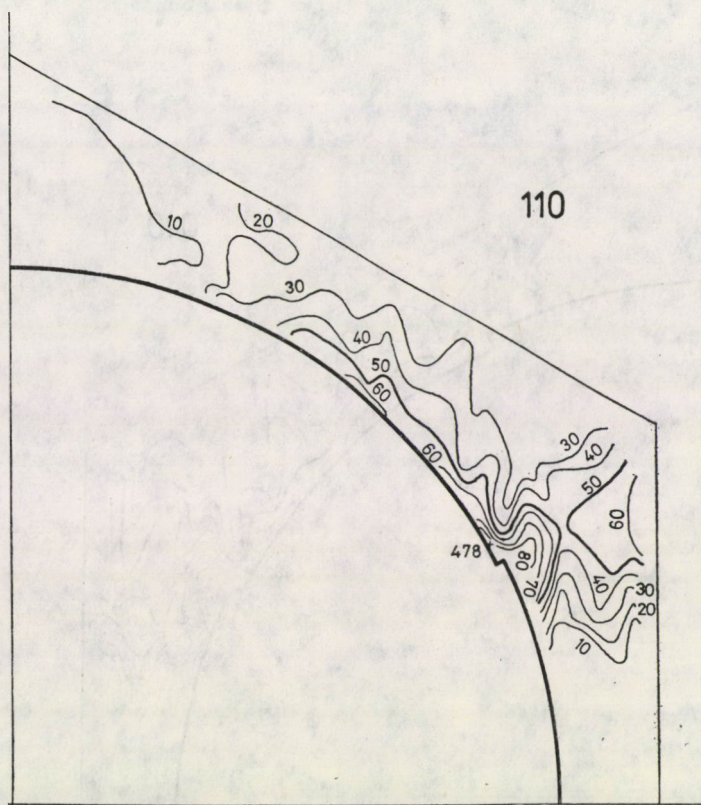


2. c) ábra

Az első két esetben az a közös jellemző, hogy a vizsgált ismétlődő elem-negyed mátrix-üvegszál határfelület középső harmadában van tapadási hiba, az óramutató járásával ellentétes irányban értelmezett harmadik harmadban nincs tapadási hiba. Az utóbb említett két esetben pedig az előbbi ellentettje igaz, vagyis a középső harmadban nincs tapadási hiba, míg a harmadikban igen.

Az, hogy a feszültségdeviátor második invariánsának maximuma öt esetből négyben azonos ponton veszi fel maximumát, a fenti maximum-minimum párokkal algebrailag belátható. Az ötödik esetben a feszültségdeviátor második invariánsának maximuma σ_x lokális maximumával azonos pontban lépett fel. Érdekes, hogy a fenti jelenség, ti. az, hogy a feszültségkomponensek maximum, ill. minimumértékei egy pontban lépnek fel, számítás szerint a szálzárvány metszetében nem fordult elő. Érdekességgé még meg lehet jegyezni, hogy valamennyi esetben a 28-as jelű elem főfeszültségi tengelyei párhuzamosak az $x-y$ tengelyekkel.

Megvizsgáltuk a feszültségdeviátor második invariánsának eloszlását a gyanta keresztmetszetben is. Ezeket a 2. ábrán megadtuk.

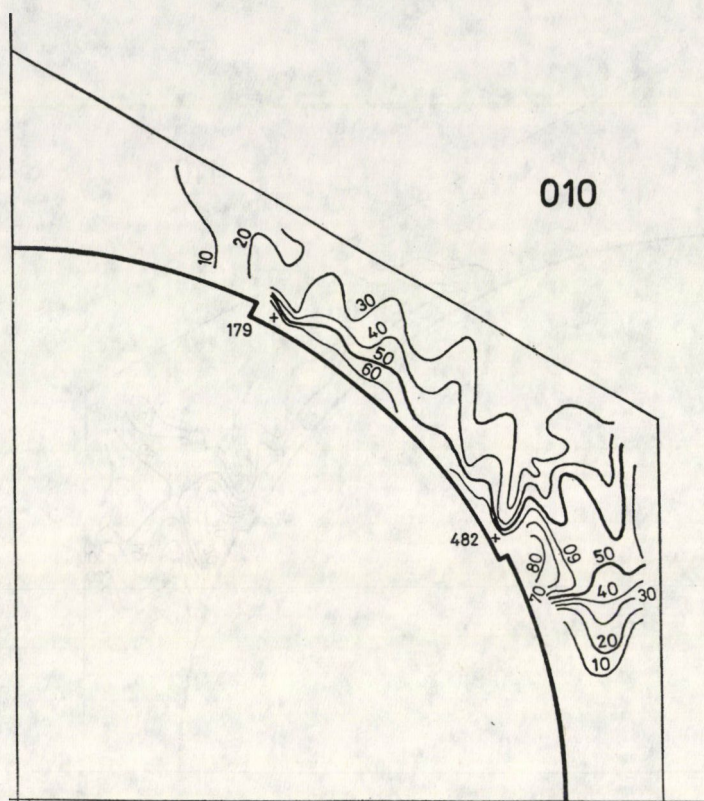


2. d) ábra

Mivel ez az érték a Huber—Mises—Hencky-féle folyási feltétel alapját képezi, így ennek változásából következtetni lehet a várható repedéskép kialakulására, ill. a repedésérzékenységre. A Huber—Mises—Hencky-feltételt természetesen csak fenntartásokkal szabad alkalmazni a gyanta tönkremenetelére, azonban véleményünk szerint arra elegendő információt szolgáltat, hogy melyik a legveszélyesebb szál-mátrix tapadási hibahely az adott geometriájú szálelrendezés mellett. Egyértelműen megállapítható, hogy valamennyi esetben a tapadási hibahely azon végpontja érzékenyebb a repedés szempontjából, amely a vízszintes x tengelyhez, ill. a hatszögnegyed y tengellyel párhuzamos oldalához közelebb esik. Ez a megfigyelés a várakozásnak egyébként megfelelt.

A hibahelyek és a feszültségdeviátorok második invariánsa relatív értékeinek összevetéséből arra lehet következtetni, hogy az a legveszélyesebb eset, amikor a tapadási hiba a középső harmadban lép fel. Ennél kevésbé érdekes az óramutató járásával azonos irányban a harmadik harmadba eső hibahely.

Tökéletes tapadás esetében a 28-as számú elemben lépett fel a feszültségdeviátor második invariánsának maximuma. Ehhez hasonló jelenséget figyelt

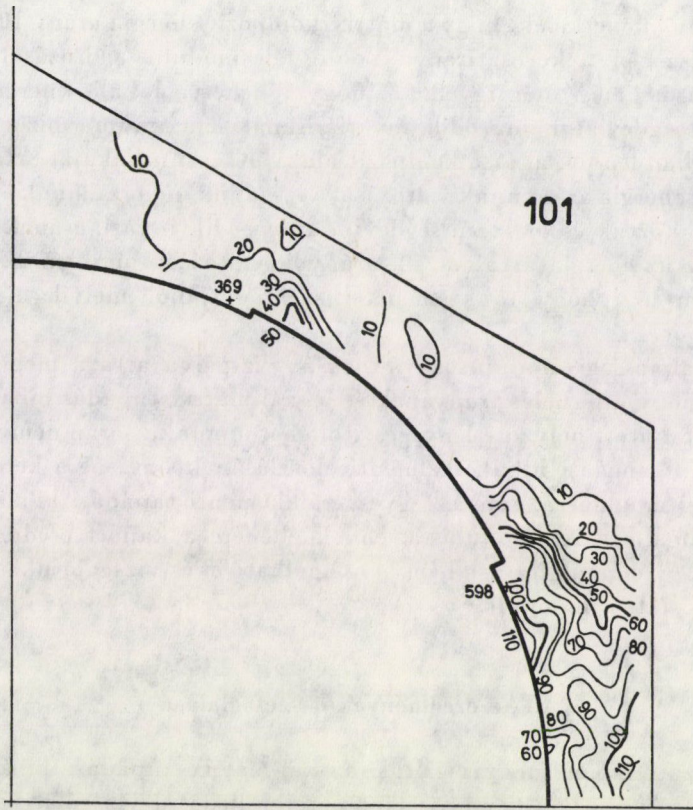


2. e) ábra

meg ADAMS [6] is, aki jóllehet négyzetes ismétlődő elemet vizsgált, és az általa alkalmazott törési kritérium is más volt, mégis azt találta, hogy hasonló helyzetű pontban indult meg a tönkremenetel. Ennek alapján megalapozottnak tarthatjuk azt a megállapítást, hogy az ilyen típusú kompozit tönkremeneteli módja rendszerint a matrix tönkremenetele. Lásd még [9].

Meghatároztuk numerikus integrálással a kompozit alakváltozási munkáját és a gyanta alakváltozási energiáját. Ami első pillanatban meglepő, hogy a gyanta alakváltozási energiája a teljes alakváltozási munkának legjobb esetben is 84%-át teszi ki, amikor 63% száltérfogat tartalom mellett a kompozit Young-féle rugalmassági modulusa a gyanta rugalmassági modulusához képest 3,85-szörös (2. táblázat).

Mindenképpen érdekességként kell megjegyezni, hogy a mátrix energia arányának változása a kompozit energiájához képest nem mutat szoros összefüggést a rugalmassági jellemzők változásával, szemben azzal az egyébként várható ténnyel, hogy a kompozit alakváltozási munkája tendenciájában azonosan változik a Young-féle rugalmassági modulusal. Az is meglepő, bár



2. f) ábra

2. táblázat

Jel	E értéke	ν értéke	$\frac{E \text{ mátrix}}{E \text{ kompozit}}$	$\frac{\nu \text{ mátrix}}{\nu \text{ kompozit}}$	A kompozit alakváltozási energiája	$\frac{\text{Mátrix energia}}{\text{kompozit energia}}$	$\frac{K_{2\max}}{K_{2\max}(1,1,1)}$
1,1,1	1,00	1,00	0,26	0,9	1,00	0,84	1,00
0,1,1	0,99	1,08	0,26	0,83	0,99	0,88	1,595
0,0,1	0,71	1,08	0,36	0,83	0,75	0,88	6,15
1,0,0	—	—	—	—	—	—	—
1,1,0	0,47	0,60	0,55	1,50	0,51	0,94	4,61
0,1,0	0,47	0,81	0,55	1,10	0,49	0,93	4,65
1,0,1	0,83	0,93	0,31	0,97	0,80	0,88	5,60

E = rug. modulus jele.

ν = a Poisson tényező jele.

K_2 = a feszültségdeviátor második invariánsa.

a korábbiakból következik, hogy a mátrix/kompozit energia arány 10–12%-os változása kíséri pl. a keresztirányú Young-féle modulus változását.

Ezenkívül még megfigyelhető, hogy jóllehet a lokális energia sűrűség és a feszültségdeviátor második invariánsának maximuma bizonyíthatóan azonos pontban lép fel, akár a kompozit alakváltozási munkáját, akár a gyan-ta/kompozit energia arányának változását vizsgáljuk, nem találunk egyértelmű összefüggést köztük és a feszültségdeviátor második invariánsának változása között. Azaz az energiatartalom, ill. arányok változása, úgy tűnik, nem jelzi egyértelműen azt, hogy tönkremenetel szempontjából melyik a kedvezőtlenebb állapot.

A rugalmassági modulusok változását vizsgálva arra a meggyőződésre juthatunk, hogy a terhelés irányának és a szál-mátrix tapadás hibáknak egymáshoz viszonyított helyzete lényeges. Jóllehet a munka során nem vizsgáltuk a szál-mátrix tapadási hibák száلمي eloszlásának hatását a keresztirányú rugalmassági modulusra, sem az egyes szálak menti tapadási hibák együttes hatását a rugalmassági modulusra, ennek ellenére a kapott eredmények azt sugallják, hogy e hibák hatása nem hanyagolható el és vizsgálatukhoz további erőfeszítések tétele indokolt.

4. Az eredmények összefoglalása

Dolgozatunkban megvizsgáltuk a szál-mátrix tapadási hibák hatását az üvegszálerősítésű kompozit viselkedésére. Jóllehet a vizsgálati lehetőségek korlátozott volta miatt meglehetősen extrém eseteket tudtunk csak elemezni, lényeges megállapításokat tehetünk. Ezek közül a két legfontosabb, hogy a szál-mátrix tapadási hibák helye és a keresztirányú rugalmassági modulusok, valamint a repedésérzékenység összefüggést mutat. Így a legkisebb keresztirányú rugalmassági modulus akkor lép fel, ha a tapadási hiba az óramutató járásával azonos irányban értelmezett harmadik harmadba esik, míg repedési érzékenység szempontjából a legnagyobb értékek akkor várhatók, ha a tapadási hiba a középső harmadba esik. Ezek a megállapítások azért lényegesek, mert a laminálás során alkalmazott nyomás iránya merőleges a lemezes szerkezetek síkjában működő igénybevételek irányára, és így külön gondot kell fordítani a laminálási nyomásra merőleges irányban a megfelelő tapadás biztosítására.

Meglepő eredményt kaptunk arra vonatkozólag, hogy a mátrix alakváltozási energia tartalma igen magas a kompozit energiatartalmához képest.

A fentiek alapján indokoltnak tartjuk, hogy további vizsgálatokat végezzünk arra vonatkozólag, hogy a tapadási hibák száلمي eloszlása milyen mértékben befolyásolja az itt nyert tapasztalatokat.

IRODALOM

1. PAGANO, V. J.—TSAI, S. W.: Micromechanics of Composite Media. „Composite Materials Workshop” (Edited by S. W. Tasi, J. C. Halpin, V. J. Pagano, Progress in Materials Science Series, Vol. 1. 1968, Technomic Publishing Co.) p. 1—8.
2. CHAMIS, C. C.—SENDECKYJ, G. P.: Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites. *J. of Composite Materials* (1968), 332—358.
3. ASHTON, J. E.—HALPIN, J. C.—PETIT, P. M.: Primer on Composite Materials. Analysis — Progress in Materials Series Vol. III. 1969. Technomic Publishing Co., p. 74—77
4. ERDOGAN, F.—ÖZBEK, T.: Stresses in Fiber Reinforced Composites with Imperfect Bonding. *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, (1969), 865
5. ÖZBEK, T.—ERDOGAN, F.: Some Elasticity Problems in Fiber Reinforced Composites with Imperfect Bonds. *International Journal of Engineering Sciences* (1969), 931
6. ADAMS, D. F.: Elastoplastic Crack Propagation in a Transversely Loaded Unidirectional Composite. *J. of Composite Materials* (1974), 38—54
7. ADAMS, D. F.—TSAI, S. W.: The Influence of Random Filament Packing on the Transverse Stiffness of Unidirectional Composites. *J. of Composite Materials* (1969), 368—381
8. PICKETT, G.: Analytical Procedures for Predicting the Mechanical Properties of Fiber Reinforced Composites. *AFML-TR-65-220*, 1965
9. SIH, G. C.—CHEN, E. P.—HUANG, S. L.—MCQUILLEN, E. C.: Material Characterisation on the Fracture of Filament Reinforced Composites. *J. of Composite Materials* (1975), 167—186

Investigation of the Adherence Defects of the Fibre Matrix. — Since the beginning of the sixties, many authors have investigated the question of determining the cross-moduli of fibre-reinforced plastics. So far, no attempt has been made to investigate the influence of the adherence defect distribution of the fibre matrix. The author has investigated the effect of this distribution in a repeating element, assuming plane state of strain. It was found that the effect of the defects cannot be neglected from the point of view of the cross moduli. He has also drawn essential conclusions as to the relation between adherence defect locations and the sensitivity to cracking. Further surprising results were obtained when determining the energy content of the matrix.

Untersuchung der Haftfehler der Fasermatrix. — Seit den sechziger Jahren haben sich viele Wissenschaftler mit den Fragen der Bestimmung der Quermodule von faserverstärkten Kunststoffen beschäftigt. Es wurde jedoch nicht versucht, den Einfluß der Verteilung der Haftfehler der Fasermatrix zu untersuchen. Der Verfasser untersuchte den Einfluß dieser Verteilung in einem sich wiederholenden Element unter Voraussetzung eines ebenen Verformungszustandes. Er konnte feststellen, daß ihr Einfluß auf den Quermodul nicht vernachlässigbar ist. Ferner machte er wesentliche Feststellungen betreffend den Zusammenhang zwischen den Haftfehlerstellen und der Rißempfindlichkeit. Weitere überraschende Ergebnisse erhielt er bei der Bestimmung des Energieinhalts der Matrix.

AZ OTTO-MOTOROKKAL KAPCSOLATOS HAZAI FEJLESZTŐ TEVÉKENYSÉG 1945-IG*

TERPLÁN SÁNDOR**

[Beérkezett: 1976. december 6-án]

Az Otto-motor fejlesztésével kapcsolatban elsőként CSONKA János nevét kell megemlítenünk. Több éves külföldi tanulmányait megszakítva 1877-ben, 25 éves korában lett az akkori Műegyetem Gépiparműtani Tanszéke tanműhelyének a vezetője. Tájékozottságára és helyes műszaki ítélőképességére jellemző, hogy a tanműhely energiaellátásának biztosítására nem a még Párizsban megismert Lenoir-féle gázgépet ajánlotta, hanem az Otto—Langen-féle atmoszferikus gázgépet. A mai értelemben vett Otto-motor megismerése után pedig elsőként mérte fel ennek a motornak a nagy jelentőségét. Ezt igazolja az is, hogy az egyetemi hallgatók oktatására elkészítette az első Otto-motor kicsinyített, részben metszett, mozgatható modelljét, amely ma a Magyar Műszaki Múzeum tulajdonában van. Látva a motor fejlesztési szükségességét, maga is hozzáfogott egy gázmotor tervezéséhez és kivitelezéséhez. Ez az *első magyar gázmotor* 1879-ben készült el. CSONKA János jelentős újítása volt, hogy a szívást is szeleppel vezérelte, és nem tolattyúval, mint az az első Otto-motoroknál történt. A motor kifogástalanul működött és éveken át biztosította a tanműhely energiaellátását. A szerzett kedvező tapasztalatok és a veleszületett újítókészség alapján szüntelenül foglalkozott a továbbfejlesztés lehetőségével és 1882-ben szabadalmaztatta, megtervezte és elkészítette az *első magyar gáz- és petróleummotort*. Ez egy kétütemű, szelepes vezérlésű, víz-hűtéses, keresztfejes, megszakító gyújtással működő, 3 lóerős motor volt és 1883-tól 1888-ig volt üzemben a Műegyetemen.

Jelentős és szerencsés fordulat volt CSONKA János életében, hogy 1887-ben a Ganz-gyár műszaki vezetője: MECHWART András felkérte az átvett leobensdorfi motorok üzemképessé tételére. A motorokkal a gyár fiatal mérnöke: BÁNKI Donát már előzőleg foglalkozott, de a kísérletek nem voltak kielégítőek és örömmel fogadta a nála 7 évvel idősebb, nagy tudású gyakorlati szakember segítségét. A sikeres együttműködés során egy életre kiterjedő

* A Gépipari Tudományos Egyesület Győri Területi Szervezete, a Közlekedéstudományi Egyesület Győri Szervezete és a Győri Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola által 1976. november 18—19-én szervezett „100 éves az Otto-motor” című rendezvény plenáris ülésén elhangzott előadás alapján.

** Terplán Sándor, 1026 Budapest, Hágó u. 6.

barátság fejlődött ki a két kitűnő szakember között, amelynek számos világra-szólo találmány létrejött volt köszönhető.

BÁNKI Donát neve egyébként ekkor már szintén ismert volt a szak-körök előtt. Ugyanis már 1880-ban értékes tanulmányt jelentetett meg a gáz-gépek méretezéséről és a keverékek meghatározásáról. Egy újszerűsített sebességszabályozót szabadalmaztatott 1882-ben és egy dinamométert 1885-ben. Együttműködésük során pedig rendre jelentették be CSONKA Jánossal közös találmányaikat a motorokkal kapcsolatban, így 1889-ben hármat, 1890-ben a következőt. BÁNKI Donát nevét külföldön is elismertté tette „*A gázmotorok elmélete*” című tanulmánya, mely 1892-ben jelent meg.

Legnagyobb jelentőségű közös találmányukat 1893. február 11-én jelen-tették be szabadalomra „Újítások petróleum motorokon” címmel. A terje-delmes szabadalmi leírás és rajz többek között a *porlasztó karburátort* is tartal-mazta, elsőként a világon. Később a porlasztóra vonatkozó szabadalmat az Egyesült Államokban is bejelentették 1896-ban és azt a következő évben meg is kapták. A ma üzemeltetett sok száz millió Otto-motoron most is olyan elven működő porlasztó van, amelyet egykor BÁNKI Donát és CSONKA János szaba-dalmaztatott. Szabadalmaikat a Ganz-gyár vette meg. Ez a gyár sorozatban gyártotta, és nagy sikerrel értékesítette a csakhamar híressé vált Bánki—Csonka-motorokat. Említésre érdemes az is, mert rámutat a motorok kiváló minőségére, hogy az első motort 52 évi használat után, a 12. gazdájánál találták meg, akitől a Csonka Gépgyár házi múzeumába, innen pedig a Közlekedési Múzeumba került. Egy ilyen motoron kísérletezte ki BÁNKI Donát 1898-ban a vízbeporlasztást. A motor az 1900. évi párizsi világkiállításon díjat nyert és egyik példánya bekerült a világhírű müncheni Deutsches Museum-ba is. A két kiváló feltaláló termékeny együttműködését további szabadalmak jelezték.

BÁNKI Donát 1894-ben kéthengeres motorral felszerelt kerékpárt szer-kesztett, melynek motorját CSONKA János készítette. Szoros együttműködé-süket érdekes módon éppen az a körülmény lazította meg, hogy közös munka-helyre kerültek. BÁNKI Donát ugyanis 1898-ban, pályázat mellőzésével meg-hívást kapott a Műegyetem Gépszerkezettani tanszékére, majd 1900-ban átvette a Hidraulika és Hidrogépek tanszékét és ezzel működési területe ter-mészetszerűleg megváltozott. De 1901-ben még szerkeszt egy négykerekű, mellsőkerék hajtású kis gépkocsit, melynek keresztbenálló, kéthengeres, lég-hűtéses motorját CSONKA János készítette. Meg kell említeni, hogy ez a motor-elrendezés ma a legkorszerűbbnek számít.

A századfordulón kibővül CSONKA János érdeklődési köre is és a gép-járművek felé fordul. Mint a Magyar Posta pályázatának egyik nyertese tervez és elkészít 1900-ban egy levélgyűjtő motoros triciklit. Az Otto-motor meg-szakító gyújtással, önműködő szívószeleppel, vezérelt kipufogó szeleppel és dekompresszorral készült. A Csonka-féle triciklik több évtizeden át közismert

járművei voltak a budapesti utcáknak, mert a kezdeti sikerek után a Posta sok hasonló levélgyűjtőt rendelt. Az egyik triciklit az 1906. évi londoni kiállításon is bemutatták. *A Csonka-féle levélgyűjtők motorjain került először alkalmazásra hazánkban mint szerkezeti anyag az alumínium.*

CSONKA János ezután négykerekű kísérleti járműveket is készített, ezeket azonban még nem hozta forgalomba. A jól sikerült motorokat azonban értékesítette és így került az egyik motor LÓCZY Lajos csónakjába, így ez lett az *első magyar motorcsónak*. A neves Balaton-kutató ezen végezte híressé vált kísérleteit. Egy másik kéthengeres, vízhűtéses motort a Köhler-gyár tűzoltó fecskendőbe szereltetett, ezek lettek az *első magyar tűzoltó motorok*.

Ilyen előzmények után az első magyar Otto-motoros gépkocsi születése nem sokáig váratott magára. Kedvező fordulatot jelentett, hogy a Magyar Posta 1904-ben csomagszállító gépkocsik szállítására írt ki versenytárgyalást. A 8 pályázó közül a bíráló bizottság két magyar cégnek a CSONKA János által készített terveit fogadta el és ezeknél 4—4 darab csomagszállító gépkocsit rendelt. Külön öröm volt Győrben megemlékezni arról, hogy az egyik gyár éppen a győri Magyar Vagon- és Gépgyár volt. A másik nyertes a budapesti Röck Gépgyár volt.

A gyárak CSONKA János irányításával gyorsan munkához láttak és 1905 májusában elkészült az első magyar gépkocsi: a Csonka-féle csomagszállító autó. Nem csoda, hogy ez az abban az évben rendezett Első Magyar Iparkiállítás legnagyobb sikert aratott darabja volt.

CSONKA János az itt alkalmazott Otto-motorok tervezésénél, szerkesztésénél és kivitelezésénél, a külföldi fejlődést megelőzve, *több forradalmi újítást alkalmazott*, amelyek később általánosan elfogadottak lettek. A négyütemű, négyhengeres, vízhűtéses motor furata 90 mm, lökete 100 mm volt. Ez a feltűnően rövid löket több mint fél évszázaddal előzte meg a későbbi fejlődést.

Az első gépkocsit a Posta 1906. január 15-én állította forgalomba és az 25 évig volt szolgálatban, mialatt mintegy félmillió kilométert futott be. A sikerek hatására nemcsak ebből az első, 2 m³-es típusból rendeltek további 16 darabot, hanem a CSONKA János által tervezett, továbbfejlesztett 3 m³-es csomagszállító autóból is rendeltek 38 darabot, ami abban az időben már jelentős tételnek számított. Ezek is Győrben készültek, a tervező személyes felügyelete alatt, aki nemcsak invenciózus feltaláló és kiváló gazdasági érzékkel bíró szakember volt, hanem kiváló és fáradhatatlan szervező is. Budapestről hetenként felutazott Győrbe, megkövetelve a szigorú technológiai fegyelmet. Ennek volt köszönhető, hogy a gyár termékei egyre inkább megfeleltek a szigorú minőségi követelményeknek. Ezek alapján nem túlzás megállapítani, hogy Győrben CSONKA János alapozta meg az autógyártást.

A nagyobb gépkocsik természetesen nagyobb teljesítményű motorokat követeltek és lényeges újításokkal készültek az Otto-motorok is. Nagyobb lett

a motorok fordulatszáma, ehhez azonban már vezérelni kellett a szívószelepet is. A motornak két vezértengelye volt és 2—2 henger alkotott egy tömböt. Ezek a motorok is, mint az előzőek, nagyfeszültségű Bosch gyertyagyújtással működtek.

A sikerek alapján sorra készültek személyautók és motoros gépcsoportok a legkülönbélebb célokra. Ezek között is meg kell említeni az *első magyar kompresszoros Otto-motort*, amely egyébként a világon is az elsők között volt.

A közvetlen ipari tevékenységet azonban 1912-ben CSONKA János beszüntette, mert a fejlődő műegyetemi gyakorlati oktatás minden idejét igénybevette. De az Otto-motorok tökéletesítésével, gyakorlati alkalmazásuk kiszélesítésével élete végéig foglalkozott.

A Műegyetemről 1924-ben ment nyugalomba, de munkáját felkérésre még a következő évben is folytatta. Ezután szerény motorüzemet létesített a mai Bartók Béla úton, melyhez előzőleg maga készített néhány szerszám-gépet. Feltalálói tevékenységét ezután sem hagyta abba és több igen szellemes szabadalmat jelentett be, melyek mindegyike az Otto-motorokra vonatkozott. Az egyre több megrendelés a műhely bővítését tette szükségessé, erre a Buda-foki úton került sor, a 30-as évek végén. Sőt sor került egy gyár megtervezésére is, de ennek felépítését már nem érthette meg CSONKA János: 1939-ben rövid betegség után meghalt. Vele a magyar motorteknika történetének egyik legnagyobb és legtermékenyebb alakja távozott az élők sorából.

Az Otto-motort fejlesztő műszaki nagyjaink között előkelő helyet foglal el BÖSZÖRMÉNYI Jenő. A kiváló mérnök a század első éveiben még a Dieselmotorokkal foglalkozott, de csakhamar belátta, hogy gépjárművek hajtására ezek még nem alkalmasak és az Otto-motorok fejlesztését vette tervbe. Munkája alapján 1902-ben meghívták a francia Westinghouse-gyárba, mely már akkor gépjármű motorok gyártásával is foglalkozott. BÖSZÖRMÉNYI Jenő jól látta a motor szükséges fejlesztési céljait: vezérelt szívószelep, levehető hengervej, megfelelő csapágyazás, kisebb tömegű mozgó alkatrészek stb. Az előző évben Arad városa 8 darab autóbusz szállítására írt ki pályázatot, amit a Westinghouse-gyár nyert meg és Aradon egy kis gyárat létesített. BÖSZÖRMÉNYI Jenő is ide került a gyár londoni telepéről és nagy része volt abban, hogy amikor a francia cég a kevés rendelés miatt meg akarta szüntetni a gyárat, kiváló magyar kollégáinak a segítségével sikerült elérnie, hogy a Magyar Ruggyantaárugyár és az osztrák Daimler cég átvette az aradi telepet, és a gyár MARTA néven folytathatta a gyártást. A műszaki igazgató BÖSZÖRMÉNYI Jenő lett. A gyár további működését az is biztosította, hogy az Arad-Csanádi Egyesült Vasutak igazgatósága motorizálni kívánta a személyszállítást. A MARTA gyár olyan kiváló *benzinelektromos motorkocsikat* szállított, hogy a vasút személyszállítása megsokszorozódott és a megoldás nemzetközi elismerést váltott ki. BÖSZÖRMÉNYI Jenő a jelentős tökéletesítéseket 1911-ben maga ismertette a Magyar Mérnök- és Építészegyletben. Még ebben az évben a

Magyar Benz Autógyár műszaki igazgatója lesz és itt működik 1915-ig, majd ismét visszakerül Aradra.

A világháború azonban megakaszt minden fejlődést. A Marta gyár leszerelése után BÖSZÖRMÉNYI Jenő a MÁVAG műszaki tanácsadója lesz, majd újra kedvenc munkaterületére kerül akkor, amikor a régi Repülőgépgyárból 1924-ben megalakul a Magyar Általános Gépgyár, melynek ő lesz a műszaki vezetője. Az itt gyártott Magomobil, Magosix és Supermagosix autók és Otto-motorjaik kitűnően beváltak és gazdaságosan voltak gyárthatók. A közben kitört gazdasági világválság azonban ezt a gyárat sem kímélte és sok más magyar gyárral együtt ez is felszámolásra került. Pedig a MÁG-féle Otto-motorral még 1931-ben is nyolcszemélyes sínautó készült az Első Magyar Gazdasági Gépgyárban. A MÁG megszűnésével BÖSZÖRMÉNYI Jenő is végleg elhagyta régi, kedvenc, oly sok sikert hozó munkaterületét.

Visszatérve az 1910-es évekre, meg kell emlékeznünk az egyik legkiválóbb magyar mérnökről: ZSÉLYI Aladáról, aki 1883-ban született. A motoros repülés egyik kitűnő magyar úttörője volt. Nevéhez fűződik az *első magyar repülőgép* tervezése és megépítése, természetesen Otto-motorral. Jelentős munkát végzett a motorok fejlesztése terén is, 1913-ban jelentette be szabadalomra a szabaddugattyús motort, illetőleg gázfejlesztőt. Repülőgépeit maga repülte be és nagy kár volt, hogy 1914-ben, egyik kísérleti repülése során szerencsétlenül járt és korán megszakadt sokat ígérő pályája.

Az 1920-as években a Műegyetem Kalorikus Gépek tanszékének a vezetője SCHIMANEK Emil lett, akinek invenciója és kísérletező kedve folytatta a Műegyetemen a nemes hagyományokat az Otto-motorok fejlesztése terén is. Számos szabadalma közül ki kell emelni a hatütemű motort és az ESSE karburátort. Utóbbi a motor terhelésétől és fordulatszámától függetlenül mindig helyes keveréket szállított és külföldön is elismerést szerzett.

Kivette részét az Otto-motor fejlesztéséből a műegyetemi ifjúság is. A Műegyetemi Sportrepülő Egyesület keretében THOROCZKAY Péter tervezett és épített egy háromhengeres kitűnő csillagmotort, mely nemzetközi elismerést vívott ki. Ezzel az Otto-motorral az egyesület fiatal pilótái számos rekordot állítottak fel, sőt egyik régi kiváló pilótánk: KASZALA Károly egy a Műegyetemen készült Lampich Árpád—Thoroczky Péter repülőgéppel világrekordot is állított fel.

Az egyéni kísérletezők közül ki kell emelni FEJES Jenő nevét, aki hegesztéssel készült motorjával és autójával korát megelőzve mutatott rá olyan lehetőségekre, amiket a külföld csak sokkal később hasznosított.

Ugyancsak az egyéni kezdeményezések közé sorolható az itthon kevéssé ismert Szklenár-motor is. Ezt a csillagmotort lassan forgó gyűrű-tolattyú vezérelte. A széles körű kísérleteket egy német gyár folytatta le. A motort és az elért kedvező kísérleti eredményeket a Bussien-féle Automobiltechnisches Handbuch több oldalon át ismertette és méltatta.

A Műegyetemen a 30-as években Otto-motorokkal érdekes és fontos kísérleteket végzett KUND Ede professzor. Elsősorban a gazdaságilag előnyösen beszerezhető alkoholok motorikus felhasználása érdekelte. Ez volt az az időszak, amikor sok európai államban kötelező volt az Otto-motorokban a nálunk „Motalko” néven forgalomba került keverék használata, mely 80% benzint és 20% vízmentes alkoholt tartalmazott. KUND Ede egyébként saját személykocsiján vegyes üzemet is biztosított: a motor beindításakor tiszta benzinnel indult, bemelegedés után áttért az alkoholos üzemre, a motor leállítása előtt pedig rövid időre ismét áttért a tiszta benzines üzemre. Így az üzemidő legnagyobb részében csak alkohollal járt a motor.

Ezek a kísérletek új jelentőséget kaptak napjainkban, amikor az ásványolaj nagyarányú drágulása folytán újra előtérbe kerül az alkohol, elsősorban a metilalkohol motorikus felhasználása. Sok szakértő, így pl. MEURER professzor, a M. A. N. motorok megalkotója is a metilalkoholt tartja a jövő motorhajtó anyagának, mégpedig szikragyújtású motorokban. Az FM típusú motorokkal végzett erre vonatkozó kísérletek közlése szerint igen jó eredményeket mutattak. Ezzel a megoldással a Diesel-motor már az Otto-motorhoz közelít és lehetséges egy hibrid-motor kialakítása is. A metilalkohol használatával nemcsak a gazdaságosság lenne megoldható, hanem a környezetkímélés is.

A 30-as évek világválsága után jelentkező lassú fellendülés részben sajnos már a háborús készülődésnek a jele volt és az Otto-motorokkal kapcsolatos egyéni tervek is a nagy gyárak keretén belül kerültek a kísérletek sorába, vagy süllyedtek el. A gyárak az Otto-motorok területén is főleg licenccégyártásra tértek át. Így adódott, hogy pl. a Weiss Manfréd Repülőgép- és Motorgyár, ahol a legtöbb és legnagyobb teljesítményű Otto-motor készült, az angol eredetű Jupiter, majd a francia Gnome & Rhone repülőmotorok után végül is a Daimler-Benz repülőmotorok gyártására tért át. Ezek a 12 hengeres, benzinbefecskendezős, kompresszoros, változtatható folyadékhűtéses V-motorok abban az időben az Otto-motorok fejlődési csúcsát jelentették. Adaptálásuk és gyártásuk során számos magyar mérnök és technikus gondolatai épültek be a DB-603 és DB-605 típusú motorokba. Ugyancsak itt gyártották a kismotorokat, a törzsgyár pedig a traktorok és katonai járművek Otto-motorjait készítette.

A múltba visszatekintve tehát elégedetten állapíthatjuk meg most, a 100 éves jubileum alkalmából, hogy a magyar műszaki szakemberek legkiválóbbjai az elsőik között álltak az Otto-motor mellé és megszakítás nélkül vettek részt annak továbbfejlesztésében.

A NEMZETKÖZI ÖNTÖZÉSI ÉS VÍZRENDEZÉSI SZÖVETSÉG MAGYAR NEMZETI BIZOTTSÁGÁNAK 10 ÉVES TEVÉKENYSÉGE

BOGÁRDI JÁNOS*
AZ MTA RENDES TAGJA

PETRASOVITS IMRE**
A MEZŐGAZDASÁGI TUDOMÁNYOK DOKTORA

Bevezetés

A Nemzetközi Öntözési és Vízügyi Szövetségben (International Commission on Irrigation and Drainage, röviden: ICID) hazánk részvételét és az ezzel járó tevékenységet a Magyar Tudományos Akadémia felügyelete alá tartozó Magyar Nemzeti Bizottság (MNB) irányítja. 1975-ben az ICID 25 éves és a MNB 20 éves fennállása alkalmából eredményes és gazdag munkásságra tekinthettünk vissza.

1977-ben az MNBrendezésében Budapesten került sor, az ICID működése során első ízben, hogy egy tudományos témát ún. *Kerekasztal Konferencia* formájában vitattak meg. A Kerekasztal Konferencia, amely az evapotranszspirációval foglalkozott, igen sikeres volt. A Konferencia részletesebb ismertetése tette időszerűvé, hogy az MNB tízéves munkájáról röviden beszámoljunk.

Az ICID nemzetközi és hazai szerepe

A demográfiai robbanás, az éhínség elleni harc, az ember természeti környezetének világméretű károsodása és az ellene kibontakozó világméretű védekezés az egész emberiség alapvető — komplex — problémájává vált. Az energia válság csak növelte ezeknek a kapitális kérdéseknek a súlyát és nehezíti megoldásuk lehetőségét.

Ilyen társadalmi-gazdasági világközegben helyezkedik el a Nemzetközi Öntözési és Vízügyi Szövetség és formálódik tevékenysége, szaporodnak eredményei és feladatai.

Magyarország felvételéről az ICID Végrehajtó Tanácsa 1955. V. 30.-i ülésén foglalt állást. A Nemzetközi Szövetség 1950-ben történt megalakulása után 5 évvel már elismert nemzetközi fóruma lett a világ öntözési, vízügyi és árvédelmi tapasztalatai összegyűjtésének és a legáltalánosabb feladatok megvitatásának.

* Dr. Bogárdi János, az ICID Magyar Nemzeti Bizottságának elnöke, 1024 Budapest, Mártírok útja 31—33.

** Dr. Petrasovits Imre, az ICID Magyar Nemzeti Bizottságának titkára, 1141 Budapest, Bazsarózsa u. 29.

Azok a lehetőségek, amelyeket a Szervezet tevékenysége, publikációi és vitafórumai számunkra, a magyar öntözés és vízrendezés számára adhatnak, igen sokrétűek.

De a magyar kutatások, javaslatok és kezdeményezések is igen hasznosak voltak az ICID nemzetközi működésének keretében.

A Magyar Nemzeti Bizottság tízéves működése

A magyarországi társadalmi, természeti és hidrológiai viszonyok számos esetben lényegesen eltérhetnek más országokétól. Szemléletet, új módszereket, elvi és műszaki fejlesztési megoldásokat azonban nemcsak lehet, de szükséges is importálni. Ilyen szellemi import-forrás számunkra, a mezőgazdasággal is kapcsolatos vízgazdálkodási területen, az ICID tevékenysége. Ezeknek a nemzetközi eredményeknek az adaptálása azonban csak olyan mértékben és hatékonysággal lehetséges, amilyenre a hazai társadalmi, gazdasági közegnek szüksége van. Szerénytelenség nélkül mondható, hogy a magyar vízgazdálkodás, a műszaki tudomány és gyakorlat nemcsak a hidrológiai, hidraulikai-vízépítési, hanem a mezőgazdasági ökológiai, biológiai, a talajtani, az agro-hidro-meteorológiai eredményeket integráltan képes fogadni és hasznosítani.

Ugyanakkor azonban az ország méreteihez és anyagi lehetőségeihez képest az átlagosnál nagyobb mértékben hozzá is tud járulni a nemzetközi tapasztalatok és ismeretek gazdagításához.

Elmondhatjuk, hogy az ICID Magyar Nemzeti Bizottsága különösen az elmúlt tíz esztendő alatt a legtöbb esetben jól sáfárkodott az említett mindkét lehetőséggel. Igen jelentős csatornája volt a szellemi termékek e kétirányú áramlásának. Szervezetten oda-vissza közvetített a hazai vízgazdálkodási-agronómiai kutató és műszaki fejlesztő helyek és az ICID 71 tagországa között. Az MNB tevékenységének egyik mutatója, hogy szervezésében összesen 115 magyar tanulmány jelent meg a különböző ICID fórumokon és kiadványokban.

E tanulmányok nagy többsége magas színvonalon mutatta be a magyarországi viszonyok között jelentkező szakmai problémákat, a megoldásokra született tudományos eredményeket és számot adott a világnak, hogy Magyarországon a szocialista építés gyakorlatában hogyan válnak ezek az anyagi termelés emelőivé.

Ennek a közvetítésnek legáltalánosabb és rendszeres formája a háromévenkénti kongresszusok munkájában való aktív részvétel.

Két fontos témakör vitaindító előadásán magyar előadókat kértek fel, így az 1972. évi várnai kongresszuson STAROSOLSKY Ödön, az 1975. évi moszkvai Világkongresszuson pedig GERENCSÉR Árpád tagtársunk képviselte ilyen minőségben a Magyar Nemzeti Bizottságot.

A folyamszabályozás-árvízvédelem, a vízrendezés és az öntözés fejlődése történetileg is elválaszthatatlan a társadalom és a termelő erők általános fejlődésétől. Magyarországon a települések 30%-a árvédett területeken, a mezőgazdasági termőterületek 44%-a a belvíz védett területeken helyezkedik el.

Ilyen megfontolásokból igyekezett a Magyar Nemzeti Bizottság különösen az utóbbi 5—6 esztendőben közvetlenül is fejleszteni kapcsolatait az európai és dunavölgyi országokkal. Ezen belül különösen jó kapcsolatok alakultak ki a szovjet, a jugoszláv, a bolgár, a francia és az olasz Nemzeti Bizottságokkal.

E célokat szolgálta a Magyar Nemzeti Bizottság kezdeményezése egy dunavölgyi országok ICID Nemzeti Bizottságai közötti találkozó megszervezésére. Erre az eszmecserére 1971-ben Budapesten került sor.

Az említett jó kapcsolataink ápolása mellett szeretnénk együttműködésünket a jelenleginél rendszeresebbé és intenzívebbé tenni elsősorban azokkal a fejlődő országon belüli Nemzeti Bizottságokkal, amelyekkel államközi politikai és gazdasági kapcsolataink is perspektivikusak.

A Magyar Nemzeti Bizottság munkájának elismerését is jelentette, hogy 1973-ban ugyancsak Budapesten került sor a 9. Európai Regionális Konferenciára, amely a többcélú folyóhasznosítás feladatainak megoldásával foglalkozott. Ezen a nagy sikerű konferencián az egyes országok Nemzeti Bizottságai irányításával 253 szakember vett részt. Beható vitában cserélték ki tapasztalataikat fontos és számunkra is időszerű kérdésekben.

A Magyar Nemzeti Bizottságra nehéz feladatokat rótt az 1975-ben Moszkvában megrendezett IX. Kongresszuson való részvétel. E kongresszus szokásosnál nagyobb jelentőségét az adta meg, hogy egybeesett az ICID alapításának 25. évfordulójával és az első Vízgazdálkodási Világkiállítással. A szovjet főrendezőség és a napisajtó hazánkat a négy legsikeresebb rendező között méltatta és anyagunkat mind a szovjet főrendezőség, mind az ICID központ további felhasználásra elkérte.

Ez alkalommal bejelenthetjük, hogy az MNB számos tagjának fáradságos és hosszadalmas (ötévi) munkájával végre elkészült és nyomdába került az ICID mintegy 10 000 szavas angol—francia értelmező szakszótár magyar fordításának kézírata. Várható, hogy még ebben az évben elkészül az Akadémiai Kiadó nyomdájában és hasznára lesz az öntözéses vízrendezés és árvédelem területén jelentkező nemzetközi információ-csere bővülésének és minőségi javításának.

A Magyar Nemzeti Bizottság hasznos tevékenységének egyik segítője az ICID tisztségviselőivel és a Központi hivatalával való konstruktív kapcsolat. Különösen jól fejlődött ez a kapcsolat, amikor a Szövetség elnöki tisztét ALEKSZEJEVSZKIJ elvtárs, a Szovjetunió Vízgazdálkodási és Meliorációs minisztere töltötte be.

Zavartalan és segítő az együttműködésünk FRAMJI főtítkár úrral, akit teljes összhangban, most már hatodszor választottak meg erre a nagy szakmai

áttekintést, politikai tapasztalatokat és emberi figyelmet igénylő fontos tisztségre.

Ezt a szívélyesnek mondható kapcsolatot azok az esetenkénti vitáink sem gyengítették, amelyekre a számunkra nem előnyös tagdíj megállapítási rendszerrel, vagy a székház építési hozzájárulás arányával kapcsolatosan került sor.

A Végrehajtó Tanács 1975. évi moszkvai ülésén HOLY professzort — a Csehszlovák Nemzeti Bizottság elnökét — választották meg három év időtartamra az ICID új elnökévé. Határozott meggyőződésünk, hogy a Magyar Nemzeti Bizottság és a központi tisztségviselők közötti konkrét, segítőkész és konstruktív együttműködés továbbfejlődik.

A Magyar Nemzeti Bizottság a Szövetség vezető szerveiben is aktívan tevékenykedett. A Magyar Nemzeti Bizottság elnöke, BOGÁRDI akadémikus, mint a Szövetség egyik választott alelnöke működik. A Szervezet egyik legfontosabb állandó Bizottságának elnöki tisztségére az általánosan becsült amerikai CRIDDLE úr után (az Evapotranszspirációs Munkabizottság) a Magyar Nemzeti Bizottság titkárárt választották.

Ha eredményes működésünk fontos feltételeit keressük, akkor szólni kell az MTA Műszaki Osztálya vezetőinek és az Akadémia Külügyi Osztálya képviselőinek segítőkészségéről, a Nemzeti Bizottság munkájával szemben esetenként nyilvánított magas szintű és elvi követelményeikről és a Nemzeti Bizottság munkájával szemben kifejezett bizalmukról.

Ehhez társult az Országos Vízügyi Hivatal vezetőinek és a MÉM vezetőinek esetenkénti anyagi támogatása és munkánk iránti egyre rendszeresebbé váló érdeklődése. Őszintén köszönjük a három főhatóság igényt támaztó és segítő támogatását.

A Magyar Nemzeti Bizottság munkájához szükséges technikai és adminisztratív feltételeket a VITUKI vezetősége elismerésre méltó szinten és módon biztosította.

Rajtuk kívül számos — főleg vízgazdálkodási és egyetemi intézmény vezetői jelentették azt a fontos szakmapolitikai-társadalmi bázist, amely nélkül az ICID MNB 26, többségében aktív tagja nem fejthetett volna ki olyan tevékenységet, mint amiről az előzőekben beszámolhattunk.

Valamennyi említett intézmény vezetőinek és érintett munkatársainak köszönetünket fejezzük ki a Magyar Nemzeti Bizottság nevében, és számítunk a jövőben is eddigi támogatásukra. Egyben a főhatóságok vezetőit arra kérjük, hogy ha a Magyar Nemzeti Bizottság munkájában javítani valót látnak, igényeiket hozzák tudomásunkra, és mi azon leszünk, hogy lehetőségeinkkel összhangban megfeleljünk az újabb várakozásoknak is.

A legutóbbi fontos feladatok között szerepeltettük az 1975. évi moszkvai világkongresszus szakmai tapasztalatainak szélesebb körben való megismertetését, a Szövetség Végrehajtó Tanácsa moszkvai ülésének határozata alapján Budapesten 1977-ben rendezett első Nemzetközi Evapotranszspirációs Kerek-

asztal Konferencia megszervezését, és az 1978-as 10. Öntözési és Vízrendezési Világkongresszuson Athénben való magyar részvétel előkészítését.

A Konferenciát, kimagasló eredményeit és időszerűségét figyelembe véve, a következőkben részletesen ismertetjük.

A budapesti Nemzetközi Evapotranszspirációs Kerekasztal Konferencia

A Nemzetközi Öntözési és Vízrendezési Szövetség 1975. évi Moszkvai, jubiláris Végrehajtó Tanácsülésén az Evapotranszspirációs Bizottság javaslatára határozatot hozott az első Evapotranszspirációs Nemzetközi Kerekasztal Konferencia megrendezésére Budapesten. A Konferencia — kétéves tervszerű előkészítő munka után — a Szövetségnek az MTA Műszaki Tudományok Osztályához tartozó Magyar Nemzeti Bizottsága irányításával, a VITUKI technikai szervezésében, a vártnál nagyobb külföldi érdeklődés mellett zajlott le. A Konferencia módszerét, tárgykörét, elveit a Szövetség Evapotranszspirációs Bizottsága dolgozta ki, amelyet az 1976. évi Banffi Végrehajtó Tanácsülés jóváhagyott.

A Konferencia ismertetése előtt célszerű, ha röviden az evapotranszspirációval, valamint a hozzá kapcsolódó nemzetközi és hazai kutatásokkal is foglalkozunk.

A Föld vízkincsének 97%-a az óceánokban található. A fennmaradó 3%, mintegy $36 \cdot 10^6$ km³ az a vízkészlet, mely a hidrológiai körforgalomban állandóan mozogva — egyben az emberiség tulajdonképpeni édesvízkészletét is jelenti.

Ennek az atmoszférában és a szárazföldeken mozgásban levő óriási tömegű vízkészletnek mozgástörvényeivel a hidrológia tudománya foglalkozik. E tudományág elkülönülését az emberiség egyetemes ismeretei között VEN TE CHOW az 1400 körüli időkre teszi. Érdekes, hogy az elmúlt 600 év alatt a tudományág ismeretanyagának zöme a hidrológiai körforgalom lefelé menő ágával foglalkozik. Rendkívüli nagy tömegű adat áll rendelkezésre és igen sok törvényszerűség került feltárára

- a csapadékok,
- a területi lefolyás,
- a vízfolyások vízállásai, vízhozamai, árvizei
- a felszín alatti vizek keletkezése és mozgása stb. vonatkozásában.

A hidrológiai körforgalom felfelé szálló ágával azonban viszonylag keveset törődtek. A szabad vízfelszín párolgásával is csupán viszonylag rövid ideje — kb. 150 éve — foglalkozik a hidrológia tudománya. A szárazföldek és főként

ezek növényzettel borított területei párolgásának vizsgálata pedig csak néhány évtizedes múltra tekinthet vissza. Az *evapotranszspiráció* viszont éppen ezeknek a növényzettel borított területeknek a párolgása.

Az evapotranszspirációnak a rendelkezésre álló vízkészletek felhasználásában játszott szerepére jellemző, hogy hazánk édesvízkészleteiből

a mezőgazdaságilag művelt területek vízfogyasztása	4—5 km ³ -re
az öntözött területek öntözővíz felhasználása	1,2—2 km ³ -re

becsülhető.

Az evapotranszspirációval foglalkozó kutató és gyakorlati alkalmazó tevékenységének a viszonylag rövid múltja, a jelenség összetett és változó volta, továbbá a gyakorlati alkalmazásba-vétel lehetőségeinek a változatossága okozta, hogy a jelenséggel, annak mérésével, törvényszerűségeivel foglalkozó elméleti és gyakorlati szakemberek nem mindenben értenek egyet, sok tekintetben ellentmondásba is kerültek egymással.

Az evapotranszspiráció jelenségével, törvényszerűségeinek feltárásával foglalkozó kutatómunka kezdetei ugyan a XX. század elejére tehetők, a vizsgálatok nemzetközi méretűvé való fejlődése azonban gyakorlatilag az 1950-es évek elejéhez, THORNTWAITE (USA), PENMANN (Anglia) és TURC (Franciaország) munkásságához köthető.

Hazánkban az evapotranszspirációval az 1950-es években PETRASOVITS és BALOGH kezdenek el foglalkozni. A szervezett evapotranszspirációval összefüggő kutatómunka kezdetei hazánkban az 1960-as évtized elejére tehetők, és ANTAL, BALOGH, PETRASOVITS munkásságához kötődnek.

Az 1970-es évek közepére Magyarországon 16—18 evapotranszspirációs mérőhely működik, 6 kutató intézmény és mintegy 15—20 kutató munkálkodik az evapotranszspiráció jelenségeinek sokoldalú vizsgálatán. Az evapotranszspiráció eddig feltárt törvényszerűségeinek felhasználásával állapították meg hazánkban a különböző növénykultúrák öntözéséhez felhasználható öntözővíz-mennyiségeket az eltérő éghajlati övezeteknek és talajoknak megfelelően. Ugyancsak az evapotranszspirációs mérések adatainak felhasználásával van lehetőség öntözési előrejelzések készítésére. Rendelkezésre állnak — evapotranszspirációs összefüggések alapján — a főbb öntözött növénykultúrák víz-igényének, éghajlati vízhiányának és öntözővízigényének különböző gyakoriságra számított értékei. Végül és nem utolsósorban, kezdetét vette a hazánkban alkalmazott mérési és számítási módszereknek külföldön, a fejlődő országokban való alkalmazása is.

Az evapotranszspirációs kutatások magyarországi helyzetéről és nemzetközi vonatkozásairól 1974-ben a Magyar Tudományos Akadémia műszaki tudományok osztályának megbízásából — a Vízgazdálkodástudományi Bizottság javaslatára — összefoglaló tanulmány készült (PETRASOVITS—BALOGH). A tanulmányt a témakörrel foglalkozó hazai intézményeken és szakembereken kívül

— angol nyelven — megkapták a Nemzetközi Öntözési és Vízrendezési Szövetség Evapotranszspirációs Munkabizottságának tagjai is.

A magyarországi kutató és gyakorlati alkalmazó tevékenységnek, valamint az ezt ismertető tanulmánynak is köszönhető, hogy a Nemzetközi Öntözési és Vízrendezési Szövetség Evapotranszspirációs Munkabizottsága 1975-ben a magyar PETRASOVITSOT választotta elnökévé, és hogy a munkabizottságnak még további két magyar tagja van.

Az 1976. évi Banffii Végrehajtó Tanács határozatainak megfelelően az alábbi három kérdéscsoport vitáját tűzték a Konferencia napirendjére:

- terminológia,
- mérés,
- számítás és alkalmazás.

A vita módszerének jellemzője volt, hogy a Kerekasztal melletti vitákban csak korlátozott számú — egy-egy kérdéscsoportnál mintegy 30–40 — szakember vehetett részt. A Konferencia többi vendége mint megfigyelő volt jelen.

A Konferenciára előre 55 dolgozatot küldtek be. Ezeket 3-kötetes kiadványban sokszorosítottuk.

A Konferencia vendéglátását az IBUSZ bonyolította le. A nyilvántartásba vett vendégek száma 132 volt. Ebből:

89 külföldi szakember, 33 országból és 43 magyar szakértő volt.

A külföldiek közül 23 fő szocialista országból jött. A Konferenciához 1 napos tanulmányút kapcsolódott, melyen résztvehettek az előző WMO Konferencia vendégei is. A tanulmányúton bemutatott 4 evapotranszspirációs mérő állomás közül 2 a VITUKI, 1 az ÖKI és 1 a Szőlészeti és Borászati Kutató Intézet irányítása alatt áll.

Négy nemzetközi szervezet képviseltette magát a Konferencián. Képviselőik aktívan résztvettek a vitában. A szervezetek az alábbiak:

- F. A. O.
- I. A. S. H.
- U. N. E. S. C. O.
- W. M. O.

A Konferencia vitái igen aktívak, építő jellegűek voltak, és a tudományban érdekelt tudósok, gyakorlati szakemberek közötti megértést nagyban elősegítették. A viták teljes anyagát a Rendező Bizottság magnetofonszalagra rögzítette abból a célból, hogy a kongresszuson elhangzottakat hozzáférhetővé tegyék a Konferencia résztvevői és más érdeklődő szakemberek számára.

A Konferencia sikeres voltát nemcsak a résztvevők nyilvános és nem nyilvános elismerő szavai, hanem olyan megnyilvánulások is mutatják, melyek szerint kb. 4–5 év múlva célszerű lesz a II. Nemzetközi Evapotranszspirációs Kerekasztal Konferencia megszervezése egy más országban.

Kiemelkedőnek tartjuk, hogy a Konferencia előtt tartotta első ülését a Nemzetközi Szervezet Evapotranszspirációs Bizottságának Albizottsága Teheránban, melyet az Evapotranszspirációs Világtérkép előkészítésére kértek fel.

Az I. Nemzetközi Evapotranszspirációs Kerekasztal Konferencia egyes ülésszakain az Ülésszak elnöke, vitavezetője és titkára által a vita alapján összeállított szakmai ajánlások születtek.

Az ajánlások a következők szerint foglalhatók össze:

Terminológia

1. ajánlás

— A csupasz talaj és a szabad felszínről vagy nagy kiterjedésű növényzetrel is borított területről a vízpára távozását Evaporációnak nevezzük.

— Az evapotranszspiráció — ET — kifejezés ajánlható ott, ahol a fizikai folyamatok mellett nagy mértékben vesz részt a transzspiráció.

2. ajánlás

Bár számos gyakorlati szakember számára nem sokat jelent az adott felület lehetséges párolgásának fogalma, a kutatók ezt fontosnak tartják.

A lehetséges párolgás jelensége akkor áll elő, ha az adott hőmérsékleti állapotban valamennyi felület a telítettség állapotában van.

3. ajánlás

Az evapotranszspiráció egyes típusainak a megjelölése, úgy mint az ET_{\max} , ET_{opt} , ET_{\min} stb. a mérnöki és a mezőgazdasági gyakorlat számára fontos.

4. ajánlás

Kifejezetten ajánlható, hogy a potenciális evapotranszspiráció értékeinek számításakor vagy mérésekor az értékek jelölése mellett zárójelben a számítási módszer szerzője vagy a mérési módszer is meg legyen nevezve.

Pl.: ET_p (PENMANN), ET_p (TURC), E (PICHE) stb.

5. ajánlás

A viszonyítási (referencia) alapot képező növények evapotranszspirációjának mérése (a gyep vagy a lucerna ajánlható erre a célra) igen hasznosak a gyakorlat számára. Többnyire a maximális evapotranszspiráció értékeit adják (jó vízellátottság, nedves talaj stb.). Az így kapott értékeket $ET_{\text{ref}}(\text{fü})$ vagy $ET_{\max}(\text{fü})$ módon célszerű jelölni.

6. ajánlás

A fenti ajánlásokkal és több nemzeti tanulmánnyal összhangban a következő nagyságrendeket lehet megállapítani:

$$ET_p \geq ET_{\max} \geq ET_{\text{opt}} \geq ET_{\min}.$$

7. ajánlás

A megelőző WMO Konferencia határozataival és a Konferencia egyes szerzőinek ajánlásaival összhangban (a nettó sugárzás mérésével) az alábbi egyszerű képlet ajánlható az evaporáció határértékének számításához:

$$E_0 = \frac{\Delta}{\Delta + \gamma} (R_n + G),$$

ahol

Δ — a párányomás hőmérséklet szerinti változása,

γ — psychromatikus állandó,

G — a talajfelszín vezetése hőárama,

R_n — az elnyelt sugárzás.

Mérés

1. ajánlás

Mérőhálózathoz szükséges berendezésekhez vezérfonal kialakítását kell az ICID Evapotranszspirációs Munkabizottságának a programjába felvenni.

2. ajánlás

Az ICID célkitűzései közé fel kell venni, hogy az öntözés és a vízrendezés valamennyi szempontjának a figyelembevételével segítse elő a legkorszerűbb párolgás és evapotranszspiráció mérési módszerek alkalmazását.

3. ajánlás

Kutatási programot kell összeállítani, lehetőleg a WMO-val, a FAO-val és egyéb Egyesült Nemzetekhez tartozó intézményekkel karöltve a legtöbbet ígérő mérési módszerek értékelésére és továbbfejlesztésére.

4. ajánlás

Különleges kutatócsoportot kell létrehozni a különböző gyakorlati célokat szolgáló evapotranszspiráció mérésének ajánlható módszerei kiválasztására és alkalmazásba vételük előírásainak összeállítására.

5. ajánlás

Az igényeket és eljárásokat kezdetben öt éven belül felül kell vizsgálni és hasonló időközökben e felülvizsgálatot célszerű megismételni.

Számítás és alkalmazás

1. ajánlás

A jelenlegi számítási módszerek továbbfejlesztése ajánlható abból a célból, hogy a hidrometeorológia, a mérnöki gyakorlat és a mezőgazdaság követelményei kielégíthetők és a számítógéptechnika alkalmazható legyen.

2. ajánlás

A már kidolgozott és feltárandó összefüggések alkalmazásakor célszerű figyelembe venni, hogy a hidrometeorológiai tényezőket egyedül vagy kombinálva, független változóként alkalmazó készletek csupán a potenciális evapotranszpiráció (ET_p) számítására lehetnek alkalmasak.

3. ajánlás

A tényleges evapotranszspiráció, ET_a vagy annak valamely típusa, a maximális (ET_{max}), az optimális (ET_{opt}) vagy a minimális (ET_{min}) stb. evapotranszspiráció számítására szolgáló összefüggések kidolgozásánál a növényállományt és a párolgó felületek nedvességét jellemző állandókat is célszerű az összefüggésekben alkalmazni.

4. ajánlás

A mérnöki és mezőgazdasági gyakorlat különböző alkalmazási céljaira az evapotranszspiráció eltérő típusainak figyelembevétele ajánlható az alábbiak szerint:

Vízkészletgazdálkodás	távlati tervezés —	ET_p
	víz(öntöző)rendszerek üzemeltetése —	ET_a
Vízi művek tervezése	vízrendezés	— ET_{max}
	öntözés	— ET_{opt}
Mezőgazdaság	öntözővízigények meghatározása	— ET_{opt}
	öntözések időzítése	— ET_a
	növényi tűrőképesség meghatározása	
	aszálykor	— ET_{min}
	belvíznél	— ET_{max}

Az ajánlásokat végleges jóváhagyás céljából az ICID főtitkárának egyetértésével az Evapotranszspirációs Munkabizottság az 1978. évi Athéni Kongresszuson terjeszti a Végrehajtó Tanács elé.

Megemlítjük, hogy a Kerekasztal Konferencia munkáját, beleértve az ajánlások felsorolását is, az ICID Bulletin 1978. évi 27. kötete 1. száma részletesen ismerteti.

A szakmailag, emberileg és politikailag is sikeresnek minősíthető konferencia nagyban hozzájárult a hazai evapotranszspiráció kutatási és általános eredményeinek bemutatásához és jobb megismertetéséhez is.

Köszönet illeti meg mindenekelőtt a Magyar Tudományos Akadémia, a Mezőgazdasági és Élelmezésügyi Minisztérium és az Országos Vízügyi Hivatal vezetőit és illetékes munkatársait a segítségért.

Személyes fáradozásukkal nagyban hozzájárultak a sikerhez az ICID Magyar Nemzeti Bizottságának elnöksége, továbbá a Konferencia Rendező Bizottságának Elnöke és több aktív tagja.

Kiemelkedő volt az az intézményi támogatás, amelyet a VITUKI vezetőitől és számos munkatársától kaptunk.

Elismeréssel tartozunk ama intézmények vezetőinek és illetékes kutatóinak, mely intézményekben ET kutatások folytak és amelyeknek eredményei alkalmasaknak bizonyultak ilyen nemzetközi fórumon való bemutatásra is. Ezek közül külön kiemelésre méltó az Öntözési Kutató Intézet, az Országos Meteorológiai Szolgálat illetékes egységei, valamint a Szőlészeti és Borászati Kutató Intézet, nem utolsósorban pedig a VITUKI, továbbá a debreceni és a gödöllői Agrártudományi Egyetem.

Befejezés

Az elmondottakban kívántunk beszámolni a Nemzetközi Öntözési és Vízügyi Szövetség Magyar Nemzeti Bizottsága tízesztendős működéséről, remélve azt is, hogy ez a rövid összefoglaló-beszámoló, ösztönző kiindulási alappal is szolgál a feltehetően tovább szélesedő és gazdagodó tevékenységünkhöz.

A Magyar Nemzeti Bizottság miközben szakmai feladatok teljesítésén eredményesen munkálkodik, fontos közvetlen és közvetett politikai-társadalmi funkciót is teljesít. Hozzájárul a Nemzetközi Öntözési és Vízügyi Szövetség eredményeihez a világban, a társadalmi-gazdasági építő munkához országunkban.

Ezek adják meg a Magyar Nemzeti Bizottság létezésének értelmét, működésének és jövőbeni tevékenységének társadalmi kereteit és célját is.

IX. KOHÁSZATI ANYAGVIZSGÁLÓ NAPOK

BALATONALIGA, 1977. MÁJUS 2 - 5.

Az Országos Magyar Bányászati és Kohászati Egyesület 1960 óta — általában két-évenként — rendezi meg a Kohászati Anyagvizsgáló Napokat. Az üzemi laboratóriumok tapasztalatcseréjéből mostanig nemzetközi jelentőségű, tudományos konferencia fejlődött ki, amely széles körben fogja össze az anyagszerkezet vizsgálatával, a korszerű gyártástechnológiákkal, a minőségellenőrzéssel, az új anyagok fejlesztésével foglalkozó szakembereket.

A legutóbbi, IX. Kohászati Anyagvizsgáló Napoknak 1977. május 2—5. között az OMBKE Vaskohászati Szakosztályán kívül a Vasipari Kutató Intézet, a Freibergi Bányászati Akadémia Metallurgiai és Anyagtechnológiai Szekciója (NDK) és az MTA VI., Műszaki Tudományok Osztályának Fémszerkezettani Bizottsága is közreműködött, bizonyítva a rendezvény közérdekű fontosságát. A konferencián 420—430 fő, köztük több mint 100 külföldi vett részt, körülbelül felerészben szocialista illetve nyugati államokból.

A résztvevők május 2-án, hétfőn délután érkeztek Balatonaligára. Az ünnepélyes megnyitóra másnap reggel 9 órakor került sor az üdülő ebédlőtermében. A konferenciát HAMMER Ferenc, az OMBKE Vaskohászati Szakosztálya elnökének bevezető szavai után CSÉPÁNYI Sándor kohó- és gépipari miniszterhelyettes nyitotta meg. Áttekintő előadásában vázolta a kohászat előtt álló feladatokat. Hangsúlyozta: „Kohászatunk fejlesztésének nem csupán, és talán nem is elsősorban a termelési volumen növelése a célja, hanem legalább ugyanilyen hangsúllyal a termékek minőségének javítása, értékesebb, korszerűbb termékek gyártásának a bevezetése is. Hazánk viszonylag szűkös nyersanyag- és energiakészletei kényszerítően indokolják a minőségjavítás szempontjainak fokozott érvényrejuttatását.

Bizonyos legfontosabb, közvetlen feladatunk, hogy a jelenleg is szabványos, használatos termékek egyenletesen jó minőségét, gyártásának folyamatosságát a népgazdaság egyetemes érdekeinek megfelelően biztosítsuk. Ki kell használnunk gyártó berendezéseink lehetőségeit. Már ezért is nagy gondot kell fordítanunk egyidejűleg olyan új acéltípusok, új gyártmányok adaptálására, kifejlesztésére, amelyeknek hasznos tulajdonságai — szilárdsága, szívóssága, kifaradási jellemzői, korrózióállósága stb. — jobbak a jelenlegi szintnél . . .

Kohászati fejlesztésünk elképzelhetetlen a korszerű minőségellenőrzés, a sokrétű vizsgálatechnikán és a legújabb anyagszerkezeti ismereteken alapuló kutatási hatékony, alkotó közreműködése nélkül. A nagyipari termelés például ma már szinte előfeltételként követeli meg az automatizált, a gyártás menetébe illesztett, arra közvetlenül visszaható minőségellenőrző rendszerek alkalmazását. A termelésnek azonban legalább ugyanilyen mértékben előfeltétele az anyagszerkezeti alapozás, az a munka, amely előkészíti és karbantartja a nagyipari termelést, felfedi az esetleges hibák okait, rámutat az elhárítás lehetőségeire, s amely segíti a termelékenység növelését. Fokozott mértékben kell igénybe vennünk az anyagszerkezeti ismeretek és vizsgálatok lehetőségeit az új anyagok, új technológiák kifejlesztésében; a maradi szemléletet éppen a fejlesztésben kell bátran felváltanunk az elméletileg megalapozott, előrelátó gondolkodásmóddal.

A magyar kohászat jól képzett, az alaptudományokban jártas kutató-fejlesztő gárdával, köztük anyagvizsgáló szakemberekkel is rendelkezik. Jelentős áldozatokkal szerzettünk be vizsgáló és minősítő berendezéseket, s továbbiak munkábaállítását tervezzük. Ezeknek a szükségszerűen egyre nagyobb értékű berendezéseknek a gazdaságos üzemeltetése, folyamatos kihasználása a kohászat, s azon túlmenően az egész népgazdaság elemi érdeke.

Kézenfekvő, hogy a termelés részét képező, a termelést közvetlenül ellenőrző vizsgálo eszközöket (kvantummérteket, roncsolás nélküli vizsgálo sorokat) elsősorban a termelő berendezések mellett, az üzemekben kell foglalkoztatni. Az alapozaát, az anyagszerkezeti alapokon végzett kutatómunkát ezzel szemben kevésszámú, központi kutatóhelyre kell koncentrálni. E központi kutatóhelyeken kell munkábaállítani és közhasznúan működtetni a vizsgálatechnikai nagyberendezéseket (ebben a szellemben láttuk el a Vasipari Kutató Intézetet az ország

legnagyobb, 200 kV gyorsítófeszültségű elektronmikroszkópjával, mikroszondás laboratóriummal stb.). A központi kutatóhelyek felszerelésével egyúttal biztosítani kell a kisebbek, az üzemek vizsgálati igényeinek kielégítését. Itt jelentős szervezési feladatokat is meg kell oldanunk. A kutatási-fejlesztési munkákat az eddiginél jobban kell koordinálni. Sokat várunk a vállalati és a főhivatású kutatóhelyek, valamint a felsőoktatási intézmények munkájának következetesebb összehangolásától."

CsÉPÁNYI miniszterhelyettes ezután értékelte a Kohászati Anyagvizsgáló Napok szerepét, a nemzetközi összefogás jelentőségét, az előadási program összetételét, a számítógépes technológiai tervezéssel kapcsolatos újabb lehetőségek fontosságát: majd megnyitotta a konferenciát.

A szakmai program három plenáris előadással kezdődött: VORSATZ Bruno a Nehézipari Műszaki Egyetem Kohómérnöki Karának dékánja: „A kémiai elemzések szerepe a metallurgiai folyamatok irányításában”, KLAUS Barteld, a nyugatnémet Thyssen Művek egyik igazgatója „A termelés és az ellenőrzés egysége ötvöztött acél gazdaságos gyártásakor”. PROHÁSZKA János akadémikus, a Budapesti Műszaki Egyetem tanszékvezető professzora „Az anyagvizsgálati eredmények szórásának termodinamikai okairól” címmel adott iránymutató áttekintést. Rövid szünet után, azután megnyíltak az ezúttal először *poster-technikával* közreadott szekcióelőadások bemutatótermei. Az előadók általában megértették és kihasználták az előadásonként rendelkezésre álló két táblafelület és a köztük elhelyezett asztalka nyújtotta lehetőségeket; eredményeiket, munkamódszereiket ötletes ábrákkal, figyelmet felkeltő plakátokkal, feliratokkal, modellekkel mutatták be. Egyidejűleg 46 előadási anyag, a konferencia három napján tehát összesen $3 \times 46 = 138$ szekcióelőadás elhelyezésére nyílt lehetőség. Az előadási posterek körül élénk viták, spontán konzultációk alakultak ki. Úgy tűnik, nagyobb számú, rövid előadást a jövőben már csakis poster-technikával szabad megrendezni.

A konferencia második és harmadik napját is plenáris előadások nyitották meg, mégpedig a fémtani és a kémiai érdeklődésű hallgatóság számára két párhuzamos sorozatban. A plenáris előadásokat felkért, hazai és külföldi előadók tartották, tájékoztatva a szakterület egy-egy fontos témakörének pillanatnyi helyzetéről. A bevezető plenáris előadásokhoz mindegyik napon a már említett, 46–46 előadást bemutató poster-szekció csatlakozott, változatlanul nagy sikerrel.

Hasonlóan sikeres volt az ugyancsak először rendezett *műszerkiállítás*. A kiállításon osztrák, nyugatnémet, svájci és francia cégek vettek részt, ezek azonban számos amerikai, angol és más nemzetiségű, ismert vállalatot is képviseltek. A konferencia résztvevői nyugodt körülmények között, három napon át ismerkedhettek a legújabb metallográfiai előkészítő berendezésekkel, fény- és elektronmikroszkópokkal, röntgendiffrakciós kamrákkal, dilatometerekkel; műszeres analitikai rendszerekkel, laboratóriumi felszerelésekkel. Különösen nagy érdeklődést váltott ki az OEWAG Instrumentation által kiállított, *Princeton-Gamma-Tech.* energiadiszperzív elemző készülék, amelyet a látogatók akár saját, hozott próbák helyszíni vizsgálatával is kipróbálhattak.

A következő X. Kohászati Anyagvizsgáló Napokra előreláthatóan 1979. májusában, ugyancsak az MSZMP balatonaligai üdülőjében kerül sor; a konferencia szervezése megkezdődött.

Dr. Fuchs Erik

A FOLYÓIRAT- ÉS KÖNYVKIADÁS A TÁVKÖZLÉS SZAKTERÜLETÉN

Szempontjaink

Az alábbiakban azt mérlegeljük, hogy (a) mennyire szolgálták a közelmúltban megjelent hazai szakkiadványok sajátosan a *Távközlés* hazai fejlődését, (b) mennyire vettek részt e szakterület fejlesztői és alapproblémáinak művelői saját maguk saját szakirodalmuk írásában.

Témakörünk szakkiadványaitól elsősorban azt várjuk, hogy határozottan az alábbi két cél egyikét szolgálják:

C.1 Vagy, következetesen segítség a *távközlés* hazai szakembereinek széles körű tájékoztatását, képzését és aktív szakmai közéletét. Erre a célra biztosítsanak magyar nyelven, kötetlen, de ugyanakkor igényes fórumot. (Ezzel rokon feladat ipari termékeink külföldi felhasználóinak — pontosabban, a felhasználók szakembereinek — széles körű tájékoztatása, a piacnak megfelelő nyelven.)

C.2 Vagy, sajátosan, a szakterület aktív kollektíváit segítség abban, hogy arra érdemes (és publikációra engedélyezett) munkaeredményeiket a nemzetközi tudományos életben idejében vitára bocsáthassák.

A következőkben arról adunk képet, hogy az elmúlt két évben megjelent hazai folyóiratok és szakkönyvek közül melyek és milyen mértékben szolgálták e két cél valamelyikét, sajátos a *távközlés* munkaterületén. (Magát a kétéves időszakot azonban nem vesszük túl szigorúan: Ott ahol elég sok anyag állt rendelkezésünkre, nem vártunk minden áron a hiányzó számok beérkezésére.)

Közvetlenül a *távközlésben* dolgozók aktivitását elsősorban azért vizsgáljuk, mivel ma már a korszerű elektronika különféle munkaterületei sokrétűen átlapolódnak egymással. Nem okvetlenül az a legtanulságosabb akár a *távközlés* szakemberei számára sem — ami már a címében úgy kezdődik: „Távközlés . . .”. Ugyanakkor igen fontos, hogy e nagyrészt közös — és széles alapokra támaszkodó — szakirodalmat megfelelő arányban írják azok, akiket a hazai távközlés időszerű problémái, fejlődési irányai, ellentmondásai személyesen érintenek.

* MTA. 6. Osztályának Távközlési Rendszerek Bizottsága megbízásából az 1977. április 28.-i ülésen összefoglaltak figyelembevételével készült összeállítás.

A gyakorlati célú szakfolyóiratokról

Az 1. táblázatban azokról a hazai szakfolyóiratokról adunk áttekintést, amelyek az elmúlt két évben ötnél több cikket publikáltak a hazai távközlés számára tanulságos kérdésekről. (Ezekre a kiadványokra utal — röviden, tökéletlenül és semmi esetre sem valamilyen „leértékelő” szándékkal — a „gyakorlati célú szakfolyóiratok” megnevezés.)

Az 1. táblázatban nem vettük fel a *Finommechanika* és *Optika* című lapot, jóllehet igen nagy a szerepe témakörünk gépészeti konstrukciói területén. Ma — az MTA fejlődésével együtt — még csak kibontakozóban van az, hogy az effajta kérdések egészére rendszeres publikációs lehetőségeket milyen módon lehet legcélszerűbben biztosítani. Ez a kérdés azonban messze túlmegy magának a *Távközlésnek* a keretein. Ezért erre a célra külön elemzést javasolunk.

Az 1. táblázatból is jól látható, hogy a távközlés területével kapcsolatban álló szakfolyóiratok az elmúlt két évben jól szolgálták a szakterület hazai fejlődését. Egyúttal a két első folyóirat példáján az is jól látható, hogy valóban milyen nagy ma már az egymással rokon elektronikai munkaterületek irodalmának szakmai átlapolódása.

Hiszen a *Híradástechnika* szerkesztőbizottsága nyilván a híradástechnika egészének — és nem csupán magának a távközléstechnikának — a kiszolgálására törekszik, és ezt tapasztal-

I. táblázat

A távközlés gyakorlata számára közvetlenül tanulságos hazai szakfolyóiratok

A folyóirat neve	1975-ben és 1976-ban megjelent cikkek száma			
	Helyzetképek		Munkaeredmények	
	Összesen	Ebből a TÁVKÖZLÉS-ben közvetlenül tanulságos	Összesen	Ebből a TÁVKÖZLÉS-ben közvetlenül tanulságos
1.	2.	3.	4.	5.
Híradástechnika (METESz-HTE, havonta)	9	5	83	60
Mérés- és Automatika (METESz-MATE, havonta)	3	2	89	58
TKI Közleményei (TKI, preprint-kivitelben, két éven át összesen hat szám)	0	0	32	25
PKI Közleményei PKI,	0	0	13	13
HIKI Közleményei HIKI,	0	0	42	17
BUDAVOX Review BUDAVOX , angolul	3	3	7	7

talataink szerint is kellő sokoldalúsággal teszi. Mégis a cikkek háromnegyed része közvetlenül érdekes speciálisan a távközléstechnika művelői számára.

Másrészt a *Mérés és Automatika* szerkesztői munkájában — a távadatfeldolgozás bizonyos problémáin túl — közvetlenül nyilván nem szerepelnek a távközlés szakmai szükségletei. Ma azonban már a mérés- és az ezzel kapcsolatos számítástechnika — eleve sokoldalúan érdekes távközlő rendszerek és szolgáltatások kidolgozásában is: Innen a távközlést szolgáló cikkek kétharmados aránya.

A felsorolt folyóiratok írásában a hazai távközlés és az ezzel kapcsolatos alapproblémák szakemberei aktívan részt vettek. A szerzők között egyaránt megtaláljuk az átvitel- és a kapcsolástechnika, a távadatfeldolgozás, a hálózatelmélet, az alapvető információközlési és feldolgozási, valamint tömegkiszolgálási területek specialistáit.

Örömmel tapasztaltuk, hogy az idevágó cikkek közül többre joggal tudtak hivatkozni szerzőik egyetemi doktori, sőt — egyes esetekben — kandidátusi értekezésekben is. Ez, egyrészt, jól illusztrálja azt a pozitív tényt, hogy ma már hazai szakembereink közül is egyre többen — gyakorlati munkájuk természetes folyamatában — jutnak el új módszerek kidolgozásához, átfogóbb jelentőségű tanulságokhoz. Röviden: tudományos szempontból is értékelhető eredményekhez.

Ezzel szemben áll azonban az a némiképp negatív tapasztalat, hogy vannak akik — tájékozatlanságból vagy éppen egyszerű kényelemszeretetből — összetévesztik a fenti gyakorlati szakfolyóiratok és a tudományos élet speciális folyóiratainak szerepét: Nem törekszenek arra, hogy azokat a publikálható eredményeiket, amelyek speciális tudományos iskolák bírálatára szorulnak, nemzetközi tudományos folyóiratban, a témakör nemzetközi tudományos életében is próbára tegyék.

A fenti — I. táblázat szerinti — szakfolyóiratoknak is, természetesen, feladatuk a szakmai igényesség. De igen helytelen volna, ha ezek maguk új tudományos eredmények beható nemzetközi irodalmi összehasonlítására, az eredmények különféle speciális előzményekkel való szigorú összevetésére, igen speciális bírálók mozgósítására törekednének. Az effajta túlhajtott gondosság e kiadványok tulajdonképpeni rendeltetését veszélyeztetné.

Más szerkesztési hozzáállás szükséges a fenti szakcikkek és más egy-egy témakör speciális tudományos publikációinak elbírálásához. Aligha lehet e két szempontot — a bírálói kapcsolatok kialakításában és stabilizálásában is — megfelelően követni.

Ez természetesen nem jelenti azt, hogy bármilyen módon korlátozni szabadna akár a fenti egyesületi fórumoknak azt a törekvését, hogy maguk is tudományos célú folyóiratokat adjanak ki, mint ahogy ezt ma például a Bolyai Társulat és az Eötvös Társaság teszi. Ez teljes helyénvaló dolog, ha új tudományos kiadványra valamilyen tényleges szakmai igény merül fel, és a szerkesztők a megfelelő bírálati és terjesztési feltételeket is tudják biztosítani.

Végeredményben, a szerzők cikkeinek célszerű vagy kevésbé célszerű helyen való megjelentetése maguknak a szerzőknek a fejlődése szempontjából érdekes kérdés, a tudományos elismerések és minősítések szempontjából voltaképp másodlagos dolog. Feltéve, hogy értékelő és minősítő testületeink következetesen vigyáznak arra, hogy ne a publikációk száma, vagy hivatkozásai hanem a tényleges eredmények konkrét mérlegelése alapján ítéljenek. Ezért még a fenti — némiképp negatív — tünetekkel kapcsolatban sem látunk közvetlen beavatkoznivalót, akár az egyes szerzők, akár a folyóiratok tekintetében. Csupán a szakmai közvéleménynek (a cikkek íróinak, a témák vezetőinek), valamint a bírálóknak és bíráló bizottságoknak kívántuk felhívni a figyelmét — ezen a helyen is — egy fokozatosan felszámolható, negatív jelenségre.

A nemzetközi tudományos életnek szánt folyóiratokról

A 2. táblázatban azokat a hazai szakmai-tudományos folyóiratokat tekintjük át, amelyek az elmúlt két évben a hazai *Távközlés* művelői számára is megfelelő fórumot biztosítottak a nemzetközi tudományos életben való részvételhez.

2. táblázat

A távközlés hazai szakmai tudományos kollektíváinak nemzetközi tudományos életét szolgáló, hazai (vagy részben hazai szerkesztésű) szakfolyóiratok

A folyóirat neve	1975-ben és 1976-ban (vagy az illető tételnél megadott időszakban) megjelent cikkek			
	Helyzetképek		Munkaeredmények	
	Összesen	Ebből a TÁVKÖZLÉS-ben közvetlenül tanulságos	Összesen	Ebből a TÁVKÖZLÉS-ben közvetlenül tanulságos
1.	2.	3.	4.	5.
<i>Problemy Upravlenija i Teorii Informacii (Problems of Control and Information Theory)</i> SZUTA—MTA, 4 szám/év, oroszul vagy angolul	5	4	40	24
<i>International Journal of Circuit Theory and Applications</i> , Wiley, a nemzetközi szerkesztőbizottságban hazai és szovjet tagokkal, csak 1975-öt nézve*	0	0	17*	17*
<i>Acta Technica</i> MTA (áttekintésünk 75-ben 4 számra, 76-ban 3 számra támaszkodik*)	0	0	94*	10*
<i>Periodica Polytechnica, Electrical Engineering</i> BME	0	0	28	12
MTA, SZTAKI-közlemények	0	0	28*	18*
MTA-SZTAKI (preprint kivitelben, áttekintésünk 15 db. 75 évi és 13 db. 76 évi számra támaszkodik*)	0	0	16*	11*
TKI-ÉVKÖNYV TKI (Cikkgyűjtemény-kötet, magyarul és angolul, 1975-ben*)	0	0		

A 2. táblázatban csupán azokat a folyóiratokat (és cikkgyűjtemény-köteteket) vettük fel, amelyek részlegesen a *Távközlés* tervezési vagy minőségellenőrzési problémáival, az ezekkel kapcsolatos alapvető módszerekkel foglalkoztak. A 2. táblázatban nem szerepelnek azok a hazai — vagy hazai szerkesztésű — matematikai, fizikai és kémiai folyóiratok, amelyek ugyan a távközlés területén dolgozó specialisták munkáját is segítik, de már nem a szakterület tulajdonképpeni távközléstechnikai problémái szempontjából tanulságosak.

Öröndetes dolog, hogy az utóbbi években lényegesen bővültek publikációs lehetőségeink. A hazai szerzők erős tudományos háttérű folyóiratokhoz jutottak hozzá mind az információközlés és feldolgozás, mind az elektronikai tervezés és az ezzel kapcsolatos hálózati területén.

Különösen széles olvasótáborot biztosít a Wiley terjesztési gyakorlata, és gondosan összeválogatott szerkesztőbizottsága, a *Circuit Theory and Applications* számára. A témakör vezető tudományos iskolái a világ különböző pontjain ismerik a *Problemy Upravlinija i Teorii Informacii* is, bár ez utóbbi terjesztési módszerei az előbbi Wiley-folyóirattal, sajnos, ez idő szerint még messze nem mérhető össze.

Jelenleg e két tudományos folyóirat adja a hazai, (vagy részben hazai) szerkesztésű nemzetközi publikációs csatornákat — a távközlésen belül is — a tudományos élet nagy részének.

A 2. táblázatban nem vettük még fel az — ugyancsak részben hazai szerkesztésű — *Digital Systems* című, új nemzetközi folyóiratot. Ennek megjelenése szakterületünkön is alapvető hiányt pótol a digitális tervezés alproblémái területén. E folyóirat azonban ma még túlságosan új ahhoz, hogy tényleges szerepét — a távközlés művelői szempontjából — értékelni lehetne.

Az *Acta Technica* a hazai műszaki tudományok átfogó nemzetközi publikációs fóruma. Aktivitása különösen a mechanikai tudományok és a műszaki fizika egyes problémái területén nagy. De szakterületünk több alapvető témakörében is ma az egyetlen hazai idegen nyelvű fórum. Gyors megjelenést biztosít. Ugyanakkor e folyóiratnak az egész műszaki tudományokra kiterjedő publikációs területe nehézségeket jelent abban, hogy cikkeire szakterületünk külföldi iskolái folyamatosan figyelmet fordítsanak. Számolni kell azzal, hogy a vezető külföldi tudományos iskoláinknak többsége az itt megjelent cikkekről csak akkor szerez tudomást, ha a szerzőtől különlenyomatot kap. (Bár — öröndetes módon — éppen a bizottsági ülésen ettől eltérően, spontán olvasói reflexiókról is hallottunk példát.)

Végeredményben arra a következtetésre jutottunk, hogy az *Acta Technica* mint gyors publikációs fórumnak van jelentősége szakterületünkön is különösen ott, ahol a már említett két folyóirat — nevezetesen a *Problemy* ... és a *Circuit Theory* ... — közvetlen publikációs lehetőséget nem biztosít. Nehéz — és folyamatosan mérlegelendő — szerkesztési feladat azonban, hogyan lehet az igen széles szakmai spektrum problémáit áthidalni, a gyors közzétételi lehetőségeket fenntartani, és aktív szakbírálói tábor fenntartani. Tény, hogy az *Acták* száma ez idő szerint — anyagi okokból — tovább aligha növelhető: Így *Acta Electronica* létrehozására ma nincs reális kilátás.

A *Periodica Polytechnica*, *Electronical Engineering* elsődlegesen az egyetemek közötti együttműködés alátámasztására szolgál. Viszonylag széles (bár az *Acta Technica*-nál speciálisabb) szakmai spektruma azonban szintén nehézségeket jelent stabil olvasótábor kialakításában. De egy-egy számot valamilyen szűkebb témakörre koncentrálna — jól meg tud felelni annak az igénynek, hogy az egyetemi munka iránt érdeklődők, egy helyen, jó áttekintést kaphassanak. Mindebből következik, hogy cikkek itteni közlése elsősorban nem a szerzők próbára tételét, hanem az olvasó tájékoztatását hivatott szolgálni.

Jól szolgálja a távközlés munkaterületét is az MTA SZTAKI-közlemények preprint-jellegű sorozata. Sokszorosított kéziratok preprintszerű sokszorosítása több más kutatóintézeti és egyetemi munkahelyen is megtalálható. Az utóbbi preprintek gyorsan jelennek meg, de nem rendelkeznek jól meghatározott hivatkozási számmal, borítólappformátummal, ami az effajta írások gyakorlati elterjedését, befogadását nehezíti. (A preprintek jelentősége világ-szerte a gyorsaság. Ugyanakkor, éppen bírálathoz nem kötött megjelenésük miatt, nem minősülnek a szerzőt valóban próbára tevő tudományos publikációnak.)

A SZUTA intézeteiben és a szovjet felsőoktatási intézmények kiadásában megjelenő cikkgyűjtemények szerepét játssza — speciálisan a távközlés témakörében — a TKI évkönyve.

Mindezekben a folyóiratokban megtaláljuk a távközlés különféle munkaterületeinek művelőit: Megfelelő volt e tekintetben is a hazai aktivitás.

A hazai (vagy részben hazai) szerkesztésű tudományos folyóiratok számát illetően még ma is hiányaink vannak, ugyanakkor indokolt ezen a területen is az egészséges mértéktartás. Minden egyes életképes folyóirat megjelenéséhez ugyanis a szóban forgó témakör aktív kollektíváinak meghatározott szerzői ráfordítása szükséges. A sikeres szerkesztőbizottsági munka titka az, hogy e kollektívák már eleve készüljenek évenként eredményeik egy részének (e szóban forgó folyóiratban való) közlésére. Ez természetesen — kellő komolysággal — csak viszonylag kis számú témában lehetséges. Ugyanakkor kívánatos, hogy a hazai kollektíváknak maradjon még erejük arra is, hogy témakörük külföldön szerkesztett kulcsfolyóirataiban is publikáljanak. Hiszen várhatóan e fórumok teszik — éppen „távoli” voltuknál fogva — szerzőinket legjobban próbára.

Mindebből következik, hogy célszerű a cikkgyűjtő munkát csak a valóban jelentős hazai (vagy hazai szerkesztésű) folyóiratokra korlátozni. Csupán formális okokból való cikk-íratásokat, folyóirat-támogatásokat kerülni kell.

Másik lényeges kérdés a hazai kiadású folyóiratok átfutási ideje. A *Circuit Theory and Applications* jó átfutási idejét a Wiley eleve biztosítja. Az utóbbi két évben sikerült a *Problemy Upravlinija i Teorii Informacii* számára is a vezető szovjet akadémiai kiadványok átfutási idejével egyenlő átfutási időt biztosítani. (Igen fontos, hogy ez továbbra is biztosítva legyen.)

A könyvekről

Az elmúlt két évben a Műszaki Könyvkiadó a távközlés számára hasznos szakkönyvek sorát adta ki, mégpedig az utóbbi évek kiadói politikáját jellemző, jó témaválasztással.

A távközlés hazai művelői számára is hasznos volt az alábbi — matematikai módszerekkel kapcsolatos — művek megjelenése:

MÁTÉ László: Funkcionálanalízis műszakiaknak

VÁGÓ István: A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számításában (Bevezető könyv alapfogalmak és alkalmazási lehetőségek viszonylag kis ráfordítással való áttekintésére)

MAYEDA, W.: Gráfelmélet (Bevezetés a diszciplínákba és azok alkalmazásába az olvasótól lényeges ráfordítást várva)

Ugyancsak ambíciózusan folytatta e Kiadó a számítógépes tervezéssel, a programnyelvekkel és a mérésadatgyűjtéssel kapcsolatos munkáját: Az elmúlt két évben jelentek meg az alábbi — a távközlés művelői számára is közvetlenül tanulságos — számítástechnikai vonatkozású könyvek:

AMBRÓZY — JÁVOR: Mérésadatok kiértékelése

CSÁKI: Lineáris szabályozási rendszerek analízise

BIRI — LUKÁCS: A CAMAC perifériarendszer

LÓCS — SARKADY — NAGY I — SZLANKO: A BASIC programozási nyelv

Az elektronikai tervezés — a távközlés területén is fontos — kérdéseit tárgyalja:

HÁZMAN I.: Elektronika alapkörök

Évek óta rendszeres segítséget nyújt szakterületünk művelőinek a Műszaki Könyvkiadó és a Budavox lexikon- és kézikönyvkiadása. (Ennek legutóbbi példája volt a Híradástechnikai Kislexikon.) Érdeklődéssel várjuk a Budavox most előkészületben levő új „Távközlési Kézikönyvét” (az új „Telecommunication Engineering” — kiadást).

Az Akadémiai Kiadónál az utóbbi két évben a távközlés művelői számára közvetlenül tanulságos, új mű nem jelent meg. Ezt — minden két évben — eleve nem is lehet elvárni. Öröndetes tény az, hogy — az 1971 évi angol és az 1973 évi orosz nyelvű kiadás után — most lengyel nyelven is kiadásra került a

GÉHER K.: Theory of Network Tolerances

Reális és hasznos volt az elmúlt két év könyvkiadása. A magyar nyelvű könyvek témái megfelelően alkalmazkodtak ahhoz, hogy az itt szóba jövő — például kétezres — példányszám, már csak olyan témákat enged meg, amelyek iránt az egész elektronikai iparban elég sokan (vagy a távközlésben belül a szakemberek nagyrészt) érdeklődnek. E követelményeknek is jól eleget tettek a szóban forgó könyvek.

A felsorolt kilenc könyv közül kettő szerzője áll közvetlenül távközlési problémákkal kapcsolatban. Bár a könyvkiadást tekintve túl kicsik e számok megalapozott tanulságok levonására, mégis az látszik, a könyvkiadásban magának a távközlésnek a művelői a kellenél kisebb szerzői aktivitást fejtettek ki, az elmúlt két évben. Legalábbis, lényegesen több monográfiára is érdemes eredményekről tudunk, mint amin e munkaterületen működő szerzők, ebben az időszakban ténylegesen dolgoztak, vagy dolgoznak.

Természetesen, most sem valamilyen formális reklamációra, hanem az erre érdemes monográfiatémák megjelenésének módszeres ösztönzésére és segítésére van szükség. Hiányoznak például monográfiák arról a jelentős és összetett munkáról, ami az utóbbi években a hazai számítógépes tervezés szolgáltatási kultúráját hozta létre.

Javaslatok

Ez a bizottság nem operatív testület. Ezért nem valamiféle hivatali rendszabályokkal, hanem inkább csak szakmai és tudományos tevékenységek ösztönzésében, kibontakoztatásában tud a hazai szakmai életre hatni. E ráhatások — ha elég következetesek — végeredményben sokkal nagyobb jelentőségűek lehetnek egyoldalú, adminisztratív intézkedéseknél.

Ennek megfelelően tesszük a következő javastunkat:

1. Tudatosítsuk az eddiginél szélesebb körben, következetesen, hogy a hazai szakmai kultúra fejlődése szempontjából egyaránt lényeges dolog

- a hazai szakmai tájékoztatás, képzés és a széles körű szakmai közélet és
- a nemzetközi tudományos életben való aktív részvétel

támogatása. Lényeges, hogy mind a szerzők, mind a szerkesztők és bírálók legyenek tisztában azzal, hogy itt két eltérő feladatról van szó. Ösztönözni célszerű a hazai távközlés művelőit arra, hogy munkaterületüknek, érdeklődésüknek és felkészültségüknek megfelelő módon mindkét célt aktívan szolgálják. Lényeges azonban, hogy gondos kritikát igénylő munkaeredmények a megfelelő szakfórumok előtt, szűkebb témakörük kompetens folyóirataiban, idejében próbára legyenek téve (feltéve, hogy egyáltalán engedély van a publikálásukra).

2. Segítsék az 1. táblázatban felsorolt szakmai folyóiratok szerkesztését az aktív kollektívák rendszeres hozzájárulásukkal. Célszerű, ha egy-egy témakör módszeres műveléséhez eleve hozzátartozik, hogy a kollektíva tagjai a kérdés jellegzetességeiről, szélesebb kör számára is érdekes munkaeredményeikről és tapasztalataikról időszakonként publikálnak. Javasoljuk, hogy a szóban forgó gyakorlati szakfolyóiratok szerkesztői (e bizottság e minőségben működő tagjai) rendszeresen vizsgálják meg, továbbra is elég egyenletes ebben a tekintetben a hazai szakmai élet aktivitása.

3. Érezzenek a 2. táblázatban felsorolt hazai (vagy részben hazai) szerkesztésű tudományos folyóiratok szerkesztői felelősséget a velük kapcsolatban álló hazai alkotó kollektívák teljes publikációs aktivitásáért. A folyó munkák eredményeiből annak a tekintetbevételével hívjának meg, ösztönözzenek és fogadjanak cikkeket, hogy ezzel még ne sajátítsák ki a kollektívák teljes aktivitását. Törekedjenek arra, hogy témakörük hazai kollektívái valóban új eredményeiket megfelelő arányban publikálhassák a hazai kapcsolató és a hazai köröktől teljesen független orgánumban. (Ne ösztönözzön a hazai szerkesztési politika elzárkózásra, se ugyanaból az eredményből több „hígtott” változat írására. Az utóbbi a nemzetközi publikációk egyik leggyakoribb körtünete, világszerte.)

4. Tartozzék hozzá egy-egy nagyobb munkafeladat kidolgozásához cikkgyűjtemények, disszertációk és monográfiák írása. Ezzel tekintessék valóban kidolgozottnak egy-egy témakör. E bizottság tagjai személyesen is segítsenek feltárni és ösztönözni a hazai szakmai élet azon kollektíváit ahol, effajta munkára létrejöttek a feltételek. Munkahelyükön ösztönözzék azoknak a közbeeső írásoknak (például preprinteknek, preprintkivitelű monográfiáknak) írását, amelyek a munka közbeni fókán fejlesztik a szerző tevékenységét ebben az irányban.

5. Támogassa az Akadémia e közbeeső írásművek egyszerű, gyors, preprintszerű kiadását, (példának véve az MTA SZTAKI Közleményeit, ha lehet ennél gyorsabb átfutási idővel). Támogassa az Akadémia módszeresen az ehhez szükséges korszerű dokumentációs és sokszorozító eszközök beszerzését.

6. A kiadók (és e bizottság ott működő tagjai) továbbra is a széles olvasótáborhoz szóló, magyar nyelvű könyvek kiadását ösztönözzék. E bizottság tagjai segítsék saját munkaterületükön a távközlés eredményes művelőit, hogy saját maguk is járuljanak hozzá saját irodalmuk írásához.

7. Ösztönözzék e bizottság tagjai a tudományos értelemben új eredmények kidolgozóit, hogy eredményeiket szűkebb témakörük nemzetközi normái szerint bíráló, speciális folyóiratban publikálják: Ezen az úton is megfelelő próbának tegyék ki munkájukat. Igyekezzenek e bizottság tagjai saját bíráló és minősítő tevékenységükkel is terjeszteni azt a nézetet, hogy az eredményeket mindig konkrét tartalmi mérlegelés alapján kell bírálni és nem aszerint kell ítéletet alkotni, hogy például hány publikáció és hol jelent meg.

8. Javasoljuk, hogy két év múlva a Távközlési Rendszerek Bizottság konkrétan vizsgálja meg újra a felsorolt tekintetekben elért fejlődést.

Zármegjegyzések

Mindezt látjuk a leglényegesebbnek a *Távközlés* hazai folyóirat- és könyvkiadásával kapcsolatban, amely mérlegelésére e Bizottságtól megbízást kaptunk.

Természetesen, észrevételeink egy része nemcsak sajátosan a *Távközléssel* kapcsolatos kérdésekre, hanem általában a hazai folyóirat- és könyvkiadás egészére vonatkozik.

Bohus Miklós és Csibi Sándor

KÖNYVISMERTETÉS

BETONTECHNISCHE BERICHTE, 1976.

Beton Verlag, GmbH Düsseldorf

A kiadvány nyolc tanulmányt tartalmaz, amelyek az NSZK kutatóintézeteinek legújabb eredményeiről számolnak be.

A stuttgarti kutatók arra a kérdésre adnak választ vizsgálataik alapján, hogy a beton-építmények hangszigetelése megfelel-e kívánalmaknak.

A normál (nehéz) betonból készült építmények lég-hanggátlása általában kielégítő a szokványos méretek adta súly ill. tömegarányok mellett.

A panelos épületek réteges elemeiben alkalmazott hőszigetelő réteg emeli a hangszigetelő képességet. A testhang terjedése a betonban jelentős, de nem rosszabb a tégláépítmények csillapító képességénél. Értékes támpontot nyújt a feszített beton reaktorok tervezéséhez a düsseldorfi kísérlet sorozat. A beton mechanikai jellemzőinek változása neutron sugárzás hatására nem jelentős. A nyomószilárdság csökkenése kb. $3 \cdot 10^{19}$ neutron/cm² érték felett tapasztalható, míg a húzószilárdság kb. $1 \cdot 10^{19}$ n/cm² értéktől kezdve esik. A reaktor 200 ÷ 300 °C hőmérsékletét a beton szilárdság veszteség nélkül képes elviselni, az adalékanyag helyes megválasztásával. A mészködőüzalék alkalmasnak bizonyult e célra. A reaktorépítésben a 3%-os térfogatarányban előállított „acélszál, acélhaj beton” bizonyult kedvezőnek.

Az épületek jó hőszigetelése az energiatakarékosság egyik jelentős módja. Bár a minimális követelményeket, a lakáshigiénia szem előtt tartásával, a DIN 4108 már korábban összefoglalta, az épületek tényleges hővesztésének felmérése újabb szigorítások bevezetését tette szükségessé. Ennek keretében a nyílászárókon kívül a födémek (pincefödém és zárófödém) hőátbocsátását is korlátozzák. A hővédelem a hőszigetelés, a hőmérséklet-ingadozás és a klíma-nedvesség épületfizikai összefüggéseit öleli fel.

A beton hőtechnikai tulajdonságai köztudottan kedvezőek. A szerző a hő és páraszigetelő rétegek elhelyezésére néhány példát mutat be. A meglevő és széles körben alkalmazott műszaki megoldások helyes kiválasztása lehetővé teszi az előírás követelményeinek teljesítését.

A német és amerikai vizsgálatok eredményére támaszkodva a 30 és 50 éves beton mechanikai tulajdonságait elemzi WALY tanulmánya. Megállapítása szerint a szabadon tárolt portlandcement beton nyomószilárdsága 30 év után 2,3-szorosára, 50 év után 2,5-szörösére emelkedett a 28 napos kockaszilárdsághoz viszonyítva. A rugalmassági modulus növekedése 15 ÷ 20%-ra tehető.

A beton mérsékelt vagy magas fagyállóságát a fagyálló adalék biztosítja. Az adalék ilyen szempontból történő vizsgálata a DIN 4226 előírása szerint nem bizonyult kielégítőnek. Ezért az NSZK öt nagy kutatóintézete, 130 vizsgálat alapján új minősítési módszert dolgozott ki, amely az igény (fagyállósági fokozat) és rendeltetés (pl. nyersbeton felület, útburkolat stb.) szerint szabja meg a vizsgálat és az értékelés módját.

A cement nyomószilárdságának kérdésével foglalkozik LOCHER tanulmánya. Az irodalmi adatok és saját kísérleti eredményei alapján megállapítja, hogy a cementkö átlagos (fajlagos) nyomószilárdsága 2000 kp/cm². Ez az érték törvényszerűen csökken a kapilláris porozitás mértékével. A szilárdulás folyamata és a cement összetétele ugyancsak kihat a fajlagos nyomószilárdság értékre. Magas hőfokon történő nyomással 6000 kg/cm² fajlagos szilárdság is elérhető. A szilárdulás a hatórás „nyugalmi” idő után indul meg. E folyamat vegyszeres kezeléssel vagy hőkezeléssel gyorsítható. A finom őrlés csak bizonyos határok között kedvező, mivel több vizet igénylő feldolgozás, csökkenti a szilárdságot.

A különböző cementek hatása a cementszuspenzió stabilitására és folyósodására képezi tárgyát a düsseldorfi kísérleteknek. Zárt összefüggések vezethetők le a menet fizikai, kémiai és ásványi jellemzői, valamint a cement szuszpenzió reológiai tulajdonságai között. A kísérlethez 19 cementfajta, 0,6 ÷ 2,0 közötti vízcementtényezőtől szolgált mintául. Az eredményt elektronikus adatfeldolgozóval, regressziós módszerrel állapították meg. A viszkozitás és vízcementtényező függvényében kifejezhető a cementszuspenzió stabilitása.

Az üledés sebességét elsődlegesen a vízcementtényező és a szemeloszlás határozza meg. A betontechnológia jelen helyzetével és feladataival foglalkozik a kiadvány utolsó tanulmánya.

Megállapítja, hogy a beton tulajdonságai ismertek, viselkedése különböző hatásokra feltártnak tekinthető. Ezen ismeretek birtokában a műszakilag és gazdaságilag legmegfelelőbb megoldás mindig kiválasztható.

A tanulmányok gazdag irodalmi tájékoztatást tartalmaznak. A 76-os kiadványt az eddig megjelent tanulmányok felsorolása zárja le.

Dr. Goschy Béla

Franz, G.:

BETON-KALENDER 1977

Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn., Berlin—München—Düsseldorf 1977. I. kötet: 1085 oldal, II. kötet: 1135 old.

Ez a mű immár a 66. évfolyama ennek az évről-évre megfiatalodva megjelenő kitűnő zsebkönyvnek.

A mű első kötete 10 fejezetet foglal magában. Ezek közt jelentős helyet foglal el az acél-szerkezetekkel foglalkozó fejezet (*W. Schumacher*), a szilárdságtani összefoglaló (*Prof. N. Dimitrov*), a rúdszerkezetek statikáját tárgyaló rész (*H. Ahrens—Prof. H. Dudeck*), a vasbetonszerkezetek méretezésével és stabilitási problémáival foglalkozó fejezet (*G. Grassner; Prof. K. Kordina—Prof. U. Quast*), valamint a feszített betonszerkezetek méretezési problémáit felölelő tanulmány (*Prof. H. Rüsch—Prof. H. Kupfer*).

A mű második kötete 6 fejezetet tartalmaz. Ezek közül legterjedelmesebb a tervező és kivitelező mérnök számára nélkülözhetetlen szabályzatok gyűjteménye (*H. Goffin*). Ismételtten megjelentek a zsebkönyvben a korábbi évfolyamokból már ismert egyes fejezetek: az építmények szigetelésével foglalkozó tanulmány (*R. Linder*), a földnyomás kérdésével foglalkozó fejezet (*G. Jenne*), valamint az alapozások kérdéseit tárgyaló cikk (*W. Klöckner—H. G. Schmidt*).

A könyv új fejezetei közül megemlítendő a tartók felfekvési fészkeinek és a tartóvégeknek szerkezeti kialakításával foglalkozó összeállítás (*K. Rahlwes*), amely a helyes és helytelen megoldások éles szembeállításával tárgyalja a vasbetonépítészetnek gyakran elhanyagolt, de valójában igen fontos kérdését.

Új fejezetként jelent meg a zsebkönyvben a silókkal foglalkozó tanulmány (*G. Timm—R. Windels*). Ez a fejezet részletesen tárgyalja a silók tervezésével, kivitelezésével és üzemeltetésével kapcsolatos kérdéseket és tanulságos ábrák, valamint diagramok kíséretében foglalja össze az e téren szükséges tudnivalókat.

A könyv szerkesztője, *Prof. G. Franz* és az egyes fejezetek szerzői gondosan ügyeltek arra, hogy ez a mű rövidre szabott, de szabatos és kimerítő tájékoztatást nyújtson a vasbeton-építészet jelenlegi állásáról és aktuális problémáiról. A szövegrészeket számos magyarázó ábra, sok hasznos táblázat, diagram és képlet egészíti ki. Igen értékesek az egyes fejezetek végén található irodalmi jegyzékek is, amelyek az egyes tárgyalt kérdések további beható tanulmányozására nyújtanak lehetőséget.

Mindent egybevetve, megállapítható, hogy ennek a hosszú múltra visszatekintő zsebkönyvnek jelen új évfolyama a régi hagyományokhoz híven kitűnően szolgálja nemcsak a német nyelvterületen, de annak határain túl is a vasbetonépítés érdekeit.

Dr. Csonka Pál

Kéződi Árpád:

TALAJMECHANIKA — PÉLDÁK ÉS ESETTANULMÁNYOK

Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.* 270 o. kb. 250 ábra és kép.

A könyv a több nyelven megjelent „Talajmechanika sorozat” IV. kötete. A sorozat e befejező részében a Szerző érdekes kísérletre vállalkozott: bemutatja, hogy *mire és hogyan lehet felhasználni* azt az elméleti ismeretanyagot, amelyet a korábbi kötetekben olyan célratorően és meggyőzően felépített.

Tematikáját tekintve a könyv az ún. alkalmazott — valójában az igazi értelemben vett — talajmechanika *négy nagy fejezetét* érinti, ezek: a földművek, a megtámasztó szerkezetek, a felszínmozgások és az alapozások. Egy-egy kategórián belül az olvasó a feladat-típusok széles skálájával találkozhat. Így pl. a földművekkel foglalkozó fejezet nemcsak az út- és vasútépítés, hanem a vízellátás problémáit is tárgyalja, az utóbbin belül is külön a víztározók, a völgyzáró gátak és az árvédelmi töltések talajmechanikai kérdéseit, de ide sorolhatók a külszíni fejtésekről írottak nagy része is.

A földművekhez kapcsolódó esettanulmányok elsősorban a talajok helyszíni és laboratóriumi vizsgálatával, a károsodások elemzésével és a helyreállítás lehetőségeivel foglalkoznak. Olvashatunk az árvédelmi töltések tönkremenetelének okairól, a pórusvíznyomás mérésének előnyeiről, a szárnyas szonda felhasználásának előfeltételeiről, a szükséges tömörség kritériumáról, az előtömörítés jelentőségéről, a szerkezetes anyagok tulajdonságairól, a duzzadás ill. zsugorodás szilárdsági és egyéb következményeiről, a belső erózióról és még számos más, érdekes kérdéstről.

A földnyomásról írva a szerző példákkal is bizonyítja, hogy a fizikai jellemzők időbeli változásának, a várható mozgásoknak és az építési módnak a figyelembevétele döntő fontosságú a méretezés szempontjából. Ismerteti azt a szakkörökben feltűnést keltő bizonyítását, mely szerint a földnyomás a támfal súlyának is függvénye. Érdekesen fejtegeti a polcos támfalak problémáját, rámutatva a szerkezet gyakorlati vonatkozású kérdéseire is.

A felszínmozgásokról írottak azt tükrözik, hogy minden esetet egyedi elvek és módszerek szerint kell vizsgálni, és a szokásosnál szorosabb kapcsolatot kell a helyszínen dolgozókkal kialakítani. A könyvben elemzett esetek meggyőzően bizonyítják, hogy a geológia és a mérnökbiológia ismeretanyagának felhasználása adott esetben mennyire hasznos; igen ötletes megoldást olvashatunk pl. a felszín alatti vizeknek olyan szivárgókkal való megcsapolásáról, melyek nyomvonalát a Szerző a növényzet segítségével tűzte ki.

Az alapozást érintő esetek nagy része magas súlypontú ill. nagy terhelésű építményekre vonatkozik, az olvasó így a legidősebb kérdésekben kap eligazítást és hasznos irányelveket.

A könyv nemcsak az egyetem hallgatóinak és a gyakorló szakembereknek szól, sok érdekes elméleti megállapítást talál benne a geotechnikai szakág kutatómérnöke is. A könyv egyik legjelentősebb pozitívuma, hogy az itt tárgyalt sokrétű és szerteágazó kérdés-komplexum tárgyalását előzményekkel megalapozott, egységes szemlélet jellemzi.

Dr. Rétháti László

ZEMENTTASCHENBUCH 1976/77

Verein Deutscher Zementwerke e. V. Düsseldorf. Bauverlag GMBH. Wiesbaden - Berlin, 430 o. szöveg, 63 o. építéstechnikai táblázatok, 32 o. cementipari tájékoztató

A szakemberek mindig nagy érdeklődéssel várják a saját szakterületük témakörében megjelenő újabb szakirodalmat, főképpen az összefoglaló munkákat, s ezek között is a legújabb zsebkönyveket, kézikönyveket.

Igy van ez a rohamosan fejlődő építőipar területén is. Építményeink műszaki jósága, amelyet nemcsak azok megbízhatósága, hanem korszerűsége, és gazdaságossága is fémjelez, megkívánja, hogy szakembereink ismerjék a legújabb műszaki eredményeket, új anyagokat új technológiákat és új elméleti kutatásokat is. Ennek az új fejlődésnek gyors áttekintéséhez, megismeréséhez nyújtanak segítséget a sorozatosan, évről-évre megújult, átdolgozott, kiegészített formában megjelenő zseb- és kézikönyvek.

* A könyv német nyelven 1976-ban mint a *Handbuch der Bodenmechanik* 4. kötete jelent meg (Verlag, für Bauwesen, Berlin); angol (Elsevier, Amsterdam), orosz (Sztrojizdat, Moszkva) és spanyol (Libreria Universitaria, Caracas) kiadása előkészületben van.

A beton- és a vasbetonépítés szakemberei számára az egyik jelentős zsebkönyv: a Zementtaschenbuch, teljesíti ezt a fent említett célkitűzést. A Zementtaschenbuch 1974/75 kötete az 1974-et megelőző évek beton- és vasbetonépítési tevékenysége területén foglalta össze az új eredményeket. Az előttünk fekvő Zementtaschenbuch 1976/77 az utóbbi két esztendő betontechnológiai fejlődésének szakmailag leglényegesebb fejezeteit gyűjti össze, meghagyva, illetőleg szükségszerűen kiegészítve az előző kötetekből azokat a fejezeteket, vagy részfejezeteket, amelyek a mindenkori felhasználó számára állandóan fontosak. Természetesen, ez az új kötet új fejezetekkel gyarapodott s kimaradtak belőle azok a részek, amelyeket az előző kötetek részletesen tárgyaltak, s amelyek az építőiparnak — nem nagy gyakoriságú — előfordulásai. Ez a szerkesztési-szerkezeti szemlélet, amelyet helyesnek és gazdaságosnak tarthatunk, feltételezi, hogy az érdeklődő szakembereknek kezében vannak a már eddig megjelent kötetek is s így saját területükön egy teljes szakirodalom rendelkezésre áll, amelyből a momentán szükséges kiválasztható.

A Zementtaschenbuch 1976/77 kilenc fejezetre oszlik, I. A cement, II. Az adalékanyag, III. A betonadalékszerek, IV. A normál beton, V. A könnyűbeton, VI. A cementfelhasználás területei, VII. Áttekintés az 1962 óta a Zementtaschenbuchban megjelent különleges fejezetekről, VIII. Fontos szabványok, irányelvek és tájékoztatók, végül tárgymutató, IX. Általános és építéstechnikai táblázatok. Ezeket a fejezeteket egészíti ki a cementipar organizációja és az NSZK valamint Nyugat-Berlin cementgyáaira vonatkozó tájékoztató. A Cementzsebkönyv 1976/77 II. fejezetéből kimaradt a nehéadalék, a IV-ből a betonfajták, erősen lerövidült a könnyűbeton fejezet, átalakult a VI. fejezet. Ezzel szemben bekerültek, illetőleg részletesebben kerültek tárgyalásra a cementfelhasználás területeiben a beton alakváltozásai, a folyós beton, a fokozott hővédelmet kívánó betonépítmények, és jelentősen kibővültek az általános és építéstechnikai táblázatok.

A Cementkönyv 1976/77 — az eddig megjelent cementzsebkönyvekhez hasonlóan — jól szerkesztett, szép kiállítású munka, amely világosan tükrözi azokat a célkitűzéseket, amelyeket a szakemberek vele szemben támasztanak.

Dr. Palotás László

Eckstein, Hans-Joachim (kiadó) és szerzői kollektíva:

TECHNOLOGIE DER WÄRMEBEHANDLUNG VON STAHL

AZ ACÉL HŐKEZELÉSÉNEK TECHNOLÓGIÁJA

VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1977. 580 old., 506 ábra, számos táblázat, összefüggés, képlet, kiterjedt irodalmi hivatkozások.

A könyv kiadója, szerzője, Prof. Dr.-Ing. habil., Dr. h. c. H.-J. ECKSTEIN, a Freibergi Bányászati Akadémia vaskohászati tanszékének vezető professzora, hazánk szakköreiben is méltán közismert egyéniség. Jó néhány könyvét használják világszerte. Eredményeiért sok elismerésben részesült, a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem évekkel ezelőtt díszdoktorrá avatta.

ECKSTEIN professzor jelentős feladatra vállalkozott, amikor célul tűzte ki egy olyan korszerű könyv kidolgozását, amely az acél hőkezelésének elméleti és gyakorlati kérdéseit elsősorban az üzemi, üzemszervezési követelményeknek megfelelően foglalja magában. A hosszú előkészítés után a közelmúltban megjelent mű tankönyv és kézikönyv szerepét egyaránt hivatott betölteni. Főbb fejezetei a következők:

1. *A hőkezelési folyamatok közös alapjai* (hőtranszport, anyagtranszport, hőokozta feszültségek).

2. *A munkadarab hőkezelési folyamatának tervezése.*

3. *A hőkezelési eljárások áttekintése* (a használatos hőkezelési eljárások rendszerezése és részletes ismertetése).

4. *Különleges hőkezelési módszerek* (huzalpatentírozás, méret- és térfogatállóság biztosítása, gyorsacélok hőkezelése, hideghengerek, illetve nagy kovácsdarabok hőkezelése, fogaskerek betétből való edzése, csigakerek gáznitridálása stb.).

5. *Hőkezelési hibák* (károsatok és az elkerülés lehetőségei).

6. *Hőkezelő berendezések és üzemek.*

A könyv főként a fémtani alapozás, az elméleti meggondolások alapján való technológiai tervezés, a korszerű üzemtelepítés és folyamatirányítás szempontjából egészíti ki a hőkezelés újabb szakirodalmát.

Dr. Fuchs Erik

Kozák Miklós és munkatársai:

HIDRAULIKAI PÉLDATÁR
Tankönyvkiadó, Budapest 1977.

A szerzők könyvüket elsősorban az egyetemi oktatás hasznos segédkönyvének szánták. A feldolgozott példaanyagot ennek megfelelően választották ki, s nagyon szerencsésen a választás a vízépítő mérnöki gyakorlatban előforduló hidraulikai számítások teljes körét felöleli. Didaktikai célokat szolgál a könyv szerkezeti felépítése: az egyes fejezetek (témakörök) tömör elméleti összefoglalással kezdődnek és ezt követik az egyes feladatok konkrét numerikus megoldásai, amelyek a könnyebb érthetőség érdekében ábrákkal, vázlatokkal egészülnek ki.

A folyadékok fizikai tulajdonságaival foglalkozó bevezető fejezet után a hidrosztatika témaköre következik. Sík és görbült felületekre ható nyomóerők számításával; a nyomás alatti abszolút, valamint a relatív nyugalomban levő folyadékokkal és a folyadékba merülő testek úszásproblémáival kapcsolatos feladatok megoldása a tárgya e fejezetnek.

A könyv több, mint harmadrészét teszi ki a vízépítő mérnöki gyakorlatban igen jelentősnek számító szabad felszíni vízmozgásokkal foglalkozó következő két fejezet. A harmadik fejezetben először a nyílt medrekben kialakuló permanens egyenletes, valamint fokozatos változó, majd utána a nem permanens vízmozgásokra találja az olvasó olyan példák megoldását, amelyek nemcsak az egyetemi hallgatóságnak tanulságosak, hanem a praktizáló mérnököknek is hasznos segítséget nyújtanak ilyen jellegű feladataik megoldásakor. A bonyolult feladatok megoldásához a szerzők a számítógépi programok listáit is közlik, ami a gyakorlati felhasználás során különösen hasznos lehet. A műtárgyak környezetében kialakuló vízmozgásokkal foglalkozó negyedik fejezet példái egy-egy konkrét gyakorlati esetet dolgoznak fel. Ilyenek: a fenékküszöb feletti vízszint meghatározása; medencékből és tartályokból, továbbá zsilitábla alatti kifolyási problémák megoldása; bukógátak, energiatörő berendezések, csőáttereszek és surrantók hidraulikai méretezése.

Az ötödik fejezet nyomás alatti csővezetékben kialakuló permanens és nem permanens vízmozgásokkal kapcsolatos feladatok megoldására mutat be példákat, amelyek mindegyike egyben mintapéldául is szolgál a mérnöki alkalmazásokra.

A könyv hatodik, egyben utolsó fejezetét a szerzők a porózus közegben kialakuló szivárgás problémakörének szentelték. Ebben a fejezetben gátak alatti szivárgásokkal kapcsolatos feladatok megoldása található.

A könyv szerzői — tekintettel arra, hogy a hidraulikai számítások a vízépítési és vízgazdálkodási feladatok megoldásában egyre nagyobb jelentőségre tesznek szert — a példák kiválasztása során a didaktikai célok mellett elsősorban arra ügyeltek, hogy a gyakorlatban előforduló feladatokat dolgozzanak ki. Ezzel is hangsúlyozva azt, hogy a mérnöki tevékenység kereteit mindenkor a népgazdasági igények szabják meg. Mivel pedig ma már igen sokszor olyan igényekkel találja magát szemben a praktizáló mérnök, amelyeknek gazdaságos kielégítése csak korszerű számítógépekkel lehetséges, a szerzők nagyon helyesen ilyen feladatok bemutatására is törekedtek. E feladatok megoldásához komplett számítógépi programokat közölnek ALGOL-60 nyelven az ODRA-1204 típusú gépre. Az elmondottak miatt nemcsak egyetemi hallgatóknak, hanem a vízépítő gyakorlatban tevékenykedő mérnököknek is igen hasznos segítőtársa lehet e könyv.

Dr. Czibere Tibor

Kézdi Árpád:

FRAGEN DER BODENPHYSIK

(A TALAJFIZIKA KÉRDÉSEI)

KÉZDI professzor az Akadémiai Kiadónál 1976-ban a Német Mérnökegylet (VDI = Verein Deutscher Ingenieure) megbízásából megjelentetett könyve értékes kötete annak a sokoldalú, szakirodalmi tevékenységnek, amelyet a szerző a talajfizika, talajmechanika, geotechnika területén kifejt. A kötet a talajfizika néhány kiemelt kérdésével foglalkozik, nevezetesen a szemcsék és pórusok térfogat szerinti megoszlására, a homokok és az ún. átmeneti talajok tömöríthetőségére, a hidraulikai talajtörésre, a szuffózióra és erózióra, a homokokban bekövetkező fázisváltozásokra, a kötött talajok húzószilárdságára és nyírószilárdságára, valamint az ezekkel kapcsolatos kérdésekre ad új adatok alapján választ.

A könyv szemléletét az jellemzi, hogy a talajban jelenlevő három fázis (talajszemcsék, víz és levegő) egymásra hatásait vizsgálja. A szerző új definíciót vezet be a szemcsés és a kötött talajok között, és pedig az átmeneti talajokat, amelyekre vonatkozó legújabb ismereteket kísérleti alapokra támaszkodva közöl. Új ismereteket közöl a fázismozgásokkal kapcsolatban, mégpedig a vízkivételi kutak elhomokosodásának lehetőségével, a háromfázisú zónabeli vízmozgással. A szűrők viselkedésével kapcsolatban részletesen elemzi az ún. önszűrő hatást. Külön érdeme a könyvnek, hogy egységes vizsgálati módszert vezet végig, háromszögdiagram segítségével elemzi a fázisváltozásoknak a hatásait.

A szerző a könyv bevezető fejezetében a fázisváltozások vizsgálati alapjait mutatja be. A II. fejezet a szemcsék és szemcsehalmazok talajfizikai elemzését mutatja, mégpedig a durva szemcsék eloszlását, a finomszemcsés anyagban a pórusok nagyságának eloszlását, a szemcseeloszlás és a tömöríthetőség közötti összefüggést, a szemcsés keverékek tulajdonságait, az átmeneti talajok tömöríthetőségét. A III. fejezet a szilárdság kérdéseit elemzi, mégpedig a homokok, az átmeneti talajok és a kötött talajok szilárdságát, a talajok rideg törését, a kötött talajok nyírószilárdságát. A fázismozgások néhány esetét a IV. fejezet tárgyalja, ahol az alapvető törvényszerűségek összefoglalása után a feltett homokokban végbemenő vízmozgás, a hidraulikus talajtörés, a szuffózió és az erózió, a háromfázisú zónabeli fázismozgások, továbbá a kötött talajokbeli fázismozgása kerülnek ismertetésre. Az irodalomjegyzék 87 művet foglal össze. Kár, hogy a könyv a két- háromfázisú szivárgással kapcsolatos vízpépítési (hidraulikai és hidrológiai) hazai és külföldi, főleg újabb szakirodalmat alig említi.

A talajfizika legújabb eredményeit és közte elsősorban a szerző, valamint a Budapesti Műszaki Egyetem Geotechnikai Laboratóriumának eredményeit bemutató szakkönyv a talajmechanikával és geotechnikával foglalkozó mérnökök körében komoly elismerésre számíthat. A gyakorlati szakemberek is számos olyan kérdésre találhatnak a könyvben megoldást, amelyek hosszabb idő óta foglalkoztatják őket.

*Dr. Starosolszky Ödön**A. Mälmeisters, V. Tamužs, G. Teters:*

MECHANIK DER POLYMERWERKSTOFFE

(MŰANYAGOK MECHANIKÁJA)

Akademie-Verlag, Berlin, 1977, (597 oldal)

A vegyipar rohamos fejlődése a legkülönbözőbb tulajdonságokkal rendelkező műanyagok tömeges és viszonylag olcsó gyártását teszi lehetővé. Ezeket az anyagokat azonban csak akkor tudják a gép-, jármű- és építőiparban széles körben felhasználni, ha szilárdsági tulajdonságaik leírására és a belőlük készült szerkezetek és alkatrészek mechanikai viselkedésének vizsgálatára megbízható elméletek és eljárások állnak rendelkezésre.

Közismert, hogy a műanyagok szilárdsági tulajdonságai a hagyományos szerkezeti anyagok viselkedésétől jelentős mértékben eltérnek: a műanyagok általában anizotropok, hőmérsékletváltozásra igen érzékenyek, nyírási merevségük csekély és jelentős képlékeny és viszkózus alakváltozásokat végeznek. Emiatt a mechanika hagyományos elméletei a műanyagból készült szerkezetek vizsgálatára nem alkalmasak. Helyettük olyan általánosabb elméletekre van szükség, amelyek a vázolt különleges tulajdonságokat is figyelembe tudják venni.

A műanyagok nagy műszaki és gazdasági jelentőségének megfelelően a mechanikai viselkedésükkel foglalkozó dolgozatok és könyvek száma egyre növekszik. Ezek között A. MÁLMEISTERS, V. TAMUŽS és G. TETERS 1972-ben oroszul, majd 1977-ben német fordításban is megjelent monográfiájának kiemelkedő jelentősége van. Szerzők könyvükben egységes formában ismertetik a műanyag szerkezetek vizsgálatára alkalmas elméleteket és számítási módszereket, és alkalmazásukat számos, mérnöki szempontból fontos feladat megoldásán mutatják be. A könyv az alábbi fontosabb fejezeteket tartalmazza:

a feszültség- és alakváltozás-állapot leírása: a feszültségek és az alakváltozások közötti összefüggés rugalmas testeknél; reológiai tulajdonságokkal rendelkező anyagok; képlékeny testek; törési elméletek; rudak, lemezek és héjak merevségi és stabilitásvizsgálata.

A felsorolásból is látható, hogy a könyv az alapfogalmaktól kiindulva a szilárdságtan valamennyi fontosabb elméletét tárgyalja, különösen behatóan foglalkozik azonban a hőmérsékletváltozás és a nyírási alakváltozások hatásával, valamint a viszkózus, a képlékeny és a nem lineárisan rugalmas anyagokkal, mivel ezeknek a kérdéseknek a műanyagyszerkezetekben alapvető jelentőségük van. A gyakorlat szempontjából főleg a két utolsó fejezet igen hasznos, mert számos feladat megoldása kapcsán bemutatja, hogy a felsorolt különleges hatások és anyagtulajdonságok hogyan vehetők számításba rudak, gerendák, lemezek és héjak szilárdsági, merevségi és stabilitásvizsgálatakor.

Szerzők a nagy terjedelmű anyagot indexes tenzorjelölések felhasználásával, egységes, áttekinthető formában, magas elméleti színvonalon tárgyalják. A különböző feladatokat analitikus úton oldják meg, a numerikus módszerek alkalmazásának lehetőségéről nem tesznek említést. Az irodalomjegyzékben felsorolt több mint 350 könyv és dolgozat főleg a szovjet irodalomban megjelent tudományos eredményekről nyújt igen hasznos tájékoztatást.

A. MÁLMEISTERS, V. TAMUŽS és G. TETERS elméleti és didaktikai szempontból egyaránt kitűnően összeállított könyve elsősorban a szilárdságtan új területén dolgozó kutatók, oktatók és a posztgraduális képzésben résztvevő hallgatók igényét szolgálja, minden bizonnyal azonban az iparban és a tervezőirodákban dolgozó technológusok és konstruktőrök munkájához is hasznos segítséget nyújt.

Dr. Kalinszky Sándor

Rétháti László:

TALAJVÍZ A MÉLYÉPÍTÉSSEN

Akadémiai Kiadó, 1974

A hazai szakmai irodalomban ez az első olyan könyv, amely teljes egészében, vagyis minden vonatkozásában és részletesen öleli fel a talajvíz műszaki és gazdasági kérdéseit. Azért nem mondhatunk „műszaki irodalmat”, mert a könyvet nemcsak a mélyépítés, hanem a geológia, hidrológia, meteorológia és a mezőgazdaságtan művelői is eredményesen használhatják információs adattárként és módszertani útmutatóként, akár kutatásaikhoz, akár gyakorlati feladataik megoldásához. Ezzel egyben utalás arra is, hogy a könyv az összes társtudomány (hozzászámítva még a többi tudományág, a fizika, kémia, matematika stb.) olyan kutatási eredményeit is tárgyalja, amelyek a talajvíz megjelenésével, előfordulásával, tulajdonságaival, kezelhetőségével kapcsolatba hozhatók, illetve ilyen kapcsolatban hasznosíthatók.

Szerző külön fejezetben ismerteti azokat a matematikai módszereket, amelyekkel a megfigyelésekkel és adathalmazokkal dolgozó szemimpiikus jellegű geohidrológia-eredményes előrejelzéseket tehet. Ezek közé tartozik a sűrűség- és eloszlásfüggvények apparátusa, a sztochasztikus kapcsolatok felállítás és a periodicitás vizsgálata.

A mű monográfia. Az irodalomjegyzékben felsorolt 342 tanulmány, ill. könyv szerzőjének kutatási eredményeit találjuk meg az anyagban, amelyekhez Szerző külön értékelést, határértékeket, megbízhatóságukról megállapításokat fűz. Szerző 26 saját dolgozatának anyagát is felhasználta, ezáltal az egész mű jellegzetesen Szerző saját műszaki tapasztalatának és hazánkban átfogóan ismertőjének ismeretanyagát továbbítja az olvasónak.

A mű két részre tagozódik. Az első rész elméleti és módszertani, a második rész gyakorlati ismeretanyagot közöl. A két rész egymáshoz viszonyítva, az egyes fejezetek pedig egymás között arányosan épültek fel. A fogalmazás nem bőbeszédű, világos, következetes. Az ábrák kellő számban, kellő magyarázó erővel támasztják alá a szöveget, a 20 oldalnyi függelékbe helyezett táblázatok pedig nem zavarják az olvashatóságot.

A fejezetcímek rövidségével felsorolva, az első rész a következőket tartalmazza: a felszín alatti víz eredetét és osztályozását; a víz fizikai, kémiai és biológiai jellemzőit; a fedő talajréteg hő- és vízháztartását, a kapillaritást; a légköri jelenségeket, csapadékot, párolgást; a talajvízszint térbeli és időbeli változásait; a talajvízállás előrejelzését, és a kapcsolatos matematikai apparátust.

A második rész tartalma pedig az alábbi: a mélyépítési munkák előkészítése, a talajvíz-viszonyok felderítése; a természetes és mesterséges tényezők (vízfolyások, terepviszonyok, műszaki beavatkozások stb.) hatása; a talajvízszint szélső értékeinek meghatározása; a vízmentesítés és egyéb mélyépítési feladatok megoldása; épületkárok elemzése.

Összefoglalva: a mű egy elkötelezett, felkészült és alapos tudós élete során felgyülemlett ismeretanyagot tartalmaz, amit nagy hozzáértéssel továbbít az olvasó részére.

Héjj Huba

Verő József—Káldor Mihály:

FÉMTAN

Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.; 636 oldal, 520 ábra, számos táblázat és a fontosabb, nemzetközi szakirodalom jegyzéke

VERŐ akadémikus „Fém-tan” c. könyvének első kiadása 1969-ben jelent meg. Az igények kielégítésére a Tankönyvkiadó 1970-ben és 1973-ban változatlan utánnyomásokat adott ki. A mostani, lényegében negyedik kiadás előkészítésében — társszerzőként — közreműködött KÁLDOR Mihály, VERŐ akadémikus tanszéki utóda is. A könyv így valóban híven követi a Nehézipari Műszaki Egyetem Fém-tani Tanszékén oktatott alapozó tananyag fejlődését.

A könyv 12 fejezetből áll. Az első három fejezet a színfémek és ötvözetek szerkezetével, fázisviszonyaival, a szerkezetvizsgálat módszereivel foglalkozik. A 4. fejezet a kristályosodást és az átalakulásokat tárgyalja. Az 5. fejezet a fémek és ötvözetek mechanikai tulajdonságait, az e tulajdonságok vizsgálatára használatos vizsgálmódszereket ismerteti. Ugyanez a fejezet világítja meg az alakváltozás mechanizmusát, a rács hibák szerepét, a hőbehatás, a növelt hőmérséklet következményeit, a textúrák keletkezését. Külön alfejezet összegzi a hőkezelés és a mechanikai tulajdonságok kapcsolatát.

A 6—10. fejezet a fizikai tulajdonságokkal, a hőtartalommal, a sűrűséggel és hőtágulással, a villamos- és a hővezetőképességgel, a mágnesességgel, az akusztikai és az optikai tulajdonságokkal foglalkozik. Mindegyik fejezet előbb tisztázza a fizikai alapfogalmakat, majd ismerteti a fémek és ötvözetek megfelelő tulajdonságait, visszavezetve őket az anyagszerkezeti okokra.

A 11. fejezet a fémek és a gázok kölcsönhatásait írja le. A 12. fejezet végül részletesen tárgyalja a korrózióra vonatkozó ismereteinket, a korróziót elősegítő és akadályozó folyamatokat, a korrózióvédelem lehetőségeit.

Növeli a könyv korszerűségét, hogy következetesen áttért a nemzetközi mértékegységek SI-rendszerére, ezzel is biztosítva az egységes szemlélet kialakítását.

VERŐ József és KÁLDOR Mihály új könyve minden bizonnyal nemcsak a kohómérnök-hallgatóknak lesz értékes munkaeszköze, hanem segíteni fogja mindazok munkáját is, akik a fémek anyagok előállításával, feldolgozásával és felhasználásával foglalkoznak.

Dr. Fuchs Erik

Zimmermann, R.,—Günther, K.:

METALLURGIE UND WERKSTOFFTECHNIK, EIN WISSENSSPEICHER. BAND I—II.

(A METALLURGIA ÉS AZ ANYAGTECHNOLÓGIA EGY ENCIKLOPÉDIÁJA)

VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig/DDR, 1977. — I. kötet 680 old., II. kötet 384 old. Számos ábra, fénykép, táblázat; sok képlet, matematikai összefüggés

A kétkötetes mű a metallurgia és az anyagtechnológia rohamosan fejlődő, szerteágazó ismeretanyagát törekszik koncentráltan, lényegretörően, lehetőleg képletekbe foglalva is áttekinteni. A szerzők jól tudják, hogy nagyon nehéz feladatra vállalkoztak. A folyóiratokban,

a konferenciákon, kutatási jelentésekben és egyéb kiadványokban közreadott információ áradat ugyanis az egyén számára egyre reménytelenebbül követhetetlen, s a tankönyvek is csak egyre specializáltabb részterületek ismeretanyagát tárgyalják. Korunk súlyos problémája, hogy a tudomány és az ipari termelés egyaránt megköveteli a legmagasabb szintű felkészültséget, a felkészülésre fordítható idő azonban nem nő, hanem inkább csökken. R. ZIMMERMANN és K. GÜNTHER kiváló könyve éppen itt segít: mindvégig lexikonszerűen tömör összesítésben tájékoztat a szakterület fontos kérdéseiről. A könyv mégsem lexikon; tananyag-szerűen építették fel, s ezáltal az összefüggéseket is sokkal világosabban érzékelteti, mint a lexikonok címszavak szerint széttördelt rendszerei.

A külföldi olvasót kevésbé érinti, mégis figyelemre méltó az a körülmény, hogy a könyv a definíciókat, az alapvető ábrákat, képleteket, jelöléseket a lehetőségek szerint a jelenleg használatos, legkorszerűbb, NDK-beli tankönyvekből vette át. Így ugyanis tudatosan, egységes rendszerbe vonja a közkézen forgó tankönyveket: elősegíti, hogy az olvasó a részletekről könnyen tájékozódjék a kapcsolódó szakkönyvekben. Ugyanakkor az egyetemet végzett szakembereket is segíti az egyetemi tananyag esetenkénti felelevenítésében, az átfogóbb, interdiszciplináris összefüggések jobb megértésében, felidézésében.

A feldolgozott területeket jól érzékeltetik a főbb fejezetek címei:

I. kötet

1. *Válogatott természettudományos-műszaki alapok és törvényszerűségek* (fizikai, kémiai, fizikai-kémiai, hőtechnikai alapok)

2. *Anyagtudományi alapok és törvényszerűségek* (kristályos felépítés és állapot, ötvözetek szerkezete, üveges állapot, egyensúlyi diagramok, a szilárd állapotba való átmenet, fázisátalakulások szilárd állapotban, megújulás, újrakristályosodás, kristálynövekedés, tulajdonságok és vizsgálatuk)

3. *Fémes anyagok* (különbféle, fontosabb acélok, nehézfém- és könnyűfémötvözetek, nyersvasak, ferroötvözetek, féltermékek; a legfontosabb félvezető anyagok).

II. kötet

4. *Metallurgiai reakciók* (a nagyolvasztóban, az acélglyártáskor, a nemvasfémek esetében; salakreakciók; gázok a fémekben)

5. *Metallurgiai eljárások* (vasötvözetek, nemvasfémek előállítása)

6. *Alakító és a tulajdonságokat változtató eljárások* (öntészet, képlékeny alakítás, hőkezelés, felületkezelés)

7. *Függelék* (az SI-rendszer).

A könyv a kohászok, gépészek, anyagfelhasználók számára hézagpótlónak tűnik. Érdemes volna egy adottságainkra adaptált változatát magyarul is megjelentetni!

Dr. Fuchs Erik

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Prohászka, J.—Müller, L.</i> : Einige theoretische und technologische Probleme der Schnellwärmehandlung	1
<i>Singer, D.</i> : Einheitliche Behandlung von dynamischen Systemen mit Hilfe der Bondgraphtechnik. II. Teil	19
<i>Tarnai, T.</i> : Untersuchung des Kippens von Trägern mit Hilfe der Theorie der quadratischen Operatorscharen	39
<i>Gábor L.</i> : Einige Fragen der Netzspannungsregelung	59
<i>Gáspár, Zs.</i> : Ermittlung der Tangentialsteifheitsmatrix eines idealelastischen belasteten Raumstabes	77
<i>Jankó, L.</i> : Die „Galloping“ Schwingung eines steifen Körpers von zwei Freiheitsgraden anlassende kleinste Windgeschwindigkeit	93
<i>Reményi, K.</i> : Beitrag zur Frage der Nutzung des einheimischen Lignitvermögens in Kraftwerken	109
<i>Scharle, P.—Vörös, G.</i> : Übersicht der theoretischen und angewandten Forschungsarbeit in Zusammenhang mit den Variationsprinzipien der Mechanik	133
<i>Ijjas, Gy.</i> : Untersuchung der Haftfehler der Fasermatrix	147
<i>Terplán, S.</i> : Vervollkommen des Otto-Motors in Ungarn bis zum Jahre 1945	159
<i>Bogárdi, J.—Petravits, I.</i> : 10 jährige Tätigkeit der International Commission on Irrigation and Drainage (ICID)	165
<i>Fuchs, E.</i> : IX. Hüttenmännische Tagung	177
<i>Bohus, M.—Csibi, S.</i> : Zeitschrift und Buchausgabe am Gebiet der Elektronik	179

BUCHBESPRECHUNG

<i>Betontechnische Berichte</i> (Goschy, B.)	185
<i>Franz, G.</i> : Beton-Kalender 1977 (Csonka, P.)	186
<i>Kézdi, Á.</i> : Talajmechanika- Példák és Esettanulmányok (Rétháti, L.)	187
<i>Zementtaschenbuch 1976/77</i> (Palotás, L.)	187
<i>Eckstein, Hans-Joachim</i> : Technologie der Wärmehandlung von Stahl (Fuchs, E.)	188
<i>Kozák, M.</i> : Hidraulikai példatár (Czibere, T.)	189
<i>Kézdi, Á.</i> : Fragen der Bodenphysik (Starosolszky, Ö.)	190
<i>Mülmeisters, A.—Tamužs, V., Teters, G.</i> : Mechanik der Polymerwerkstoffe (Kalinszky, S.)	190
<i>Rétháti, L.</i> : Talajvíz a mélyépítésben (Héjj H.)	191
<i>Verő, J.—Káldor, M.</i> : Fémten (Fuchs, E.)	192
<i>Zimmermann, R.—Günther, K.</i> : Metallurgie und Werkstofftechnik, ein Wissensspeicher Band I—II; (Fuchs, E.)	192

42,— Ft

INDEX: 26.499
ISSN 0027—5085

Megjelent 1979. IV. 21.

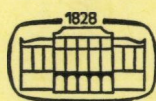
MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

55. KÖTET

3—4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1978

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, HELLER LÁSZLÓ, KÉZDI ÁRPÁD, VÁMOS TIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia

Műszaki Tudomány

1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 84 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

A KRON-FÉLE HÁLÓZATSZÁMÍTÁS LINEÁRIS VEKTORTEREK ELMÉLETÉN ALAPULÓ EGYSZERŰ VÁLTOZATA

GESZTI P. OTTÓ*

AZ MTA RENDES TAGJA

és

TEVAN GYÖRGY**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1978. május 5-én]

A cikk felfogása szerint KRON hálózatszámítási rendszere úgy nyer egyszerű és világos lineáris algebrai megalapozást, hogy a stacioner árameloszlások és feszültségeloszlások halmazát egy-egy ágszám dimenziójú lineáris vektortérnek tekintjük, amelyek közötti műveletként van értelmezve az eredményül teljesítményt adó skalárszorítás. A két vektortér bázistranszformációja a teljesítmény-invariancia teljesülésével kapcsolódik egymáshoz. Az áramvektortér a forrásmentes és egy forrásos, a feszültségvektortér pedig az örvénymentes és egy örvényes altér direkt összegére bontható. Az ezek szerint felvett bázis felel meg KRON nyitott és zárt áramutakból álló „ortogonális hálózat”-ának. míg az ágak szerint felvett bázis a „primitív hálózat”-nak. A cikk a gráfelméleti úton nyerhető bázisok révén megteremt a kapcsolatot a szokásos mátrixos hálózatszámítási módszerrel, végül pedig KRON diakoptikáját mutatja be az előzőekben kifejtettek tükrében.

1. Bevezetés

A villamos energiarendszerek területén jelenleg leginkább az a hálózatszámítási módszer terjedt el, amely bizonyos gráfelméleti megfontolások alapján felírt kellő számú csomóponti és hurok Kirchhoff-egyenletnek, valamint az Ohm-törvény egyenleteinek pusztán mátrixos átírásával vezeti le a hurok-áramok és a csomóponti-, ill. vágatpotenciálok lényegében MAXWELL-re és KIRCHHOFF-ra visszavezethető módszereit. A mátrixos írásmód egyrészt a hálózatszámítási problémák gépi-numerikus megoldása szempontjából, másrészt azért előnyös, mert jelenleg főként ez a lineáris algebrai technika van elterjedve a villamosmérnökök körében. Ugyanakkor viszont elfedi a hálózatszámítás elvi hátterét, ezért fejlesztési célra kevésbé alkalmas, pontosabban szólva a hálózatszámítás fejlesztését csupán a gépi-numerikus számítás tökéletesítésének, gyorsításának irányába tereli.

Az előbbieken vázolt eljárás tulajdonképpen G. KRON hálózatszámítási módszerének néhány gráfelméleti fogalommal kiegészített változata. A „klasszikusok” után kétségtelenül főként G. KRON foglalkozott alkotó módon villamos hálózatok analízisével [6, 7]. WEYL [12] után ő is az áramokat kontra-

* Prof. Dr. Geszti P. Ottó, 1124 Budapest, Jagelló út 13.

** Dr. Tevan György, 1125 Budapest, Lóránt u. 8.

variáns, a feszültségeket kovariáns vektornak fogja fel. Ezek dimenziószáma nála mindig a hálózat ágszámával egyező.

Az ágakra szétbontott, ún. „primitív hálózat”-ra ez természetes, a hurkokból és nyitott utakból általa konstruált ún. „ortogonális hálózat”-ra pedig ez azért teljesül, mert a független hurkok és a független nyitott utak összege is az ágszámmal egyenlő (l. később). Az ilyen hálózatokat összekötő transzformációs mátrixok (nála „connection matrix”) tehát mindig négyzetesek; ez lehetővé teszi számára annak felismerését, hogy a hálózati mennyiségek egy része (feszültség, áram) elsőrendű, másik része (impedancia, admittancia) másodrendű tenzorként transzformálódik. A tenzoros felfogás jól kidomborítja a hálózati mennyiségek invariáns voltát; pl. teljesítményinvariancia; vagy pl. a primitív ágak és hurok-áramok és nyitott áramok összessége *ugyanannak* az árameloszlásnak más-más megnyilvánulási formája. Így kerül kapcsolatba ez a felfogás — tudatosan — a relativitás-elmélettel. A megoldás — az ismeretlen áramok, ill. feszültségek kiszámítása — az „ortogonális hálózat”-ban válik egyszerűvé, mert ott írhatók fel egyszerűen a Kirchhoff-törvények; ide kell tehát a mennyiségeket áttranszformálni. Módszerének kidolgozása után negyed századdal G. KRON új eljárást dolgoz ki nagy hálózatok megoldására azok szétvágása útján [7], amelyet diakoptikának nevez el (dia = át, kopto = szakítani). Egyébként a diakoptika a most használatos leszűkített hálózatszámítási rendszerben lényegesen nehezebben érthető meg.

G. KRON rendszerének megértését és terjedését akadályozta, hogy nem tisztázta kellőképpen az általa használt fogalmakat, nem adta meg eredményeinek egzakt bizonyítását és stílusa meglehetősen terjengős. Követői, ill. munkáinak magyarázóí közül H. H. HAPPE-et emeljük ki [4], aki tisztábban rendszerezett módon tárgyalja a Kron-féle hálózatszámítási módszert főleg a diakoptika megértetése céljából, amelybe maga is vitt be új elemeket. J. PAUL ROTH [8] algebrai topológiai megalapozást ad KRON munkásságának, amelyet később KRON maga is használ. Sajnos ezáltal a módszer nem válik közérthetőbbé, mert az olvasónak ehhez a lineáris vektorterek és tenzorok ismeretén kívül az algebrai topológia néhány fogalmát is el kell sajátítania. Ugyancsak az algebrai topológia eszközeivel dolgozik látszólag KRON-tól és ROTH-tól függetlenül P. SLEPIAN is [11] aki olyan konstrukciót csinál, amelyben az áramok és feszültségek ugyanabba a vektortérbe kerülnek; megoldási módszerként KIRCHHOFF ún. III. és IV. törvényét újítja fel, amely gyakorlati számításra kevésbé alkalmas. Tisztán a lineáris algebra eszközeivel kívánja ugyanabba a vektortérbe helyezni az áramokat és feszültségeket A. KLOS is [5]; fejtegetései között fizikailag nem értelmezhető lépések is vannak: a transzformált és az eredeti árameloszlási (ill. feszültségeloszlási) vektor különbségét veszi és erre ír fel további összefüggéseket. Kitűzött célját akkor lehetne következetesen megvalósítani, ha ortogonális transzformációs mátrixokra szorítkoznánk, amelyet a hurokmátrix és a vágatmátrix transzformációjából általa összerakott transzformá-

ciós mátrixból ortogonalizálási eljárással kaphatnánk; csak eme komplikáció árán tartható a teljesítmény-invariancia az ugyanabba a vektortérbe helyezett áram- és feszültségeloszlás esetén.

Általában nem szerencsés a két pont között értelmezett feszültséget, és a (koncentrált elemek esetén) egy pontban értelmezett áramot közös vektortérbe helyezni; természetesebb azokat szétválasztani, (kivéve az n -pólus esetét, ahol a feszültség és árameloszlás ugyanazon a helyen mutatkozik, és csupán ebben az esetben beszélhetünk az impedancia-tenzor sajátvektorairól és sajátértékeiről — azaz a szimmetrikus komponensek módszeréről). Szólnunk kell még BRAMLELLER könyvéről [1], ahol a szerző a diakoptika módszerét a mátrixos írásmóddal tárgyalja.

Ennek a munkának az a célja, hogy kizárólag a lineáris vektorterek elméletére támaszkodva a Kron-féle hálózatszámítási módszernek és a diakoptikának egyszerű, és fizikailag áttekinthető, ugyanakkor gyakorlatilag is használható változatát adjuk. A lineáris vektorterek és a tenzorok közti kapcsolat vonatkozásában az irodalomjegyzékben közölt [2, 3, 9] matematikai művek közül leginkább GELFAND művét [2] vettük alapul. E cikkben csak stacionárius árameloszlások számításával foglalkozunk. A közérthetőség kedvéért az indexes kalkulus mellett a mátrixos írásmódot is használjuk és rámutatunk a jelenleg elterjedt (szűkített) hálózatszámítással való kapcsolatokra is.

Mielőtt a tárgyra térnénk, röviden bemutatjuk, hogy miként lehet a fejezet elején említett, jelenleg elterjedt hálózatszámítási módszernek olyan lineáris algebrai háttérrel adni, amely rendezett számú n -esekből álló n -dimenziós lineáris vektorterekkel dolgozik. E módszer a következő egyenletekre támaszkodik:

$$[A][I_r] = [O]; \quad [B][U_r] = [O] \quad (\text{Kirchhoff-egyenletek})$$

$$\left. \begin{aligned} [U_r] + [U_g] &= [Z]([I_r] + [I_g]) \\ [I_r] + [I_g] &= [Y]([U_r] + [U_g]) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ohm-törvény})$$

$$[I_r] = [B]_t[I_h]; \quad [U_r] = [A]_t[U_c] \quad (t \text{ a transzponálás jele})$$

ahol $[U_r]$, ill. $[I_r]$ az *eredő* ágmenntiségekből, $[U_g]$ ill. $[I_g]$ a *generátoros* ágmenntiségekből képzett feszültség ill. áram oszlopvektor; $[A]$ a hálózat gráfjára jellemző csomóponti vagy csúcsmátrix, $[B]$ a hurokmátrix, $[I_h]$ a független hurokáramokból, $[U_c]$ a csomóponti feszültségekből alkotott oszlopvektor; $[Z]$ ill. $[Y]$ az ágimpedancia ill. ágadmittancia mátrix; $[A]$ $[B]$ már származtatható az $[A]$ -ból). Az e -ágú, v csomópontú, p -alálózatból álló hálózatban $[U_r]$, $[I_r]$, $[U_g]$, $[I_g]$ e -komponensű, $[I_h]$ $(e - v + p)$ -komponensű, $[U_c]$ pedig $(v - p)$ -komponensű. Az $[A]$ mátrix e -oszlopú és $(v - p)$ sorú, a $[B]$ mátrix e -oszlopú és $(e - v + p)$ sorú, $[Z]$ és $[Y]$ pedig e -oszlopú és e -sorú.

Mivel $[B]_t$ oszlopai egységnyi erősségű hurokáramokat reprezentálnak, és így kielégítik a csomóponti törvényt, azért $[B]_t$ értéktartománya beleesik $[A]$ nullalterébe:

$$R([B]_t) \subseteq N([A]),$$

amiből

$$[A][B]_t = [0],$$

ebből pedig

$$[B][A]_t = [0]$$

is következik; ez utóbbi azt mutatja, hogy

$$R([A]_t) \subseteq N([B]),$$

vagyis hogy $[A]_t$ értéktartománya beleesik $[B]$ nullalterébe. Mivel az $R([B]_t)$, altér ortogonális az $N([B])$ altérre, és ugyanúgy $R([A]_t)$ ortogonális $N([A])$ -ra továbbá $[B]_t$ és $[A]_t$ oszlopai is lineárisan függetlenek, tehát

$$\dim R([B]_t) = e - v + p, \quad \dim N([B]) = v - p,$$

$$\dim R([A]_t) = v - p; \quad \dim N([A]) = e - v + p,$$

azért

$$R([B]_t) = N([A]) \perp N([B]) = R([A]_t).$$

Látható, hogy a Kirchhoff-egyenletek akkor teljesülnek, ha

$$[I_r] \subseteq N([A]) \text{ és } [U_r] \subseteq N([B]).$$

$[U_r]$ és $[I_r]$ tehát ortogonálisak

$$[\hat{I}_r]_t [U_r] = [0] \quad (\text{Tellegen-tétel})$$

(\wedge a konjugálás jele).

Az $[I_h]$ -ből, ill. $[U_c]$ -ből való képzés biztosítja az $N([A])$ -ba ill. $N([B])$ -be jutást.

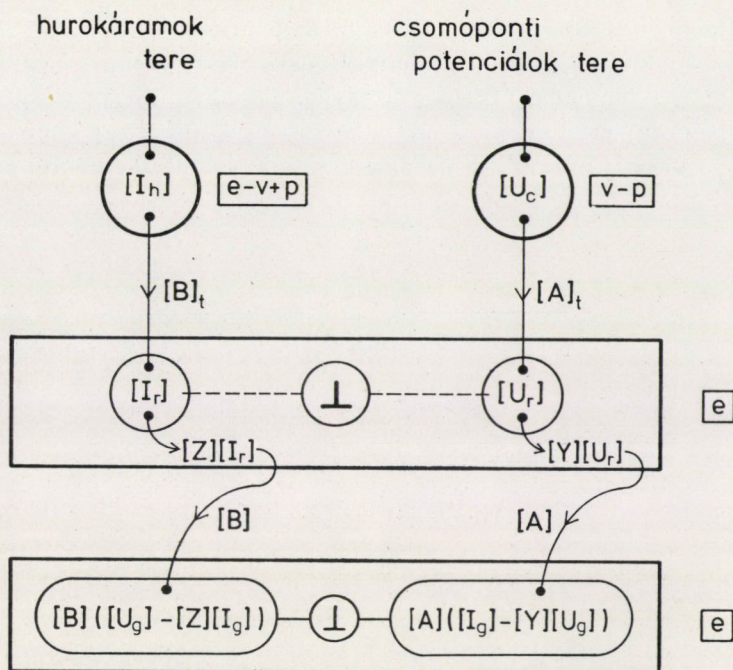
Az Ohm-törvénynek $[B]$ -vel ill. $[A]$ -val való szorzásából

$$([B][Z][B]_t)[I_h] = [B][Z][I_r] = [B]([U_g] - [Z][I_g]),$$

$$([A][Y][A]_t)[U_c] = [A][Y][U_r] = [A]([I_g] - [Y][U_g]).$$

Az elsőből az ismeretlen $[I_h]$ (hurokmódszer), a másodikból az ismeretlen $[U_c]$ (csomóponti módszer) számítható

Az eddig leírtak alapján az ábrán szimbolikusan jelölt, dimenziószámmal is megadott vektorterek közötti leképezésekkel mutatjuk be a megoldás menetét.



2. Az árameloszlások és feszültségeloszlások vektortere; primitív bázis

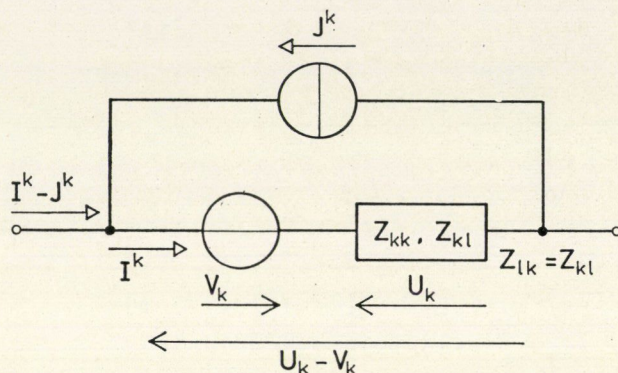
Tekintsünk egy „e”-ágú, azonos frekvenciájú stacioner sinusos források-ról gerjesztett lineáris, invariáns hálózatot! E hálózat k -adik ágának felépítését mutatja az 1. ábra.

A hálózat vezérelt generátort nem tartalmaz. (Egyébként megfelelő tenzortípusokkal a vezérelt elemek is figyelembe vehetők).

(Az ábrán a feszültségemelkedés vonatkozási irányai láthatók). J^k és V_k az ideális források *aktív* árama és feszültsége, I^k és U_k pedig az ön és kölcsönös impedanciákon kialakult *passzív* áram és feszültség. Egy konkrét hálózat egy ága nem feltétlenül tartalmaz áramforrást, feszültségforrást vagy kölcsönös impedanciát; az 1. ábrán látható általános ágelrendezés ezeket zérus értékű elemek helyettesítésével foglalja magában. A hálózatszámítás alapfeladata az, hogy rögzített impedanciaértékek esetén az aktív feszültségek és áramok ismeretében meghatározzuk a passzív feszültségeket és áramokat.

Úgy tűnik, hogy az aktív áramok és feszültségek bármely impedancia-felvételre minden komplex értéket befuthatnak, hiszen a passzív áramok és feszültségek kialakulása révén teljesülhetnek a Kirchhoff-törvények. Ez azonban nincs így. Ha pl. egy csomópontba befutó összes ágban az önimpedancia „végtelen” (szakadás van), akkor az ezekben az ágakban folyó aktív áramok

közül egy nem választható szabadon a csomóponti törvény értelmében, hiszen ezekben az ágakban a passzív áramok zérusok. Hasonlóan, ha egy hurokban minden ön- és kölcsönös impedancia zérus, akkor a passzív feszültség is az, és a huroktörvény értelmében az aktív feszültségek közül egy nem választható szabadon. A passzív áramok és feszültségek sem futhatnak be minden komplex



1. ábra

számértéket akármilyen impedanciarendszer esetén, hiszen pl. szakadásos ág árama, vagy zérus ön és kölcsönös impedanciájú ág feszültsége csak zérus lehet.

Mivel azonban végtelen sok olyan impedanciarendszer van, amelynél akár az aktív, akár a passzív feszültségek és áramok minden értéket felvehetnek, azért általános érvényű összefüggések felírása céljából a feszültségek és áramok legnagyobb előforduló változási tartományát kell alapul vennünk; a kivételes esetek éppen a matematikai modell paramétereinek különleges értékeivel adódnak ki.

Jellemezzük az aktív árameloszlást olyan $[J]$, ill. a passzív árameloszlást olyan $[I]$ oszlopmátrixszal, amelynek k -adik sora éppen a k -adik ág árama, azaz J^k ill I^k ! Az árameloszlások lineáris kombinációját ezeknek az oszlopmátrixoknak a lineáris kombinációja révén értelmezve az *árameloszlások lineáris vektorteréhez* jutunk. (A kapott lineáris kombináció ugyanis szintén árameloszlás lehet). Mivel az „e”-sorú oszlopmátrix elemei előző fejtegetéseink szerint minden komplex számértéket felvehetnek, azért a kapott lineáris vektortér „e” *dimenziós*. Hangsúlyozzuk, hogy az aktív és passzív árameloszlások *ugyanabban* a lineáris vektortérben vannak. Az árameloszlási vektorokat — a lineáris vektortér elemeit — álló félkövér betűvel fogjuk jelölni. Ha tehát I_1 oszlopmátrixa $[I_1]$, és I_2 oszlopmátrixa $[I_2]$, akkor a $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2$ vektor oszlopmátrixa $\lambda_1 [I_1] + \lambda_2 [I_2]$.

(E munkában azért használjuk az „oszlopmátrix” kifejezést a szokásos „oszlopvektor” helyett, mert a „vektor” szót a lineáris vektorterek elemeinek

megnevezésére tartjuk fenn, és ezek — mint később látni fogjuk — minden bázisban más-más oszlop mátrixszal adhatók meg).

Ismeretes, hogy a lineáris vektortér dimenziószámával pontosan egyező számú lineárisan független vektor a vektortér egy *bázisát* alkotja, és ezeknek lineáris kombinációjával a vektortér bármely eleme kifejezhető; a lineáris kombináció együtthatóit ebben az esetben a vektor *e* bázisbeli komponenseinek nevezzük. Jelölje \mathbf{g}_k azt az árameloszlási vektort, amelynél a *k*-adik ág árama egységnyi, a többi ág árama pedig nulla; ennek oszlop mátrixa tehát az „*e*”-dimenziós egység mátrix *k*-adik oszlopa. Mint ismeretes a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_e$ árameloszlási vektorok lineárisan függetlenek, tehát az „*e*”-dimenziós árameloszlási vektortér egy bázisát alkotják. Ezt *primitív* bázisnak nevezzük, annak megfelelően, hogy KRON az ágakra szétvágott hálózatot nevezte primitív hálózatnak.

Mivel

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^1 \\ \mathbf{I}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}^e \end{bmatrix} = \mathbf{I}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{I}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \mathbf{I}^e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

azért

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^1 \mathbf{g}_1 + \mathbf{I}^2 \mathbf{g}_2 + \dots + \mathbf{I}^e \mathbf{g}_e = \sum_{k=1}^e \mathbf{I}^k \mathbf{g}_k \equiv \mathbf{I}^k \mathbf{g}_k \quad (1)$$

Az utolsó lépésben használtuk az ún. *szummációs konvenciót*, amely szerint azonos felső és alsó indexek a teljes dimenziószámra kiterjedő összegezést jelentenek. (Ezt a rövidítést a későbbiekben is használni fogjuk). Az (1) összefüggés szerint egy árameloszlási vektor primitív bázisbeli komponensei éppen az ágáramok; ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az (eddig tárgyalt) oszlop mátrix az árameloszlási vektor mátrixa a primitív bázisban.

Teljesen hasonlóan építhetjük fel a (passzív vagy aktív) feszültségeloszlások lineáris vektorterét, amelyet nem veszünk az áramvektortérrel egybeesőnek. Ez szintén *e*-dimenziós. Ebben is felvehető egy primitív bázis; ennek *k*-adik vektora, \mathbf{g}^k oly feszültségeloszlás, amelynél a *k*-adik ág feszültsége egységnyi, a többi ág feszültsége pedig zérus.

Az ágfeszültségekből alkotott oszlop mátrixra

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_e \end{bmatrix} = U_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + U_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + U_e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

és ennek alapján a feszültségeloszlási vektor

$$\mathbf{U} = U_1 \mathbf{g}^1 + U_2 \mathbf{g}^2 + \dots + U_e \mathbf{g}^e \equiv U_k \mathbf{g}^k. \quad (2)$$

Ez az összefüggés azt fejezi ki, hogy a feszültségeloszlási vektor komponensei a primitív bázisban az ágfeszültségek; az ezekből alkotott oszlopmátrix a feszültségeloszlási vektor mátrixa a primitív bázisban.

A hálózat passzív elemein létrejövő eredő komplex teljesítmény:

$$S = U_1 \hat{I}^1 + U_2 \hat{I}^2 + \dots + U_e \hat{I}^e \equiv U_k \hat{I}^k. \quad (3)$$

($A \wedge a$ konjugált komplex számot jelzi). Ez a két vektortér elemei közötti skaláris szorzásként fogható fel, hiszen az

$$\mathbf{U} \mathbf{I} = U_k \hat{I}^k = [\mathbf{U}]_l [\hat{I}] = [\hat{I}]_l [\mathbf{U}] \quad (4)$$

egyenletet definíciónak tekintve, abból könnyen megkaphatjuk a hermitikus szimmetriájú skaláris szorzás ismert tulajdonságait:

$$(\lambda_1 \mathbf{U}_1 + \lambda_2 \mathbf{U}_2) \mathbf{I} = \lambda_1 (\mathbf{U}_1 \mathbf{I}) + \lambda_2 (\mathbf{U}_2 \mathbf{I}), \quad (5.a)$$

$$\mathbf{U} (\lambda_1 \mathbf{I}_1 + \lambda_2 \mathbf{I}_2) = \lambda_1 (\mathbf{U} \mathbf{I}_1) + \lambda_2 (\mathbf{U} \mathbf{I}_2); \quad (5.b)$$

(a „t” index a transzponálás jele).

Az árameloszlási primitív bázisvektorok és a feszültségeloszlási primitív bázisvektorok skaláris szorzata a (4) képlet szerint:

$$\mathbf{g}^l \mathbf{g}_m = \delta^l_m = \begin{cases} 1, & \text{ha } l = m \\ 0, & \text{ha } l \neq m \end{cases} \quad (6)$$

(δ^l_m a Kronecker — szimbólum).

A (6) összefüggés fizikailag is belátható: a primitív bázisbeli áram és feszültség eloszlások csak abban az esetben adnak teljesítményt — és éppen egységnyi —, ha ugyanabban az ágban folyik az egységnyi áram, ahol a feszültség is egységnyi. A két primitív bázis tehát *biortogonális* vagy *reciprok* rendszert alkot.

A matematikában az itt áramvektorok terének nevezett lineáris vektorteret *kontravariánsnak*, a feszültségvektorok terének nevezett *kovariánsnak* szokás nevezni.

3. Az áram-, és feszültségeloszlási vektorok komponenseinek transzformációja

Ha a primitív bázistól eltérő bázist veszünk fel, akkor ebben a bázisban az áram- ill. feszültségeloszlási vektor komponenseit nem az ágáramok, ill. ágfeszültségek alkotják. Ha az áramvektortér új bázisának k' -edik vektora $\mathbf{h}_{k'}$, a feszültségvektortér új bázisának ez a vektora pedig $\mathbf{h}^{k'}$, akkor részben (1) és (2) alapján írhatjuk:

$$\mathbf{I} = I^k \mathbf{g}_k = I^{k'} \mathbf{h}_{k'} \quad (7)$$

és

$$\mathbf{U} = U_k \mathbf{g}^k = U_{k'} \mathbf{h}^{k'} \quad (8)$$

ahol $I^{k'}$, ill. $U_{k'}$, I -nek ill. U -nak új bázisbeli komponense.

Előírjuk, hogy a primitív bázisokhoz hasonlóan az új bázisok is biortogonálisak legyenek egymással, tehát

$$[\mathbf{h}^{l'}]_i [\mathbf{h}_{m'}] = \mathbf{h}^{l'} \mathbf{h}_{m'} = \delta_{l'm'} \quad (9)$$

a (6) képlethez hasonlóan. Ezzel az előírással a teljesítmény a (7) és (8) egyenlet második jobb oldala, valamint az (5.a) és (5.b) tulajdonságok alapján:

$$\mathbf{U}\mathbf{I} = (U_{k'} \mathbf{h}^{k'}) (I^{l'} \mathbf{h}_{l'}) = U_{k'} I^{l'} \delta_{l'k'},$$

azaz

$$\mathbf{U}\mathbf{I} = U_{k'} I^{k'}. \quad (10)$$

Tehát biortogonális új bázisok felvételével a komplex teljesítmény számítási módja ugyanolyan egyszerű, mint a primitív bázisban (vö.(4) képlettel). Ha a (7) egyenletet $\mathbf{h}^{l'}$ -vel, majd \mathbf{g}^l -lel (balról) a (8) egyenletet pedig $\mathbf{h}_{l'}$ -vel, majd \mathbf{g}_l -lel (jobbról) szorozzuk skalárisan, és figyelembe vesszük a (6) és (9) biortogonalitási kapcsolatot, akkor az alábbi négy összefüggést kapjuk:

$$\mathbf{h}^{l'} \mathbf{I} = \hat{\mathbf{I}}^k (\mathbf{h}^{l'} \mathbf{g}_k) = \hat{\mathbf{I}}^{k'} \delta_{l'k'};$$

$$\mathbf{g}^l \mathbf{I} = \hat{\mathbf{I}}^k \delta_{l,k} = \hat{\mathbf{I}}^{k'} (\mathbf{g}^l \mathbf{h}_{k'});$$

$$\mathbf{U} \mathbf{h}_{l'} = U_k (\mathbf{g}^k \mathbf{h}_{l'}) = U_{k'} \delta_{l',k'};$$

$$\mathbf{U} \mathbf{g}_l = U_k \delta_{l,k} = U_{k'} (\mathbf{h}^{k'} \mathbf{g}_l)$$

Bevezetve a

$$\widehat{(\mathbf{h}^{k'} \mathbf{g}_k)} = t_{\cdot k}^{k'} \quad (11.a)$$

$$\widehat{(\mathbf{g}^k \mathbf{h}_{k'})} = t_{k, \cdot}^k, \quad (11.b)$$

jelöléseket, és felhasználva $\delta_{.k}^l$ ill. $\delta_{.k'}^{l'}$, jelentését, az előző egyenletekből:

$$I^{k'} = t_{.k}^{k'} \cdot I^k \quad (12.a)$$

$$I^k = t_{.k'}^k \cdot I^{k'} \quad (12.b)$$

$$U_{k'} = \widehat{t_{.k'}^k} \cdot U_k \quad (12.c)$$

$$U_k = \widehat{t_{.k}^{k'}} \cdot U_{k'}, \quad (12.d)$$

A (12.b)-t a (12.a) jobb oldalába helyettesítve

$$I^{k'} = t_{.k}^{k'} \cdot (t_{.l'}^k \cdot I^{l'}) = (t_{.k}^{k'} \cdot t_{.l'}^k) I^{l'};$$

ez az azonosság csak úgy állhat fenn minden k' és l' értékre 1-től e -ig, ha

$$t_{.k}^{k'} t_{.l'}^k = \delta_{.l'}^{k'} \quad (13)$$

A (12) képletek megadják az új és a primitív bázisra vonatkozó komponensek közti transzformációs törvényt. A $t_{.k}^{k'}$ értékeket egy négyzetes $[T]$ *transzformációs mátrix* elemeinek tekinthetjük, és akkor a (13) szerint $t_{.k}^{k'}$ a $[T]^{-1}$ mátrix elemeit alkotja. Jelölje $[I']$ az $I^{k'}$, $[U']$ pedig az $U_{k'}$ komponensekből alkotott oszlop mátrixot!

A (12) transzformációs képletek mátrixalakja ezzel:

$$[I'] = [T]^{-1}[I], \quad (14.a)$$

$$[I] = [T][I'], \quad (14.b)$$

$$[U'] = [T]^*[U], \quad (14.c)$$

$$[U] = [T]^{-1*}[U'], \quad (14.d)$$

ahol a $*$ -jel a mátrix transzponált konjugált, azaz adjungált értékét jelenti; (a transzponáltat azért kell venni, mert a (12.c) és (12.d) egyenletekben a $[T]$ mátrix sorindexe a szummációs index, hiszen ez egyezik meg a feszültségkomponens indexével). Csak nem szinguláris mátrix lehet transzformációs mátrix, és ez az új bázisvektorok lineáris függetlenségének a következménye. Ha ugyanis pl. a $h^{k'}$ vektorok lineárisan függőek lennének, akkor a (11.a) szerint a $t_{.k}^{k'}$ mátrix sorai is azok.

A teljesítmények számítási módját mindkét bázisra mátrixosan is felírhatjuk:

$$S = [I]^*[U] \equiv [\hat{I}]_l[U] = [\hat{I}']_l[U'] \equiv [I']^*[U'],$$

mindezek természetesen a (3), (4) és (10) egyenletek következményei.

Ha $[T]$ valós, akkor $[T]^*$ helyére $[T]_l$, $([T]^{-1})^*$ helyére pedig $[T]_l^{-1}$ kerül.

4. Az OHM-törvény hálózati alakja

Kizárva egyelőre a szakadásokat, az ágak passzív feszültségei és áramai között az ön-, és kölcsönös impedanciákkal az alábbi összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I^1 + Z_{12} I^2 + \dots + Z_{1e} I^e, \\ U_2 &= Z_{21} I^1 + Z_{22} I^2 + \dots + Z_{2e} I^e; \\ &\dots\dots\dots \\ U_e &= Z_{e1} I^1 + Z_{e2} I^2 + \dots + Z_{ee} I^e; \end{aligned}$$

(az áramoknál felső indexek vannak, és nem kitevők!)

A szummációs konvenciók használatával ezt az alábbi módon jelölhetjük röviden:

$$U_k = Z_{kl} I^l. \quad (16.a)$$

A négyzetes Z_{kl} ágimpedancia-mátrixot $[Z]$ -vel jelölve, a (16.a) egyenlet mátrixos írásmódban:

$$[U] = [Z][I]. \quad (16.b)$$

A Z mátrix l -edik oszlopát úgy is megkaphatjuk, hogy a mátrixot az egység-mátrix l -edik oszlopával szorozzuk; ez a (16.b) alapján azt jelenti, hogy az árameloszlás-vektortér l -edik primitív bázisvektorának megfelelő áramokat átbocsátva a passzív ágakon, az ágfeszültségek éppen a $[Z]$ l -edik oszlopát adják. Tehát csupán az l -edik passzív ágon bocsátva át áramot, és pedig egységnyit, az ágfeszültségek számértékileg az ágimpedancia-mátrix l -edik oszlopának elemeit szolgáltatják.

A (16.a), ill. (16.b) egyenletek az Ohm-törvény hálózati alakját képezik. Ezeket más bázisban is felírhatjuk. A (12.c), (16.a) és (12.b) ill. a (14c), (16.b) és (14.b) egyenletekből

$$U_{k'} = \widehat{t_{k'.}^k} Z_{kl} t_{l'}^l I^l,$$

illetve

$$[U'] = [T]^* [Z] [T] [I'].$$

Bevezetve a

$$Z_{k'l'} = \widehat{t_{k'.}^k} Z_{kl} t_{l'}^l \quad (17.a)$$

$$[Z'] = [T]^* [Z] [T] \quad (17.b)$$

jelöléseket, az Ohm-törvény az új bázisban:

$$U_{k'} = Z_{k'l'} I^{l'}, \quad (18.a)$$

illetve

$$[U'] = [Z'] [I']. \quad (18.b)$$

Összehasonlítva ezeket a (16.a) és (16.b) képletekkel láthatjuk, hogy az Ohm-törvény alakja változatlan maradt, de az impedancia-mátrixot a (17) egyenletek szerint ún. adjungált transzformációval transzformálni kell.

Válójában mind a (16), mind a (18) képletek egyetlen tenzoregyenletnek indexes, ill. mátrixos alakjai a primitív bázisban és egy tetszőleges más bázisban. Ez a tenzoregyenlet:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{I}; \quad (19)$$

(a tenzort dőlt félkövér betű jelöli).

Itt \mathbf{Z} az *impedanciatenzor*, amelynek primitív bázisbeli komponensmátrixa a $[\mathbf{Z}]$ ágimpedanciamátrix, egy másik bázisbeli komponens-mátrixa pedig a (17.b) transzformációs törvénnyel meghatározható $[\mathbf{Z}']$ mátrix.

Ha az ágimpedanciamátrix nem szinguláris — ami annak megnyilvánulása, hogy az impedanciatenzor nem elfajuló, és így mátrixa egyetlen bázisban sem szinguláris —, akkor a (16.a), ill. (16.b), a (18.a) ill. (18.b) és a (19) egyenletből az áram kifejezhető:

$$\mathbf{I}^m = \mathbf{Y}^{mk} \mathbf{U}_k \quad (20.a)$$

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{Y}][\mathbf{U}] \quad (20.b)$$

$$\mathbf{I}^{m'} = \mathbf{Y}^{m'k'} \mathbf{U}_{k'}, \quad (21.a)$$

$$[\mathbf{I}'] = [\mathbf{Y}'][\mathbf{U}'] \quad (21.b)$$

és
$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{U}. \quad (22)$$

Az \mathbf{Y} *admittanciatenzor* a \mathbf{Z} impedanciatenzor inverze:

$$\mathbf{YZ} = \mathbf{E} \quad (23)$$

(ahol \mathbf{E} az egységtenzor);

annak primitív bázisbeli mátrixa, az

\mathbf{Y}^{mk} ill. $[\mathbf{Y}]$ *ágadmittanciamátrix*

az ágimpedanciamátrix inverze, tehát

$$\mathbf{Y}^{mk} \mathbf{Z}_{kl} = \delta_l^m \quad (22.a)$$

illetve

$$[\mathbf{Y}][\mathbf{Z}] = [\mathbf{E}] \quad (22.b)$$

($[\mathbf{E}]$ az egység mátrix), és tetszőleges más bázisbeli mátrixára pedig

$$\mathbf{Y}^{m'k'} \mathbf{Z}_{k'l'} = \delta_{l'}^{m'} \quad (23.a)$$

illetve

$$[\mathbf{Y}'][\mathbf{Z}'] = [\mathbf{E}], \quad (23.b)$$

ahol

$\mathbf{Z}_{k'l'}$, ill. $[\mathbf{Z}']$ az impedanciatenzor mátrixa ugyanabban a bázisban.

A (12.a) a (20.a) és (12.d) ill. a (14.a), (20.b) és (14.d) egyenletek alapján

$$I^{m'} = t_{.m}^{m'} Y^{mk} \hat{t}_k^{k'} U_{k'},$$

illetve

$$[I'] = [T]^{-1} [Y] ([T]^{-1})^* [U'],$$

és ezeket a (21.a) ill. (21.b) képletekkel összehasonlítva kapjuk az admittancia-tenzor különböző bázisbeli mátrixai közötti transzformációs törvényt:

$$Y^{m'k'} = t_{.m}^{m'} Y^{mk} t_k^{k'} \quad (24.a)$$

illetve

$$[Y'] = [T]^{-1} [Y] ([T]^{-1})^* \quad (24.b)$$

Az $[Y]$ ágadmittanciamátrix k -adik oszlopa e mátrixnak az egységmátrix k -adik oszlopával való szorzataként is felírható; ez a (20.b) alapján azt jelenti, hogy a feszültségeloszlás -vektortér primitív bázisának k -adik feszültségeloszlását kényszerítve a passzív ágakra, az áramok számértékileg $[Y]k$ -adik oszlopát adják. *Tehát a k -adik passzív ágra egységnyi feszültséget kapcsolva és a többi passzív ágat rövidre zárva, az áramok az ágadmittancia mátrix k -adik oszlopának elemeit szolgáltatják* (számértékileg).

Az eddigiekben feltételeztük, hogy mind az impedanciatenzor, mind az admittancia-tenzor létezik. Mivel egy tenzort úgy adhatunk meg, hogy megadjuk azokat a vektorokat, amibe a tenzor egy bázis vektorait átviszi, azért a (19) és (22) tenzoregyenletek felhasználásával kimondhatjuk: az impedancia tenzor létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy a passzív árameloszlási vektortér valamely bázisra *véges* passzív feszültségeloszlásokat létesítsen, az admittanciatenzor létezéséé pedig az, hogy a passzív feszültségeloszlási vektortér valamely bázisa *vég* is passzív árameloszlásokat hozzon létre. Az ellenőrzést legegyszerűbb a primitív bázisra elvégezni. Ennek alapján pl. beláthatjuk, hogy szakadásos ágat tartalmazó hálózatnak nincs, ilyen ágat nem tartalmazó hálózatnak van impedanciatenzora. Ha egyetlen ág önimpedanciájának hatásos (valós) része sem zérus, akkor a hálózatnak van admittanciatenzora, mert az ellenállások az áramokat mindenütt végesre korlátozzák. Lehet olyan hálózat is, ahol sem impedanciatenzor, sem admittanciatenzor nincs; pl. az egyik ágban szakadás, egy másik ágban kölcsönös impedancia nélküli rövidzár, tehát zérus ön és kölcsönös impedancia van.

A szakadások megszüntethetők a szakadásos ágak elhagyásával, ebben az esetben az ezekben az ágakban levő áramgenerátorokat (aktív áramokat) az érintett csomópontok közötti másik út minden ágába be kell helyezni az elhagyott áramgenerátor pótlására.

Ily módon az „ e ” dimenziószám csökkentésével elérhetjük, hogy impedanciatenzorral rendelkező hálózatunk legyen.

Visszatérve az ágimpedancia -mátrix és az ágadmittancia-mátrix primitív bázissal való értelmezésére, beláthatjuk, hogy jellegüknél fogva az ágimpedancia-mátrix főátlójában levő *önimpedancia-elemek üresjárási mérésponthi impedanciák, a kölcsönös impedanciaelemek üresjárási transzfer impedanciák, az ágadmittancia-mátrix főátlós elemei rövidzárási mérésponthi, főátlón kívüli elemei pedig rövidzárási transzfer admittanciák.*

A két alsóindexes komponensű impedanciatenzor ún. (tiszta) *kovariáns tenzor*, a két felsőindexes komponensű admittanciatenzor ún. (tiszta) *kontravariáns tenzor*. Mindkét tenzortípus két különböző vektortér (árameloszlási és feszültségeloszlási ill. kontravariáns és kovariáns) között létesít homogén lineáris kapcsolatot.

5. A forrásmentes árameloszlások és az örvénymentes feszültségeloszlások altere; Kirchhoff-törvények

A csomóponti törvényt kielégítő passzív (vagy aktív) árameloszlásokat *forrásmentesnek*, a huroktörvényt kielégítő passzív (vagy aktív) feszültségeloszlásokat *örvénymentesnek* fogjuk nevezni. A forrásmentes árameloszlások az árameloszlási vektortér részhalmazát alkotják. Könnyen belátható, hogy forrásmentes árameloszlási vektorok lineáris kombinációja ugyancsak forrásmentes áramvektort ad eredményül. Ezért az említett részhalmaz *altere*; ezt az alteret G -vel jelöljük. Hasonlóan látható be, hogy az örvénymentes feszültségeloszlások részhalmaza a feszültségeloszlási vektortér altere; ezt M -mel jelöljük.

Ha a vizsgált e -ágú hálózat csomópontjainak a száma v , és a hálózat p -számú olyan alhálózatra oszlik, ahol az ágak galvanikus kapcsolatban vannak egymással, de az alhálózatok között nincs galvanikus kapcsolat, akkor $(v-p)$ -számú független csomóponti törvényt írhatunk fel az áramokra, amelyeket a forrásmentes árameloszlásoknak ki kell elégíteniük. Ez $(v-p)$ -számú megkötést jelent, és ezért G dimenziószáma:

$$\dim G = e - (v - p) = e - v + p. \quad (25)$$

Az örvénymentes, tehát potenciálos feszültségeloszlásokat egyértelműen jellemzi a csomópontoknak egymáshoz való potenciálja. Minden alhálózatban egy vonatkoztatási csomópontot felvéve, ez $(v-p)$ -számú potenciálértéket jelent, és ezért

$$\dim M = v - p \quad (26)$$

A G -beli árameloszlásoknál a csomópontokból se ki, se be nem lép áram. Egyetlen zárt hurokban folyó ún. *hurokáram* is ilyen. Így a hurokáramok, és azok bármely lineáris kombinációja is benne van G -ben. Egy tetszőleges G -beli I_G áramvektorból levonva oly hurokáramot, melynek egyik ágára meg-

egyezik \mathbf{I}_G ugyanazon ágáramával, majd a maradékra ismét alkalmazva ezt az eljárást a már kinullázott ágáramokat nem érintve stb., végül is minden ágáramot kinullázhatunk; ellenkező esetben ugyanis nem lenne \mathbf{I}_G forrásmentes. Ebből azután következik, hogy G minden vektora hurokáramok lineáris kombinációjaként fogható fel. Minthogy pedig bármely hurokáram örvénymentes feszültségeloszlással nem ad teljesítményt — hiszen egy hurokban a feszültségek összege zérus —, azért G minden \mathbf{I}_G vektora ortogonális M minden \mathbf{U}_M vektorára (Tellegen tétele):

$$\mathbf{U}_M \mathbf{I}_G = 0. \quad (27.a)$$

Ezt úgy is szokás egyszerűen fogalmazni, hogy a G és az M alterek ortogonálisak:

$$G \perp M. \quad (27.b)$$

A G -be nem beleső, tehát forrásos árameloszlások részhalmaza nem altér, mert ezek lineáris kombinációja kiadhat forrásmentes eloszlást.

Felvehető azonban a G -n kívül $(v-p)$ számú lineárisan független áramvektor, [amely a G -altér $(e-v+p)$ -számú lineárisan független vektorával együtt e dimenziós bázist alkot], és az ezek által kifeszített H altér, amelynek dimenziószáma tehát

$$\dim H = v - p \quad (28)$$

Ilyen H altér azonban végtelen sok van.

Az M -be bele nem eső, tehát örvényes feszültségeloszlások részhalmaza szintén nem altér, (örvényes feszültségeloszlások lineáris kombinációja kiadhat örvénymenteset), *felvehető* azonban $(e-v+p)$ -számú lineárisan független örvényes feszültségeloszlás által kifeszített N altér, amelyre

$$\dim N = e - v + p. \quad (29)$$

Ilyen N altér végtelen sok van. Válasszuk meg N -t úgy, hogy a már kiválasztott H -ra ortogonális legyen, tehát *előírjuk*, hogy

$$H \perp N \quad (30)$$

(ez egyébként az N alteret már egyértelműen meghatározza).

Az így kapott altereket és tulajdonságaikat a 2. ábrán szemléltetjük; (az alterek jele alá írtuk a dimenziószámot); a $\mathbf{0}$ -vektort mindegyik altér tartalmazza.

Az eddigiekből következik, hogy minden passzív és aktív áramvektor felbontható a G és H alterekbe eső komponensekre:

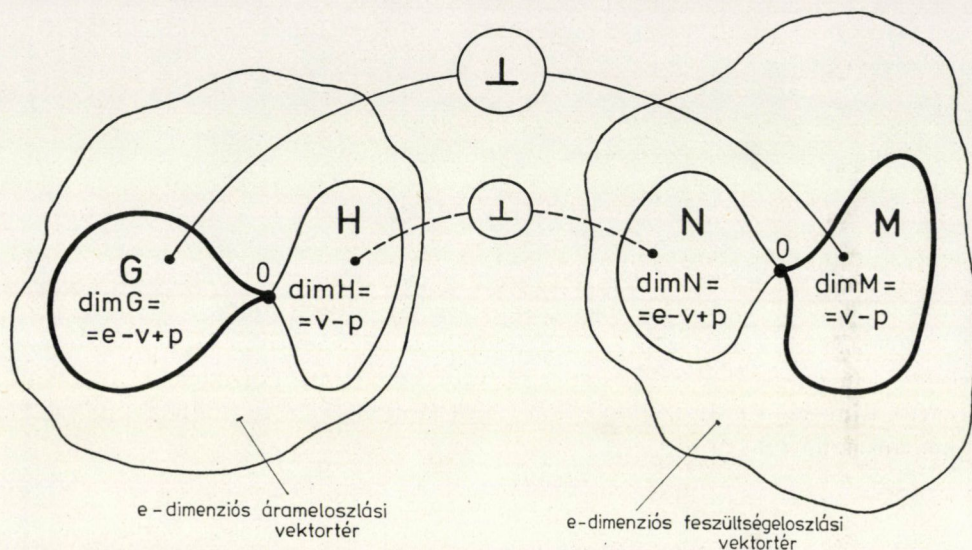
$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_G + \mathbf{I}_H \quad (31.a)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_G + \mathbf{J}_H \quad (31.b)$$

Ugyanígy minden passzív és aktív feszültségvektor az M és N alterekbe eső komponensekre bontható:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_M + \mathbf{U}_N, \quad (32.a)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_M + \mathbf{V}_N. \quad (32.b)$$



G: a forrásmentes altér H: egy forrásos altér M: az örvénymentes altér
N: egy örvényes altér

2. ábra

Az 1. ábrára tekintve látható, hogy a passzív és aktív áramok eredője a primitív bázisban

$$\mathbf{I}^k - \mathbf{J}^k,$$

a passzív és aktív feszültségek eredője pedig a primitív bázisban

$$\mathbf{U}_k - \mathbf{V}_k.$$

Így az eredő árameloszlási, illetve feszültségeloszlási vektor:

$$\mathbf{I} - \mathbf{J}, \text{ illetve } \mathbf{U} - \mathbf{V}.$$

Ezeknek az eredőknek ki *kell* elégíteniök a Kirchhoff-törvényeket; ez azt jelenti, hogy az

$$\mathbf{I} - \mathbf{J} = (\mathbf{I}_G - \mathbf{J}_G) + (\mathbf{I}_H - \mathbf{J}_H)$$

vektornak csak a G forrásmentes altérbe eső, az

$$\mathbf{U} - \mathbf{V} = (\mathbf{U}_M - \mathbf{V}_M) + (\mathbf{U}_N - \mathbf{V}_N)$$

vektornak pedig csak az M örvénymentes altérbe eső komponense lehet; (közben használtuk a (31) és (32) képleteket). Így azután a Kirchhoff-törvények

$$\mathbf{I}_H = \mathbf{J}_H, \quad (33.a)$$

$$\mathbf{U}_N = \mathbf{V}_N \quad (33.b)$$

alakot öltenek. Ezeket a (31.a) és (32a) összefüggésbe helyettesítve

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_G + \mathbf{J}_H,$$

és

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_M + \mathbf{V}_N.$$

A (19) és (22) képletek szerinti Ohm-törvények figyelembevételével végül az

$$\mathbf{U}_M + \mathbf{V}_N = \mathbf{Z}(\mathbf{I}_G + \mathbf{J}_H) \quad (34.a)$$

vagy az

$$\mathbf{I}_G + \mathbf{J}_H = \mathbf{Y}(\mathbf{U}_M + \mathbf{V}_N) \quad (34.b)$$

tenzoregyenleteket kapjuk az ismeretlen $(e-v+p)$ -dimenziós forrásmentes \mathbf{I}_G és az ismeretlen $(v-p)$ -dimenziós örvénymentes \mathbf{U}_M vektorok meghatározására.

A tényleges számítást csak meghatározott bázisban tudjuk elvégezni. A primitív bázis — bár \mathbf{Z} és \mathbf{Y} mátrixa ebben egyszerű — erre alkalmatlan, mert nem tudjuk benne az altereket szétválasztani. Ezért olyan bázisra van szükség, amiben ez könnyen végrehajtható, ehhez azonban az ágimpedancia ill. ágadmittancia-mátrixot transzformálni kell.

6. A zárt és nyitott áramok Kron-féle rendszere, mint új bázis

G. KRON *zárt* áramoknak a hurokáramokat, *nyitott* áramoknak pedig azokat nevezte, amelyek egy csomóponton belépnek és egy másikon kilépnek, és közben nem alkotnak hurkot a vizsgált hálózatban. Mivel a G altér minden vektora hurokáramok lineáris kombinációja, azért $(e-v+p)$ -számú, egységnyi erősségű lineárisan független hurokáram *generálja* a forrásmentes G -alteret. Ezekről és egymástól lineárisan független, tehát egymással sem hurkot alkotó $(v-p)$ -számú, egységnyi erősségű nyitott áram pedig egy H forrásos alteret generál. A zárt és nyitott áramok így kapott együttes rendszere az egész áram-

vektorteret kifeszíti, tehát annak egy bázisát alkotja. Ha ehhez felvesszük még a feszültségeloszlási vektortérben a reciprokok bázist, akkor olyan új bázispárt kapunk, amelyben a G és H , ill. az M és N alterekre való szétválasztás egyszerű.

Tekintsük példaként a 3.a ábrán látható hálózatot, melynél az alhálózatok száma $p = 1$, a csúcsok száma $v = 4$ és az ágak száma $e = 5$.

Az ábrán feltüntettük az ágak passzív áramainak vonatkozási irányát. Mivel most $v - p = 3$, és $e - v + p = 2$, 3 db lineárisan független nyitott (egységnyi) áramot és 2 db zárt (egységnyi) áramot kell felvenni.

A b) ábrán a felvett nyitott áramokat, a c) ábrán a felvett hurokáramokat láthatjuk. A nyitott és zárt utak alkotta új bázis vektorainak oszlop mátrixa a régi, primitív bázisban rendre a következők:

$h_1,$	$h_2,$	$h_3,$	$h_4,$	$h_5,$	új bázis vektorok
$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	oszlop mátrixok, mint primitív bázisbeli komponensek
H			G		generált alterek

(A bázis-árameloszlások ág-komponense 1 ill. -1 vagy 0 értékű aszerint, hogy az egységnyi áramú eloszlásnak az ág irányításával egyező ill. ellenkező irányú árama van, vagy ilyen ágárama nincs).

Mivel az új bázisvektorok komponenseit az új bázisban az egységmátrix oszlopai adják, azért a (12.b) vagy a (14.b.) képlet alapján az előzőekben felírt oszlop mátrixok összessége éppen a $t_{k'}^k = [T]$ transzformációs mátrixot adja.

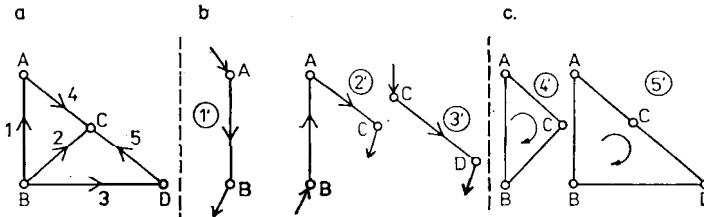
Így tehát

$$t_{k'}^k = [T] = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} H & & \\ (v-p) & & \end{array} & \begin{array}{cc} G & \\ (e-v+p) & \end{array} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$t_k^{k'} = [T]^{-1} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{l} M \\ (v-p) \\ \hline N \\ (e-v+p) \end{array} \end{array}$$

ahol az inverzió számításainak részleteit mellőztük.
Ezek után a primitív bázisban (ágárambázisban) pl.:

$$[I]_t = [-2j; 3; 1+j; 0; -1]$$



3. ábra

mátrixú árameloszlási vektor mátrixa a tárgyalt áramútbázisban a (12.a) vagy (14.a) szerint:

$$[I'] = [T]^{-1} [I] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2j \\ 3 \\ 1+j \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2j \\ 4+j \\ 2+j \\ -3 \\ -1-j \end{bmatrix};$$

az első három a nyitott útú, forrásos áramkomponens, a további két komponens a zárt útú, forrásmentes. Ha egy feszültségeloszlás a primitív bázisban pl.

$$[U]_t = [-j; 1; -2+j; -3; 0]$$

mátrixú, akkor a tárgyalt új bázisban a (12.c) vagy a (14.c) alapján:

$$[U']_t = [U]_t [T] = [-j; 1; -2+j; -3; 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= [j; -3-j; 0; -4-j; -1-2j];$$

az első három az örvénymentes, a további kettő pedig az örvényes feszültségkomponens.

Az alterekre való szétbontást a $[T]$ és $[T]^{-1}$ mátrixok particionálásával általánosan is jelölhetjük. Megállapodva abban, hogy az a, b indexek a nyitott útú, ill. örvénymentes, tehát a H ill. M alterekbeli, az r, s indexek zárt útú, ill.

örvényes, tehát a G ill. N . alterekbeli komponenseket jelölnek, a kívánt particionálás:

$$t_{.k'}^k = [T] = [\underbrace{t_{.a}^k}_{(v-p)} \mid \underbrace{t_{.r}^k}_{(e-v+p)}] (e) \quad (35.a)$$

és

$$t_{.k}^{k'} = [T]^{-1} = \left[\frac{t_{.k}^a}{t_{.k}^r} \right] \left\{ \begin{matrix} (v-p) \\ (e-v+p) \end{matrix} \right\} \quad (35.b)$$

A (12.a) és a (35.b) szerint tehát

$$I^a = t_{.k}^a I^k; \quad 1 \leq a \leq v-p \quad (36.a)$$

és

$$I^r = t_{.k}^r I^k; \quad e-v+p \leq r \leq e \quad (36.b)$$

továbbá

$$[I] = \left[\frac{I^a}{0} \right] + \left[\frac{0}{I^r} \right] \begin{pmatrix} (v-p) \\ (e-v+p) \end{pmatrix} \quad (36.c)$$

valamint a (12.c) és (35.a) alapján

$$U_a = U_k \hat{t}_{.a}^k \quad (37.a)$$

és

$$U_r = U_k \hat{t}_{.r}^k \quad (37.b)$$

továbbá

$$[U'] = \left[\frac{U_a}{0} \right] + \left[\frac{0}{U_r} \right] \begin{pmatrix} (v-p) \\ (e-v+p) \end{pmatrix} \quad (37.c)$$

Ha az áramútbázisbeli komponensekből akarjuk meghatározni a primitív bázisbelieket, és a szummációs konvenciót az altereken belül is használjuk, akkor a (12.b) és (35.a), majd a (12.d) és (35.b) alapján

$$I^k = t_{.a}^k I^a + t_{.r}^k I^r \quad (38)$$

és

$$U_k = U_a \hat{t}_{.k}^a + U_r \hat{t}_{.k}^r \quad (39)$$

(a konjungálási jeleket a transzformációs mátrix valós volta miatt el is hagyhatjuk). Ugyanígy alakú összefüggéseket írhatunk fel az aktív áramokra és feszültségekre is.

A Kirchhoff I. törvény alakja az új bázisban a (33a) alapján:

$$I^a = J^a \quad (40.a)$$

vagy a (36.a)-t is felhasználva

$$t_{.k}^a I^k = t_{.k}^a J^k. \quad (40.b)$$

A *Kirchoff II.* törvény alakja az új bázisban a (33.b) alapján:

$$U_r = V_r \quad (41.a)$$

vagy a (37.a)-t is használva

$$U_k t_{,r}^k = V_k t_{,r}^k \quad (41.b)$$

Az *Ohm-törvény* alakja az áramútbázisban a (18), ill. (21) egyenlet alapján, elvégezve a (17) ill. (24) transzformációt, és a mátrixokat azonnal particionálva írva fel:

$$\begin{matrix} (v-p) & (e-v+p) \\ \left[\begin{array}{c} U_a \\ U_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_{ab} & Z_{as} \\ Z_{rb} & Z_{rs} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I^b \\ I^s \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} (v-p) \\ (e-v+p) \end{matrix} \quad (42.a)$$

illetve

$$\left[\begin{array}{c} I^a \\ I^r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Y^{ab} & Y^{as} \\ Y^{rb} & Y^{rs} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} U_b \\ U_s \end{array} \right] \begin{matrix} (v-p) \\ (e-v+p) \end{matrix} \quad (42.b)$$

Ezek után a hálózatszámítás alapfeladatának megoldását a következőképpen nyerjük:

A (40.a) és (41.a) Kirchhoff-törvényeket a (42.a) ill. (42.b) Ohm-törvény egyenleteibe helyettesítve, és az egyenleteket kettébontva:

$$\begin{aligned} U_a &= Z_{ab} J^b + Z_{as} I^s, \\ V_r &= Z_{rb} J^b + Z_{rs} I^s, \end{aligned} \quad (43.a)$$

illetve

$$\begin{aligned} J^a &= Y^{ab} U_b + Y^{as} V_s, \\ I^r &= Y^{rb} U_b + Y^{rs} V_s. \end{aligned} \quad (43.b)$$

A (43.a) második egyenletéből az ismeretlen I^s *hurokáramok*, a (43.b) első egyenletéből pedig az ismeretlen U_b *örvénymentes feszültségek*, tehát *potenciálok* számíthatók ki, a J^k , V_k *aktív mennyiségek* ismeretében.

A hurokáram-módszer algoritmus:

I. a (36.a) alapján az aktív áramok forrásos komponensének meghatározása

$$J^b = t_{,k}^b J^k;$$

II. a (37.b) alapján az aktív feszültségek örvényes komponensének számítása

$$V_r = V_k t_{,r}^k;$$

III. az impedancia mátrix transzformálása a (17) egyenlet alapján

$$Z_{k'l'} = \hat{t}_{k'}^k Z_{kl} t_l^l; \quad [Z'] = [\hat{T}]_t [Z][T];$$

IV. particionálás

$$(v-p) \begin{pmatrix} e-v+p \\ \hline \end{pmatrix} \\ Z_{k'l'} = \left[\begin{array}{c|c} Z_{ab} & Z_{as} \\ \hline Z_{rb} & Z_{rs} \end{array} \right] \begin{pmatrix} (v-p) \\ (e-v+p) \end{pmatrix}$$

V. a (43.a)-második egyenletéből adódó

$$Z_{rs} I^s = V_r - Z_{rb} J^b$$

lineáris egyenletrendszer megoldása I^s -re;

VI. a (43.a) első egyenletéből a potenciális feszültségek számítása

$$U_a = Z_{ab} J^b + Z_{as} I^s;$$

VII. a passzív ágáramok kiszámítása a (38)-ból a (40.a) figyelembevételével

$$I^k = t_{,b}^k J^b + t_{,s}^k I^s;$$

VIII. a passzív ágfeszültségek kiszámítása a (39)-ből a (41.a) felhasználásával

$$U_k = U_a \hat{t}_{,k}^a + V_r \hat{t}_{,k}^r.$$

A potenciálmódszer algoritmusra:

(csak a hurokmódszertől eltérő lépéseket írjuk le)

III. az admittancia-mátrix transzformálása a (24) egyenlet alapján:

$$Y^{m'k'} = t_{,m}^{m'} Y^{mk} \hat{t}_{,k}^{k'}; \quad Y' = [T]^{-1} [Y] [\hat{T}]_t^{-1};$$

IV. particionálás

$$Y^{m'k'} = \left[\begin{array}{c|c} Y^{ab} & Y^{as} \\ \hline Y^{rb} & Y^{rs} \end{array} \right];$$

V. a (43.b) első egyenletéből adódó

$$Y^{ab} U_b = J^a - Y^{as} V_s$$

lineáris egyenletrendszer megoldása U_b -re;

VI. a hurokáramok meghatározása a (43.b) második egyenletéből

$$I^r = Y^{rb} U_b + Y^{rs} V_s.$$

Az 1. ábra szerinti elrendezés nem tartalmazza azt az esetet, amelynél *csomóponti árambetáplálás* is van; (egy alhálózaton belül ezek összege természetesen zérus). Belátható, hogy ezek nyitott áramok lineáris kombinációi, és így nyitott útú komponenseik könnyen felírhatók. Pl. ha a 3.a) ábrán a megfelelő csomópontokon $K^A, K^B, K^C, K^D = -K^A - K^B - K^C$ árambetáplálás van, akkor ez az árameloszlás a 3.b) ábrán látható (egységnyi) nyitott áramokkal így írható fel:

$$K^A \mathbf{h}_1' + (K^B + K^A) \mathbf{h}_2' + (K^C + K^B + K^A) \mathbf{h}_3'$$

és ez azt jelenti, hogy a nyitott útú komponensek rendre

$$K^{1'} = K^A, K^{2'} = K^A + K^B, K^{3'} = K^A + K^B + K^C.$$

Ezek után a külső, csomóponti áram betáplálást úgy kell figyelembe venni, hogy az aktív áramok nyitott útú komponenseit K^a -val növelni kell, tehát az (V), és (VI)-ban

$$J^a \text{ helyére } J^a + K^a \text{ kerül.}$$

A hálózatszámítás alapfeladatának megoldhatósága szempontjából lényeges az alábbi tétel:

Ha a szimmetrikus impedancia-mátrix elemei közül csak az önimpedanciáknak van zérustól különböző valós részük, és ez *véges és pozitív*, akkor a Z_{rs} mátrix nem szinguláris, és így invertálható.

E tétel belátására tekintsük a forrásmentes árameloszlásokat. Ebben az esetben az árameloszlásnak nyitott útú komponense nincsen, tehát

$$I^a = 0, \quad I^{k'} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k' = 1, 2, \dots, v-p \\ I^r, & \text{ha } k' > v-p \end{cases}$$

ezért a teljesítmény:

$$S = I^{k'} Z_{k'l'} I^{l'} = I^r Z_{rs} I^s$$

A teljesítmény invarianciája miatt

$$\widehat{I^{k'}} Z_{k'l'} I^{l'} = \widehat{I^k} Z_{kl} I^l,$$

tehát

$$S = \widehat{I^k} Z_{rs} I^s = \widehat{I^k} Z_{kl} I^l$$

(k, l a primitív bázisbeli indexek).

Másrészt a feltétel szerint

$$Z_{kl} = R_{kk} + jX_{kl} \quad (\text{és } X_{kl} = X_{lk}), \quad .$$

ezért

$$S = \sum_{k=1}^e R_{kk} \hat{I}_k I_k + j(\hat{I}^k X_{kl} I^l) = \sum_{k=1}^e R_{kk} |I_k|^2 + jQ$$

(Q valós, mert $\hat{I}^k X_{kl} I^l = \hat{I}^l X_{lk} I^k = \hat{I}^l X_{kl} I^k = I^k X_{kl} \hat{I}^l$)

Így $\text{Re}(S) > 0$ (kivéve a nulla árameloszlás esetét).

Tehát az $S = I' Z_{rs} I^s$ másodfokú alak $I' = 0$ -tól eltekintve sohasem nulla, így Z_{rs} *nem szinguláris*. Hasonlóan látható be Y^{ab} *nem szinguláris* volta is.

7. A gráfelmélet alkalmazásával nyerhető áramútbázisok

Egy hálózat tetszőleges (teljes) fájához — nem összefüggő hálózat esetén érdejéhez — egyszerű módon rendelhetünk zárt és nyitott áramutakat. A v csúcspontú összefüggő hálózat egy fája $(v-1)$ -számú, a p alhálózatú hálózat pedig $(v-p)$ -számú faágat tartalmaz. Az $(e-v+p)$ -számú húrágat (kötőágot) faágakkal hurkokká kiegészítve $(e-v+p)$ -számú lineárisan független zárt utat kapunk. Az ezeknek megfelelő egységnyi hurokáramok generálják a forrásmentes G alteret. Egy forrásos H alteret generáló nyitott áramutakat pedig egyszerű módon úgy kapunk, hogy *egy-egy faágat veszünk nyitott útnak*. Az ily módon nyert áramútbázist *egyszerű fábázisnak* nevezhetjük. Ha az ágak számozását a primitív bázisban is a felvett faágakkal kezdjük, akkor a $t_{k,k'}^k = [T]$ transzformációs mátrix felépítése az alábbi:

$$[T] = t_{k,k'}^k = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{shaded} \\ \text{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{shaded} \\ \text{matrix} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

itt +1, -1, vagy 0 lehet

$v-p$

$e-v+p$

$v-p$ $e-v+p$

Az $(e-v+p)$ -számú oszlop mindegyike egy-egy olyan huroknak felel meg, amelyben egyetlen kötőág van; (ezért van a jobb alsó sarokban is egységmátrix). Az egész $(e-v+p)$ -oszlopú téglánymátrix transzponáltját *hurokmátrixnak* szokás nevezni, és $[B]$ -vel jelölni. Ennek csak a faágakhoz tartozó $[B_f]$ mátrixrésze tartalmaz a hálózatra jellemző információt, hiszen a húrágakhoz tartozó négyzetes mátrixrész egységmátrix:

$$[B_h] = [E_h].$$

Így a $[T]$ transzformációs mátrixot particionálva felírva és (35.a)-val összevetve:

$$[T] = \left[\begin{array}{c|c} [E_f] & -[B_f]_l \\ \hline [0] & [B_h]_l = [E_h] \end{array} \right], \quad t_{.a}^k = \left[\begin{array}{c} [E_f] \\ [0] \end{array} \right]; \quad t_{.r}^k = [B]_l. \quad (44.a)$$

Az inverz transzformációs mátrix:

e

$$t_{.k}^{k'} = [T]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} [E_f] & -[B_f]_l \\ \hline [0] & [E_h] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} [C] \\ [0] \quad [E_h] \end{array} \right] \begin{array}{l} v-p \\ e-v+p \end{array} \quad (44.b)$$

amint azt egyszerű beszorzással ellenőrizhetjük.

A (35.b)-vel összevetve:

$$t_{.k}^a = \left[\begin{array}{c} [E_f] \\ -[B_f]_l \end{array} \right] = [C], \quad (44.c)$$

$$t_{.k}^r = \left[\begin{array}{c} [0] \\ [E_h] \end{array} \right].$$

A (13) összefüggés alapján $t_{.k}^a t_{.r}^k = 0$

így

$$[C][B]_l = [0]. \quad (44.d)$$

A C mátrixot *vágatmátrixnak* szokás nevezni. Az elnevezés a következőképpen indokolható. Tekintsük azt a feszültségeloszlást, amelynél egy egyetlen faágat tartalmazó vágat ágai ugyanazon oldalra irányítva egységnyi feszültségűek, míg a vágaton kívüli ágak feszültsége zérus! Ez az eloszlás örvénymentes, potenciálos, hiszen a csomópontok potenciálja egyértelműen kiadódik. Így egyik hurokárammal sem ad teljesítményt. A nyitott faágáramok közül pedig csak azzal ad — éspedig egységnyi — teljesítményt, amelyet a vágat is tartalmaz. Ez a feszültségeloszlás tehát a reciprokbázis egy örvénymentes vektora, és így komponense a (44.b) mátrix felső részének, azaz a (44.c) szerint $[C]$ mátrixnak valamely sorában található. Az egyszerű fabázissal használt potenciál-módszert *vágatmódszernek* (vagy vágat-potenciál módszernek) nevezik.

(A magyarázathoz felvett áram- és feszültségeloszlások a valóságos ágakban egyszerre az aktív elemek megfelelő megválasztásával alakulhatnak ki; ez a megjegyzés az $[A]$ mátrixnak a (47.d) egyenletet követő magyarázatára is vonatkozik).

A hurokáramok módszerének a közismert leszűkített formáját úgy kapjuk, hogy nem engedjük meg aktív áramok (áramgenerátorok) jelenlétét; (előzőleg — ha lehet — átalakítjuk feszültséggenerátorokká). Így a (43.a) második egyenletéből $J^b = 0$ helyettesítéssel

$$Z_{rs} I^s = V_r$$

adódik. Mivel Z_{rs} a

$$Z' = [T]_t [Z] [T]$$

mátrix jobb alsó részmátrixa, a (44.a) alapján kiadódik, hogy

$$Z_{rs} = t_{.r}^k Z_{kl} t_{.s}^l = [B][Z][B]_t;$$

továbbá a (37.b) és a (44.a) alapján

$$[V_r]_t = [V]_t [B]_t, \text{ és így } [V_r] = [B][V].$$

Tehát az $[I^s]$ hurokáramokra a

$$\{[B][Z][B]_t\} [I^s] = [B][V] \quad (45.a)$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldása után az ágáramok a (38), (44.a) és $I^a = J^a = 0$ alapján

$$[I] = [B]_t [I^s]. \quad (45.b)$$

Ebben az esetben tulajdonképpen csupán a 2. ábra szerinti G forrásmentes áramaltérrel és egy N örvényes feszültség-altérrel dolgozunk.

A vágatpotenciálok módszerének a közismert leszűkített formájához úgy jutunk, hogy nem engedjük meg aktív feszültségek (feszültséggenerátorok) jelenlétét; (előzőleg — ha lehet — átalakítjuk áramgenerátorokká).

Így a (43.b) első egyenletéből $V_s = 0$ -sal

$$Y^{ab} U_b = J^a.$$

Mivel a Y^{ab} az

$$[Y'] = [T]^{-1} [Y] [T]_t^{-1}$$

mátrix bal felső részmátrixa, a (44.b) és a (44.c) alapján

$$Y^{ab} = t_{.k}^a Y^{kl} t_{.l}^b = [C][Y][C]_t.$$

Továbbá a (36.a) és a (44.c) egyenletekkel

$$J^a = t_{.k}^a J^k, [J^a] = [C][J],$$

tehát az $[U_b]$ vágatpotenciálok meghatározására a

$$\{[C][Y][C]_t\} [U_b] = [C][J]$$

lineáris egyenletrendszert nyerjük. Az ágfeszültségek a (39), (44.c) és $U_r = V_r = 0$ alapján

$$[U] = [C]_t [U_b]. \quad (46.b)$$

Itt végeredményben csupán a 2. ábrán látható M örvénymentes (potenciális) feszültségaltérrel és egy H forrásos áramaltérrel dolgozunk.

Tekintsük ezek után azt a fához (erdőhöz) kapcsolódó áramútbázist, amelynél a zárt utak az egyszerű fabázissal egyezően ugyancsak a húrágakhoz rendelt hurkok, *a nyitott utak azonban* (minden alhálózaton belül) *egyetlen nullpontnak tekintett csomópontból indulnak ki és szintén csak faágakat tartalmaznak!* Ezt az áramútbázist *nullponti bázisnak* nevezhetjük. Ha az ágak számozását a primitív bázisban most is a felvett faágakkal kezdjük, akkor a $t_{k'}^k = [T]$ transzformációs mátrix felépítése abban különbözik az egyszerű fabázistól (44.a összefüggés), hogy a bal felső részmátrix nem egységmátrix; ugyanis a nyitott utakon folyó egységnyi áram több faágon is átmehet, tehát a $[T]$ mátrix első $(v-p)$ -számú oszlopában a főátlón kívül is lehet $+1$ vagy -1 ; a bal alsó részmátrix továbbra is 0, hiszen a nyitott áramok kötőágon (húron) nem folynak át. A bal felső részmátrix transzponáltját *faágút-mátrixnak* nevezik és $[K]$ -val jelölik. Így a nullponti fabázis transzformációs mátrixa

$$\left. \begin{aligned} [T] &= \left[\begin{array}{c|c} [K]_t & [B_f]_t \\ \hline [0] & [B_h]_t = [E_h] \end{array} \right], \\ t_{a'}^k &= \left[\begin{array}{c} [K]_t \\ [0] \end{array} \right]; \quad t_{r'}^k = [B]_t. \end{aligned} \right\} \quad (47.a)$$

Az inverz transzformációs mátrix meghatározására azt is particionált alakban írjuk fel:

$$[T]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} [A_f] & [A_h] \\ \hline [D_f] & [D_h] \end{array} \right].$$

Mivel szorzatuknak egységmátrixot kell kiadni, az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} [K]_t[A_f] + [B_f]_t[D_f] &= [E_f]; \quad [0][A_f] + [E_h][D_f] = [0]; \\ [K]_t[A_h] + [B_f]_t[D_h] &= [0]; \quad [0][A_h] + [E_h][D_h] = [E_h]; \end{aligned}$$

a másodikból

$$[D_f] = [0],$$

a negyedikből

$$[D_h] = [E_h],$$

és így

$$\left. \begin{aligned} [A_f] &= [K]_t^{-1}; \quad [A_h] = -[A_f][B_f]_t \\ [T]^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} [A_f] & [A_h] \\ \hline [0] & [E_h] \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \quad (47.b)$$

A (35.b)-vel összevetve

$$\left. \begin{aligned} t_{.k}^a &= [[A_f] \mid [A_h]] = [A] \\ \text{és} \\ t_{.k}' &= [[0] \mid [E_h]] \end{aligned} \right\} \quad (47.c)$$

A (13) összefüggés alapján

$$t_{.k}^a t_{.r}^k = 0,$$

tehát

$$[A][B]_t = 0. \quad (47.d)$$

Az $[A]$ mátrixot $[K_t]^{-1}$ kiszámítása nélkül is meghatározhatjuk. Tekintsük azt az örvénymentes (potenciálos) passzív feszültségeloszlást, amelynél egyetlen csomópontnak a nullaponthoz képest mutatkozó potenciálja negatív egységnyi, a többi csomópont potenciálja zérus! Ez, mint örvénymentes feszültségeloszlás ortogonális a forrásmentes árameloszlásokra, tehát a zárt útú áramokra; a nullponti fabázis nyitott útú áramai e feszültségeloszlás szempontjából háromfélék lehetnek: a negatív egységnyi potenciálú csomópontot *el nem érők*, azt *túlhaladók*, és éppen ott *végződők*. Az első esetben nyilván nincs teljesítmény, a második esetben azért nincs, mert a nyitott útú áram mentén ugyanannyit nő a potenciál, mint amennyit csökken, a harmadik — egyetlen egyszer előforduló — esetben pedig a teljesítmény egységnyi. Ez a feszültségeloszlás tehát a reciprok bázis egy örvénymentes vektora, amelynek primitív bázisbeli komponense a (14.d) transzformációs törvény alapján a $[T]^{-1}$ mátrix felső részének, azaz az $[A]$ mátrixnak valamely sora. Az $[A]$ mátrix sorait tehát rendre úgy is megkaphatjuk, hogy a nyitott áramutak számozási sorrendjében azt a csomópontot választjuk ki, ahol a nyitott áramút kilép, és az ágakhoz tartozó sorelem $+1$ ill. -1 , vagy 0 értékű aszerint, hogy az ág passzív árama a kiválasztott csomópont felé ill. ellentétesen van irányítva, vagy nem csatlakozik (közvetlenül) a csomópontához. Ezért az $[A]$ mátrixot *csomóponti mátrixnak* vagy *csúcsmátrixnak* nevezik.

A nullponti fabázissal használt potenciálmódszert *csomóponti módszernek* (vagy csomóponti potenciálok módszerének) nevezik. Ennek *leszűkített formáját* úgy kapjuk, hogy nem engedjük meg aktív feszültségek (feszültséggenerátorok) jelenlétét; (előzőleg — ha lehet — átalakítjuk áramgenerátorokká). Így a (43.b) első egyenletéből $V_s = 0$ -val,

$$Y^{ab} U_b = I^a.$$

Mivel a (47.c) felhasználásával

$$Y^{ab} = t_{.k}^a Y^{kl} t_{.l}^b = [A][Y][A]_t,$$

továbbá a (36.a) és (47.c) egyenletekkel

$$J^a = t_{,k}^a J^k, \quad [J^a] = [A][J],$$

azért az U_b csomóponti potenciálok meghatározására az

$$\{[A][Y][A]_i\} [U_b] = [A][J] \quad (48.a)$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Az ágfeszültségek a (39), (47.c), és $U_r = V_r = 0$ alapján

$$[U] = [A]_i [U_b]. \quad (48.b)$$

Itt is csupán a 2. ábra szerinti örvénymentes M feszültségaltérrel és egy forrásos H áramaltérrel dolgozunk tulajdonképpen.

8. Diakoptika

A hálózatszámításnak leginkább tárolásigényes és leginkább számolásigényes része a lineáris egyenletrendszer megoldása. Ennek mátrixa rendszerint „ritka”, tehát sok zérus elemet tartalmaz. A G. KRON által kidolgozott diakoptika átvágásokkal részhálózatokra bontja a hálózatot (dia = át, kopto = szakítani), és a leegyszerűsített részhálózatokat ismét összekapcsolva oldja meg a feladatot. Ezáltal több kis tömör négyzetes mátrixot kell csak kezelni az egyetlen nagy ritka mátrix helyett. Ily módon a tárolási igény nyilvánvalóan kisebb, a számolási munka pedig azért csökken, mert a lineáris egyenletrendszerek megoldási műveleteinek száma a méretek köbével arányos, tehát kb. $k(n/k)^3 = n^3/k^2$ áll szemben az n^3 műveletszámítással; (itt n a nem szétvágott hálózat lineáris egyenletrendszere mátrixának mérete, k a részhálózatok száma).

A diakoptikában lényeges szerepe van egy általános hálózatszámítási tételnek, ami az eddigiek alapján könnyen belátható.

Átalakítás egyenértékű fahálózatú

Az átalakítási tétel csak olyan hálózatra érvényes, amely nincs más hálózattal induktív csatolásban.

A potenciálmódszerek a (43.b) első egyenletére támaszkodnak. Eszerint

$$Y^{ab} U_b = J^a - Y^{as} V_s.$$

Itt J^a az áramgenerátorok nyitott útú (forrásos) komponense, V_s a feszültséggenerátorok örvényes komponense, U_b pedig a keresett passzív feszültség potenciálos komponense. Ha Y^{ab} (létező) inverzét W_{ba} -val jelöljük,

azaz ha

$$(Y^{ab})^{-1} = W_{ba}, \quad (49)$$

továbbá, ha a csomópontokba betáplált külső áramok forrásos komponense K^a , akkor J^a -t ezzel bővítve és az előbbi egyenlethől U_b -t kifejezve,

$$U_b = W_{ba} (J^a + K^a - Y^{as} V_s). \quad (50)$$

Használjunk egyszerű fabázist! A (37.a) és a (44.a) alapján írhatjuk, hogy

$$U_b = U_k t_{.b}^k = (U_k)_{1 \leq k \leq v-p}$$

és

$$V_b = V_k t_{.b}^k = (U_k)_{1 \leq k \leq v-p} \quad (51)$$

azaz egyszerű fabázisban az örvénymentes (potenciális) feszültségkomponensek megegyeznek a primitív bázis feszültségkomponensei közül a faágakhoz tartozókkal. Ez tehát azt jelenti, hogy a vizsgált hálózat kifelé, tehát a csomópontok közötti feszültség és a csomópontokba folyó külső áramok szempontjából úgy viselkedik, mint olyan csupa faágból álló hálózat, amelynek V_b feszültség-generátora megegyezik az eredetivel, áramgenerátora

$$J^a - Y^{as} V_s,$$

ön-, és kölcsönös impedanciája pedig W_{ba} .

A helyettesítő fahálózat b -edik ágát a 4. ábra mutatja.

Megjegyezzük még, hogy ha nullponti fabázissal dolgozunk, akkor egy pontból (ill. alhálózatonként egy pontból) kiinduló sugaras hálózattal helyettesíthetjük az eredetit.

Ezek után vágjuk szét az összefüggő hálózatot részhálózatokra oly módon, hogy az átvágott ágak összességének, a köztes részhálózatnak az eltávolítása után a részhálózatok egymáshoz hurok nélkül kapcsolódva továbbra is függyjenek össze egymással! (5. ábra.)

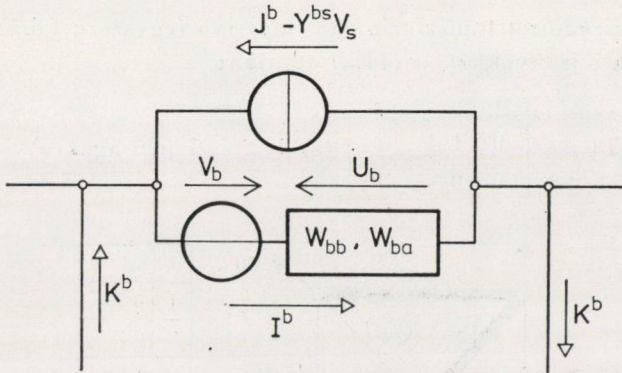
A részhálózatokra felvett fák összessége az egész hálózatnak is fája (az ábrán a kivastagított rész), és a köztes részhálózat (az átvágott ágak) e fára nézve hurokat (kötőágakat) alkot. Ha a részhálózatoknak egymással és a köztes részhálózatokkal nincsenek kölcsönös impedanciáik, akkor az egész hálózat passzív áram-, és feszültségeloszlását a következőképpen határozhatjuk meg:

a) a részhálózatokat az előzőek szerint fahálózatokkal helyettesítjük. Így az egész helyettesítés utáni hálózat csak annyi hurkot tartalmaz, amennyi az átvágott ágak száma, azaz a köztes részhálózat ágainak száma; (6. ábra.)

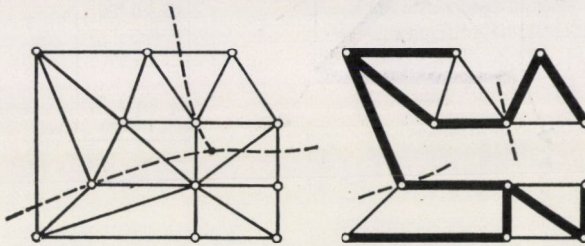
b) az egész helyettesített hálózat feszültség- és árameloszlását hurokmódszerrel meghatározzuk;

c) végül kiszámítjuk a részhálózatok valóságos áramait.

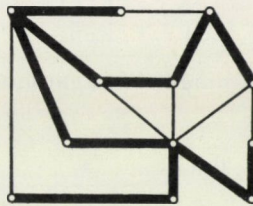
A részleteket példán mutatjuk be.



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Tekintsük a 7. ábrán látható egyenáramú hálózatot. A hálózat belsejében (tehát az ágakon belül) nincsenek források, minden ág passzív elem, csak csomóponti árambetáplálások vannak. Mivel a hálózat egyenáramú, kölcsönös impedanciák nincsenek.

Az önimpedanciák (ellenállások) értékei az ábrabeli táblázatban találhatók. A vastagított ágak egy kiválasztott fát jelölnek.

a.) A részhálózatok átalakítása

Az Y^{ab} az áramútbázisba transzformált $Y^{m'k'}$ admittanciamátrix bal felső részmátrixa, tehát a (24.a) felhasználásával

$$Y^{ab} = t_{.m}^a Y^{mk} t_{.k}^b.$$

A (49) egyenlet szerint:

$$W_{ab} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,04 & -0,02 \\ -0,02 & 0,06 \end{bmatrix}.$$

Feszültségforrás nincs, a külső aktív áramforrások nyitott útú komponensei:

$$K^a = \begin{bmatrix} K^{1'} \\ K^{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200+300 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Az alsó részhálózatra ugyanazt a transzformációs mátrixot kapjuk (a 3, 4, 8 jelű ágakra).

$$Y^{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 & & \\ & 10 & \\ & & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$W_{ab} = \begin{bmatrix} 49 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,025 & -0,015 \\ -0,015 & 0,049 \end{bmatrix},$$

a külső aktív áramforrások nyitott útú komponensei:

$$K^a = \begin{bmatrix} K^{3'} \\ K^{4'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200+500 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \end{bmatrix}.$$

b.) A helyettesítő hálózat számítása

A helyettesítő hálózat az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 jelű ágakból áll. Ágimpedancia-mátrixa — az átalakított részhálózatok és az 5 és 6 jelű ágak megadott ön-impedanciája alapján:

$$Z_{kl} = [Z] = \frac{1}{1000} \cdot \begin{bmatrix} 40 & -20 & & & & \\ -20 & 60 & & & & \\ & & 25 & -15 & & \\ & & -15 & 49 & & \\ & & & & 106 & \\ & & & & & 25 \end{bmatrix}.$$

(A ki nem írt helyeken 0 áll).

A transzformációs mátrix a (44.a) alapján:

$$t_{k,k'}^k = [T] = \begin{bmatrix} 1 & & -1 & & 1 \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Feszültségforrás nincs, a külső áramokból származó áramforrások nyitott útú része a részhálózatok átalakításából átvéve

$$[J^b] = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 700 \\ 500 \end{bmatrix}.$$

Ezzel a hurokáram-módszer I. lépését kihagyhatjuk, II. lépését (ennél a példánál) pedig azért, mert nincs feszültségforrás. A III. és IV. lépés (a részletszámítások mellőzésével):

$$[Z'] = [T]_i [Z] [T] = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 40 & -20 & & & -40 & 20 \\ -20 & 60 & & & 20 & 40 \\ & & 25 & -15 & 10 & -25 \\ & & -15 & 49 & 34 & 15 \\ -40 & 20 & 10 & 34 & 190 & -30 \\ 20 & 40 & -25 & 15 & -30 & 110 \end{bmatrix}$$

Az V. lépés:

$$\frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 190 & -30 \\ -30 & 110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{5'} \\ I^{6'} \end{bmatrix} = 0 - \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} -40 & 20 & 10 & 34 \\ 20 & 40 & -25 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 700 \\ 500 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 19 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{5'} \\ I^{6'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ -1200 \end{bmatrix}$$

és innen

$$\begin{bmatrix} I^{5'} \\ I^{6'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -73 \\ -129 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^5 \\ I^6 \end{bmatrix}.$$

A VI. lépés:

$$\begin{bmatrix} U_{1'} \\ U_{2'} \\ U_{3'} \\ U_{4'} \end{bmatrix} = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 40 & -20 & & & \\ -20 & 60 & & & \\ & & 25 & -15 & \\ & & -15 & 49 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 700 \\ 500 \end{bmatrix} + \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} -40 & 20 \\ 20 & 40 \\ 10 & -25 \\ 34 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -73 \\ -129 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,34 \\ -6,62 \\ 2,495 \\ -4,417 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,34 \\ 1,38 \\ 12,495 \\ 9,583 \end{bmatrix}.$$

A helyettesítő hálózat áramait nem határoztuk meg, mert nincs rá szükség.

c) A részhálózatok ágaramai

A feszültségek potenciálos komponensei a helyettesítő hálózatéval azonosak. Az ágfeszültségeket a (39) képletből, az ágáramokat pedig a (20) képletből számítjuk.

A *felső* (1, 2, 7) ágú részhálózatra:

$$[U_1, U_2, U_7] = [U]_t = [14, 34; 1, 38] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + [0][0; 0; 1],$$

$$[U_1, U_2, U_7] = [14, 34; 1, 38; 15, 72],$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & & \\ & 10 & \\ & & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14,34 \\ 1,38 \\ 15,72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 286,8 \\ 13,8 \\ 157,2 \end{bmatrix}.$$

Az *alsó*, (3, 4, 8 ágú) részhálózatra

$$[U_3, U_4, U_8] = [12, 495; 9,583] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [12,495; 9,583; 22,078],$$

$$\begin{bmatrix} I^3 \\ I^4 \\ I^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & & \\ & 10 & \\ & & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12,495 \\ 9,583 \\ 22,078 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 424,83 \\ 95,83 \\ 331,17 \end{bmatrix}.$$

Ezzel minden ágáramot meghatároztunk.

A következőkben általánosabb megfogalmazásban adjuk meg a diakoptika módszerét.

A vizsgált hálózatot *részhálózatokra* bontjuk. Ezt oly módon végezzük, hogy először meghatározott csomópontokat és ezek egymással való ág-kapcsolatát foglaljuk be egy részhálózatba, lehetőleg ügyelve arra, hogy minél kevesebb ág maradjon ki. Ezután egy híján mindegyik részhálózathoz még egy csomópontot csatolunk; az ágkapcsolatokkal együtt az ezáltal kapott közös csomópontok biztosítják a részhálózatok hurokmentes összekapcsolását. (Különböző részhálózatok ágai között nem szabad kölcsönös indukciónak lenni). A véglegesen kimaradt ágak alkotják a *köztes részhálózatot*.

Minden részhálózaton belül a nyitott és zárt utaknak egy teljes rendszerét vesszük fel, majd a (49) és (50) egyenletek és a 4. ábra alapján ebben az általános, (nem feltétlen egy fához kötött) bázisban nyitott útú hálózatra redukáljuk a részhálózatot.

Ezután a hálózatszámítási feladatot abban a redukált hálózatban tekintjük, amely a részhálózatokban felvett nyitott utak összességéből és a köztes részhálózat ágainak felhasználásával nyert (ezen ágak számával egyező számú) hurkokból áll, és hurok módszerrel oldjuk meg.

IRODALOM

1. BRAMELLER, A.—JOHN, M. N.—SCOTT M. H.: Practical Diakoptics for Electrical Networks; Chapman and Hall, London 1969
2. GELFAND I. M.: Lekcii po linejnoj algebre, Moszkva 1951
3. HALMOS P. R.: Finite-Dimensional Vector Spaces, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1950
4. HAPP H. H.: Diakoptics and Networks; Academic Press, New York—London 1971
5. KLOS A.: Algebraic Model of Electrical Network, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS—89, (1970), February, No 2
6. KRON G.: Tensor Analysis of Networks, Wiley, New York 1939
7. KRON G.: Diakoptics; the Piecewise Solution of Large Scale Systems, MacDonald, London 1963
8. ROUTH J. P.: An Application of Algebraic Topology: Kron's Method of Tearing; *Quarterly of Applied Mathematics*, 17, April (1959) April; N° 1
9. SCHOOTEN: J. A.: Ricci—Calculus, Springer—Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954
10. SESHU S.—REED M. B.: Linear Graphs and Electrical Networks. Addison-Werley, 1961. Reading Mass.
11. SLEPIAN P.: Mathematical Foundations of Network Analysis, Springer, Berlin—Heidelberg—New York 1968
12. WEYL H.: Repartition de corriente et uno red conductora, *Revista matematica, Hispano-Americana* 5, (1923), 153—164

A Simple Variant of Kron's Network Calculation, Based on the Theory of Linear Vectorspaces
 — According to the views expressed in the paper Kron's network calculation system gains a simple and clear linear algebraic foundation by considering the sets of stationary current distributions and voltage distributions as a linear vectorspace of dimension equal to the number of branches, between which the scalar multiplication resulting in the power is defined as an operation. The basis transformations of the two vector fields are connected by the fulfilment of the power invariancy. The current vectorspace can be decomposed into the sum of a source-free and of a source-containing subspaces, the voltage vectorspace into the sum of an irrotational and a solenoidal subspace. The basis assumed accordingly corresponds to the „orthogonal network” of Kron consisting of open and closed current paths, while the basis assumed according to the branches corresponds to the „primitive network”. The paper creates the connection with the usual matrix network calculation method by the bases obtainable by the graph theory, finally Kron's diakoptic is presented in the light of the above.

Eine auf der Theorie der linearen Vektorräume beruhende einfache Variante der Kronschen Netzwerkberechnung. — Nach Auffassung des Verfassers erlangt das Kronsche Netzwerkberechnungssystem dadurch eine einfache und klare linear algebraische Begründung, daß die Mengen der stationären Stromverteilungen und Spannungsverteilungen als je ein lineares Vektorraum von der Dimension der Zweiganzahlen betrachtet werden, zwischen denen die als Ergebnis Leistung ergebende skalare Multiplikation als Operation definiert ist. Die Basistransformationen der beiden Vektorräume sind durch die Erfüllung der Leistungsinvarianz miteinander verbunden. Das Stromvektorfeld kann in die direkte Summe eines quellenbehafteten und eines quellenfreien Unteräume, das Spannungsvektorfeld in die Summe eines wirbelfreien und eines wirbeligen Unterraumes zerlegt werden. Die so aufgenommene Basis entspricht Krons „orthogonalem Netzwerk” aus offenen und geschlossenen Strombahnen, während die gemäß den Zweigen aufgenommene Basis dem „primitiven Netzwerk” entspricht. Die Arbeit stellt mittels den auf grafentheoretischem Wege erstellbaren Basen den Zusammenhang mit der üblichen matriziellen Netzwerkberechnungsmethode her, und schließlich wird Krons Diakoptik im Spiegel der vorstehenden Ausführungen vorgestellt.

MŰSZAKI RENDSZEREK DINAMIKÁJÁNAK EGYSÉGES BONDGRÁF REPREZENTÁCIÓJÁRÓL I.

SINGER DÉNES*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1977. szeptember 27-én]

A tanulmány ezen első része a műszaki rendszerek matematikai leírásának bondgráf technikán alapuló egységes megközelítését ismerteti. A bondgráfos ábrázolás szemléleti előnyt nyújt a rendszer állapotegyenleteinek felépítéséhez. A bondgráf konvencionális elemkészletét a munka új elemekkel egészíti ki, ami lehetővé teszi a rendszer információ jellegű kapcsolatainak bondokkal (tehát teljesítmény jellegű) kötésekkel való helyettesítését.

1. Bevezetés

Fizikai rendszerek villamos hálózatokkal analóg hálózatokkal való ábrázolása alkalmas eszköznek bizonyult a műszaki tudományok sok területén. Az így nyert tapasztalatok általánosításával kidolgozott ún. fizikai hálózat-elmélet tekinthető az első komoly kísérletnek olyan gráfes segédeszköz kialakítására, amely függetlenül a műszaki rendszer jellegétől és az energiafajtától alkalmas a rendszermodellnek a fizika alaptörvényeiből való felépítésére [1–4].

A fizikai hálózatok módszerének általános alkalmazását több körülmény korlátozza, elsősorban az, hogy bonyolult nem villamos rendszereknél a hálózatok nehezen áttekinthetők és kevés közvetlen információt szolgáltatnak nem a villamosság területén dolgozó szakember számára (bár ez megszokás kérdése is).

A továbbiakban tárgyalt bondgráfes reprezentáció jelentősége abban van, hogy megtartva a fizikai hálózatok módszerének előnyeit, elegáns megoldást biztosít műszaki feladatok megoldására. A bondgráf technika fejlődése mindenesetre nem volt sem gyors, sem ellentmondásmentes és még a mai napig tart. A fejlődés egyes határállomásai a következők:

A fizikai hálózatok elméletének mélyreható elemzésével H. M. PAYNTER, az új koncepció kezdeményezője felismerte, hogy célszerű, ha a rendszer gráfja az elemeket összekötő teljesítményáramokat ábrázolja. Az áramok és hajtó-

* Singer Dénes, 1021—Budapest, II Nyéki u 9

erők ábrázolása csak másodlagos követelmény [5]. A teljesítményáramok — bondok — gráfot alkotnak, mely lényegében a fizikai hálózat duálisa és melynek csomópontjait a rendszer elemei és kötőelemei alkotják. PAYNTER a csomópontok mellett, melyeket O-kötéseknek nevez, kötőelemeknek tekinti a hálózat hurkait: ezek a bondgráf 1-kötései.

A további fejlődés során az ideális kötőelemek száma további kettővel bővült; az ideális transzformátorral és a girátorral. A bondgráf koncepció fejlődésére jellemző az egyre következetesebb n -pólus szemlélet, valamint az ideális kötőelemek és a többi fizikai elem közti különbség elmosódása. Az utolsó lépés ezen a téren a C , I és ICI „terek” bevezetése; ROSENBERG [9].

Komoly előrelépés a bondgráf technika történetében az a felismerés, hogy a bondgráfot egyszerű módon alkalmassá lehet tenni a fizikai rendszer kauzális viszonyainak ábrázolására is, ami az új koncepciónak a rendszer matematikai leírásánál lényeges előnyt biztosít a konvencionális hálózati módszerrel szemben; KARNOPP és ROSENBERG [6–7].

A fejlődés során a bondgráf technika is bizonyos kompromisszumra kényszerült. Mivel egyes alkalmazásoknál az elemek kapcsolatát nem lehetett teljesítményáramokként értelmezni, ezek mellett megengedte az „információáramok” bevezetését. Ezzel azonban megbomlott a koncepció logikai egysége. Tanulmányunkban megmutatjuk, hogy információáramok bevezetése szükségtelen. Két teljesítményt nem igénylő fizikai elem, az NS és NI -nullor elemek bevezetésével lehetőség nyílik az információáramok kiküszöbölésére, sőt a bondgráfos reprezentáció alkalmazásának lényeges kiterjesztésére is.

A diszciplína módszertani fejlődésével párhuzamosan haladt alkalmazási körének kiszélesítésére [10]–[12]. Különös jelentőséget nyertek a nem-egyensúlyi termodinamika körébe tartozó alkalmazások. Ezekkel a kérdésekkel tanulmányunk későbbben megjelenő második része fog foglalkozni.

2. A bondgráf koncepció alapelvei

A bondgráf koncepció lényege legkönnyebben a fizikai hálózatok elméletén keresztül közelíthető meg. A fizikai hálózat a villamos hálózat általánosításával nyert olyan fogalmi konstrukció, amelynek elemei bizonyos alapfunkciókat látnak el, generálják, tárolják, disszipálják stb. a rendszer energiáit és a rendszerre jellemző kötésekön keresztül ezen energiákat egymással kicserélik, ill. átalakítják. Lazább megfogalmazásban azt is mondhatjuk, hogy a fizikai hálózat olyan villamos hálózat, melynek ágaiban villamos áramok helyett másfajta extenzív fizikai entitások folynak, mechanikai erők, folyadékáramok, hőáramok stb. Ezen általánosított áramok a hálózat elemein potenciáleséseket, „általánosított erőket” hoznak létre. Lényeges körülmény, hogy a fizikai

hálózat elemei által felvett vagy leadott W teljesítmény az elemre jellemző $f(t)$ áram és $e(t)$ erő szorzatával egyenlő*

$$W(t) = f(t) \cdot e(t). \quad (1)$$

A műszaki gyakorlatban leggyakrabban előforduló konjugált $f(t)$, $e(t)$ változópárok és szabványos jelölésük az 1. táblázatban van összeállítva.

A fizikai hálózatra érvényesek a Kirchhoff-féle törvények. Eszerint a hálózat csomópontjaiban az $f(t)$ áramok, a hurkaiban az $e(t)$ erők összege zérus. A hálózat viszonyainak meghatározásához ezenkívül rendelkezésre állanak az elemek „konstitutív relációi”, melyek megadják ezek áramai és erői közötti kapcsolatot.

1. táblázat

A fizikai hálózat erő- és áramváltozói

Folyamat	erő $e(t)$	áram $f(t)$
transzlációs mozgás	mechanikai erő $F(t)$	sebesség $V(t)$
rotációs mozgás	forgató nyomaték $\tau(t)$	szögsebesség $\omega(t)$
folyadék- vagy gázáramlás	nyomás $P(t)$	térfogatóáram $Q(t)$
villamos áramlás	vill. feszültség $e(t)$	villamos áram $i(t)$
hőáramlás	hőmérséklet $T(t)$	entrópiaáram $S(t)$
kémiai reakció	kémiai affinitás $A(t)$	mólszám $n(t)$

A fizikai rendszer hálózati sémájának birtokában viszonylag könnyen eljuthatunk ennek bondgráfjához. A hálózati séma átalakítása bondgráffá lényegében véve úgy történik, hogy ezt párhuzamos és soros kapcsolások kombinációjaként fogjuk fel. Ezután az így nyert részhálózatokat fogalmilag tovább bontjuk a tulajdonképpeni *fizikai elemekre* és a *kötési struktúrára* (junction structure). A kötési struktúrát a hálózat elemeként értelmezve a hálózat olyan gráfként ábrázolható, melynek csomópontjaiban a fizikai elemek és kötőelemek foglalnak helyet és amelynek ágai az ezek között folyó teljesítményáramokat ábrázolják.

A hálózati séma átalakításának egyes lépéseit az 1. ábrán szemléltetjük. Az ábrán levő E feszültség, ill. F áramforrásokból C_a , C_b kapacitásokból, valamint R_a és R_b ellenállásokból álló fizikai hálózat egyaránt értelmezhető villamos szűrőkörként, két sorbakapcsolt víztartályból álló hidraulikus rendszerként vagy egy fal hőfolyamatának sémájaként. A hálózatot soros és párhuzamos kapcsolások kombinációjaként fogva fel az 1b. ábrát nyerjük. Az egyes részhálózatokon belül a kapcsolási struktúrát szaggatott vonal jelöli. Mint

* Megj. A fizikai hálózatok elmélete „through” és „across” változókról beszél, a bondgráfokról szóló irodalom viszont a nem-egyensúlyi termodinamikában megszokott „flow” és „effort” fogalmakat használja.

látható, a hálózatban kétfajta kapcsolási struktúra (kötéselem) szerepel, melyeket szimbolikusan

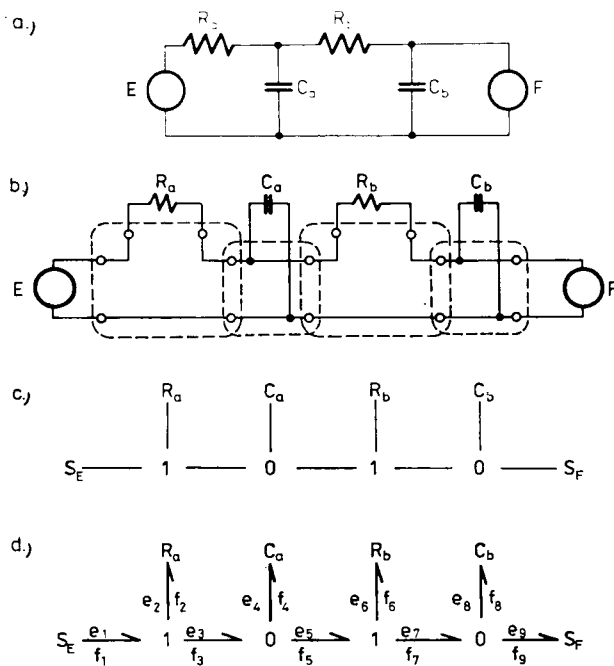
$$\begin{array}{c} | \\ - 1 - \end{array}, \text{ ill. } \begin{array}{c} | \\ - 0 - \end{array}$$

jelekkel jelölhetünk, melyek közül az első a soros, a második a párhuzamos kapcsolásnak felel meg.

Elhagyva az eredeti hálózat „összekötő vezetékeit” és az elemek és kötőelemek kapcsolatát pusztán a teljesítményáramokkal jelezve az 1c ábra adódik. Az utolsó lépés a teljesítményáramok (bondok) irányának megjelölése, amelyhez egy *félnyíl* \rightarrow szolgál. A teljesség kedvéért ezután a bondokat sorzámmal látjuk el, esetleg ráírjuk az 1. táblázat alapján a teljesítményáramhoz tartozó konjugált erő és áramváltozók egyezményes jeleit; ld. ábra.

Szükséges megjegyezni, hogy amennyiben az átalakítás során többszörös O -, ill. 1 -kötések adódnának, ezek egyetlen kötéssel helyettesíthetők. A valóságban a bondgráf megszerkesztésénél nem szükséges a vázolt eljárás minden lépését végigkövetni. A következőképpen járhatunk el: [13]

- a hálózati séma csomópontjait értelemszerűen O -pontnak tekintjük;
- az eredeti hálózat azon csomópontjainál, ahol ezeket valamilyen fizikai elem köti össze, a bondgráfba egy 1 -kötést iktatunk be, melyhez egy félnyállal a megfelelő elem azonosítóját illesztjük;



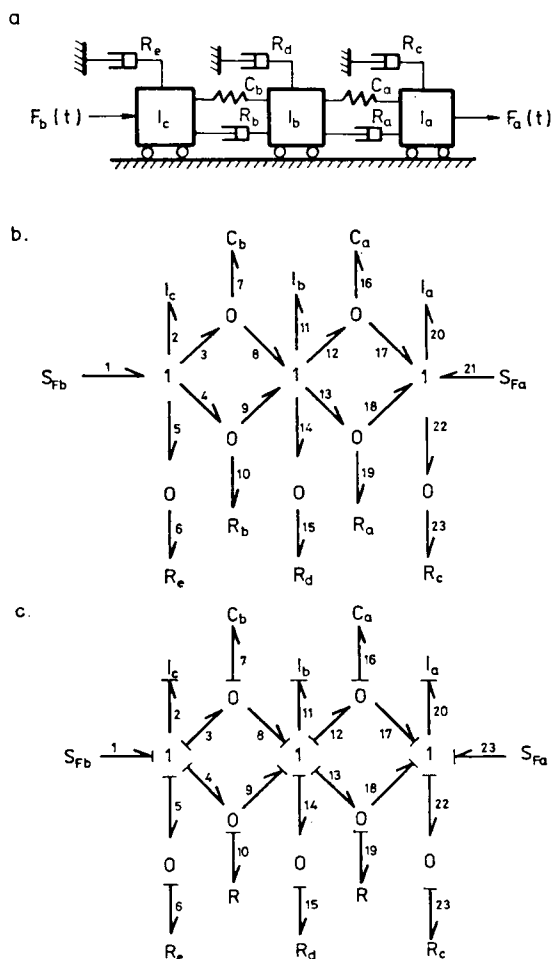
1. ábra

c) elhagyjuk az eredeti hálózat bázispontját;

d) a többszörös O , ill. I -kötések összevonásával egyszerűsítjük a bondgráfot.

Mi a helyzet a *nem* villamos rendszerek bondgráfjának megszerkesztésénél? Olyan rendszereknél, amelyek izomorf villamos hálózati modelljének megszerkesztése kézenfekvő, pl. a hidraulikus és termikus rendszereknél vagy ezek és a villamos rendszerek valamilyen kombinációjánál — ez a villamos modellel keresztül történhetik. A mechanikus rendszereknél célszerűbb a közvetlen út, annál is inkább, mert ezeknél a teljesítményáramok útja és a kötések jellege általában közvetlenül felismerhető.

A 2. és 3. ábrán egy mechanikus, ill. elektromechanikus rendszer bondgráfját mutatjuk be. Mindkettő közvetlenül, a két rendszer funkcionális (erő)

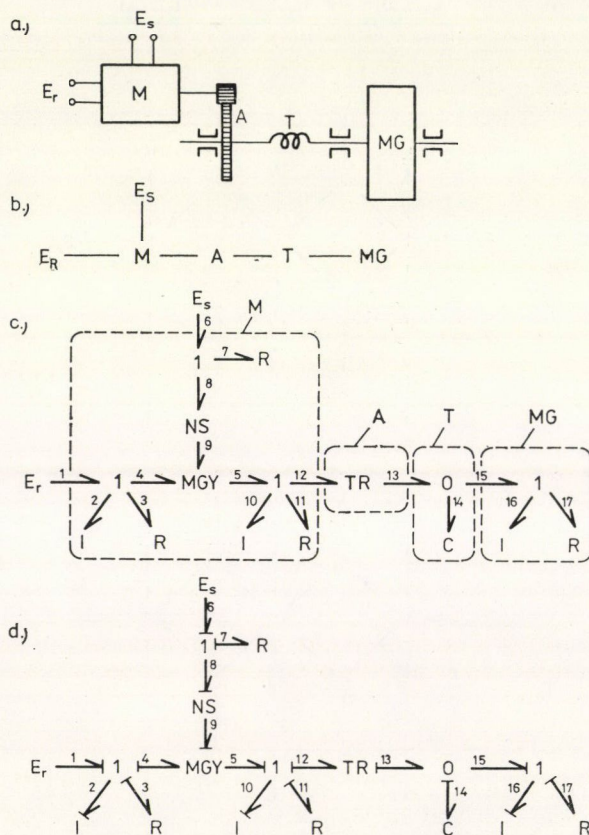


2. ábra

sémái alapján az erők és a sebességek kapcsolódásának ismeretében készült. Az előzőekben mondottak alapján a mechanikus rendszerben a közös sebességű elemek egy 1-kötésen keresztül, azon elemek, melyekre azonos erők hatnak, 0-kötésen keresztül kapcsolódnak.

A 2a. ábra egy három kocsiból álló villamos szerelvényt ábrázol. Az első és harmadik kocsi közvetlen meghajtású, amit az F_a , ill. F_b forráserők jelölnek. A kocsik tehetetlen tömege az I_a, I_b, I_c inerciákkal, menetellenállásuk az R_c, R_d, R_e ellenállásokkal van szimbolikusan jelölve. Az ütközők rugalmas erőhatásait a C_a, C_b kapacitások, csillapítását az R_a, R_b ellenállások szimbolizálják. A rendszer bondgráfját a 2b. ábra szemlélteti.

A 3a. ábra egy mellékáramú villamos motorral meghajtott munkagépet ábrázol. Leegyszerűsítve a berendezés a következő részekből áll: 3b. ábra: A statort és rotort gerjesztő E_s és E_r feszültségforrásokból, az M motorból, az A áttételtől, a T rugalmas tengelyből és az MG munkagépből. A rendszer bondgráfja ezen komponensek bondgráfjainak összekapcsolásával nyerhető, 3c. ábra. (A részek bondgráfjai az ábrán szaggatott vonallal vannak elválasztva.)



3. ábra

A motor által szolgáltatott forgató nyomaték lényegében véve a rotor áramával, a fordulatszám a rotor feszültségével arányos, ezért ez girátornak fogható fel. (Lásd a 3. táblázatban a girátor konstitutív relációit.) Mivel a viszonyokat a stator gerjesztő feszültsége is befolyásolja, a motort vezérelt (modulált) girátornak tekintjük (MGY). Figyelembe kell továbbá venni a rotor villamos induktivitását (I_2), villamos ellenállását (R_2), valamint ennek tehetetlen tömegét (I_{10}) és súrlódását (R_{11}). Az áttétel, melyet veszteségmentesnek tekintünk, ideális transzformátornak fogható fel. A rugalmas tengely mechanikus kapacitásnak tekinthető (C_{14}). A munkagép leegyszerűsítve az I_{16} tehetetlen tömeggel és az R_{17} súrlódással helyettesíthető.

Műszaki rendszerek bondgráf reprezentációjának számos érdekes példája található az irodalomban [7], [11], [12].

3. A bondgráf elemkészlete

A 2–4. táblázatokban összeállítottuk a bondgráfok standard elemkészletét. A táblázatok az elem megnevezésén és szimbólumán kívül tartalmazzák a definiáló konstitutív relációk általános kifejezéseit, valamint ezek speciális alakját lineáris esetben. A relációk változói és az $e(t)$ erők és $f(t)$ áramok, valamint ezek *nyomatékai*

$$p(t) = p(t_0) + \int_0^t e(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

$$q(t) = q(t_0) + \int_0^t f(\lambda) d\lambda. \quad (3)$$

2. táblázat

A bondgráf egy-kapu elemei

Elem	Jele	Jele kauzális alakban	Konstitutív relációja	Konstitutív reláció lineáris esetben
Erőforrás	$S_e \longrightarrow$	$S_e \longrightarrow $	$e(t) = E(t)$	
Áramforrás	$S_f \longrightarrow$	$S_f \longrightarrow$	$f(t) = F(t)$	
Kapacitás	$C \longleftarrow$	$C \longleftarrow $	$e = \Phi_C^{-1}(q)$	$e = 1/C \cdot q$
Inercia	$I \longleftarrow$	$I \longleftarrow$	$f = \Phi_I^{-1}(p)$	$f = 1/L \cdot p$
Ellenállás	$R \longleftarrow$	$R \longleftarrow $	$e = \Phi_R^{-1}(f)$	$e = R \cdot f$
		$R \longleftarrow$	$f = \Phi_R^{-1}(e)$	$f = R^{-1} \cdot e$

A konstitutív relációk a táblázatokban úgy az f , mint az e -re (ill. p és q változó-ra) explicit alakban szerepelnek. Az egyik vagy másik alak használata a bondgráf kauzális viszonyaitól függ.

A 2. táblázatban szereplő egy-kapu elemekhez: az áram és erőforráshoz, a kapacitáshoz, az inerciához (induktivitáshoz), az ellenálláshoz (disszipatív elemhez) kevés a hozzáfűzni való, hiszen ezek a fizikai rendszerek hálózatalmételében általánosan használatosak [3].

A két-kapu elemek közül a 3. táblázatban kettő szerepel a transzformátor (transducer) és a girátor.

3. táblázat
A bondgráf két-kapu elemei

Elem	Jele	Jele kauzális alakban	Konstitutív reláció
Ideális transzformátor*	$\xrightarrow{1} TR \xrightarrow{2}$	$\xrightarrow{1} TR \xrightarrow{2}$ $\xrightarrow{1} TR \xrightarrow{2}$	$e_1 = me_2$ $f_2 = mf_1$ $f_1 = f_2/m$ $e_2 = e_1/m$
Girátor*	$\xrightarrow{1} GY \xrightarrow{2}$	$\xrightarrow{1} GY \xrightarrow{2}$ $\xrightarrow{1} GY \xrightarrow{2}$	$e_1 = rf_2$ $e_2 = rf_1$ $f_1 = e_2/r$ $f_2 = e_1/r$
e-vezérelt-e-forrás	$\longrightarrow eSe \longrightarrow$	$\longrightarrow eSe \longrightarrow$	$f_1 = 0; \quad e_2 = \mu e_1$
f-vezérelt-f-forrás	$\longrightarrow fSf \longrightarrow$	$\longrightarrow fSf \longrightarrow$	$e_1 = 0; \quad f_2 = \alpha f_1$
e-vezérelt-f-forrás	$\longrightarrow eSf \longrightarrow$	$\longrightarrow eSf \longrightarrow$	$f_1 = 0; \quad f_2 = \gamma e_1$
f-vezérelt-e-forrás	$\longrightarrow fSe \longrightarrow$	$\longrightarrow fSe \longrightarrow$	$e_1 = 0; \quad e_2 = \varrho f_1$

A 3. táblázatban szereplő két-kapu elemek közül kettő, a transzformátor és girátor, veszteségmentes energiaátalakítók. A többi négy vezérelt — a vezérléshez teljesítményt nem igénylő, erő-, illetve áramforrások. Az utóbbiak jelentősége a továbbiakban tárgyalandó nullor-elemekkel kapcsolatos, melyek lehetővé teszik az információáram fogalmának a bondgráf koncepcióból való kiküszöbölését. A hat elem konstitutív relációiban szereplő m , r , μ , α , γ , ϱ arányossági tényezők (modulusok) lehetnek állandók vagy más rendszerváltozók függvényei. Mindenesetre a modulusok megváltoztatása (vezérlése) definíciószerűleg nem igényel teljesítményt.

Az n -kapuk közül a legfontosabbak a bondgráf technikában alapvető jelentőségű pszeudoelemek a O -kötés és az I -kötés; 4. táblázat. A O -kötésre az jellemző, hogy az összekötött ágak végpontjai azonos erőértéket vesznek fel, míg az ágaknak kielégítik Kirchhoff első törvényét

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n; \quad \sum_{i=1}^n f_i = 0. \quad (4)$$

* Megjegyzés: Az ideális transzformátort és girátort, amennyiben m , ill. r folytonosan változtatható MTR , ill. MGY -vel jelöljük (modulált transzformátor, ill. girátor).

4. táblázat
A bondgráf n -kapu elemei

Elem	Jele	Jel kauzális alakja	Konstitutív reláció
0 - kötés			$e_2 = e_1$ $e_n = e_1$ $f_1 = - \sum_{i=2}^n f_i$
1 - kötés			$f_2 = f_1$ $f_n = f_1$ $e_1 = - \sum_{i=2}^n e_i$
C - tér			$e_i = \phi_i (q_1, q_2, \dots, q_n)$ $i = 1, 2, \dots, n$
I - tér			$f_i = \phi_i (p_1, p_2, \dots, p_n)$ $i = 1, 2, \dots, n$
ICI - tér			$f_i = \phi_i (p, q)$ $e_j = \phi_j (q, p)$ $i, j = 1, 2, \dots, n$
R - tér			$e_i = \phi_i (f_1, f_2, \dots, f_n)$ $f_i = \phi_i^{-1} (e_1, e_2, \dots, e_n)$ $i = 1, 2, \dots, n$

Az elemek soros kapcsolását szimbolizáló 1-kötésnél az ágakamok egyenlő nagyságúak, az erők viszont kielégítik a 2. Kirchhoff-törvényt.

$$f_1 = f_2 = \dots = f_m; \sum_{i=1}^m e_i = 0. \quad (5)$$

A (4) és (5) a 0-kötés, ill. 1-kötés konstitutív relációi.

A 3. táblázatban szereplő további n -kapuk a C-tér (n -kapus kapacitás), az I-tér (n -kapus inercia), a kevert ICI-tér, valamint az R-tér. A C-tér független változói különböző q_i töltésmennyiségek, függő változói erők. Az I-tér azt az

esetet szimbolizálja, amikor a független változók különböző p_i nyomatékok, a függő változók pedig áramok. Az *ICI*-tér a két eset kombinációját jelenti, midőn a független változók között mind töltés, mind nyomaték jellegű változók előfordulnak.

Mint azt a 4. táblázat mutatja, az utóbbi négy n -kapun az a közös, hogy konstitutív relációk az e, f, p, q változók között fennálló (általában nem lineáris) egyenletrendszerek, vagyis implicit függvények alakjában vannak definiálva.

4. Teljesítményt nem közvetítő elemek

Bizonyos esetekben nem lehet a fizikai rendszerben fennálló összefüggéseket a felsorolt elemek közt fennálló energetikai kapcsolatként értelmezni. Ilyen esetek kezelésére a bondgráf technika (és még előtte a hálózatelmélet) ún. vezérelt (modulált) elemeket vezetett be. A teljesítményt nem hordozó kapcsolat — az információáram — a vezérelt elemek modulusainak értékét befolyásolja. A szóban forgó vezérelt elemek a 3. táblázatban voltak összefoglalva. Ezek a vezérelt erő, ill. áramforrás, valamint a vezérelt transzformátor és girátor.

A vezérelt elemek, ill. az információáramok jelölésére a teljes nyíl \rightarrow használatos. Egy egyszerű példa, két sorbakapcsolt víztartály esete, a 4a. ábrán van szemléltetve. Mivel az első tartályból kifolyó víz P_0 atmoszferikus nyomáson érkezik a másodikba, a két tartály viszonyainak összefüggését nem a $P_a \times Q_a$ teljesítmény, hanem csupán a Q_a áram biztosítja. A Q_a áram a rendszer bondgráfjában, mint a két tartály bondgráfjait összekötő *információáram* kerül jelölésre (teljes nyíllal); 4b. ábra.

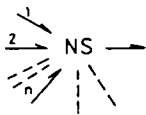


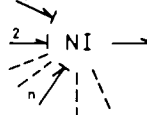
Az információáramok alkalmazásával kapcsolatban a szerző negatív álláspontot foglal el. Az információáramok bevezetése a teljesítményáramok mellett megbontja a bondgráf koncepció logikai egységét. Információáramokra nincs is szükség, amennyiben a bondgráf elemkészletébe bevesszük a *nullort*, mint fizikai elemet. Az ideális kötőelemekkel (0 és 1-kötés, transzformátor, girátor) szemben, melyek veszteségek nélkül teljesítményáramokat közvetítenek, a nullorok teljesítményt *nem közvetítő* elemek. A nullor egyik lehetséges realizációja az analóg számítástechnikában nagy szerepet játszó szummátor, ill. integrátor. A nullor általános esetben olyan ideális berendezés, amely a bemenő erő (potenciál) vagy áram bizonyos függvényét képezi anélkül, hogy teljesítményt venne fel, ill. adna le.

A nullor felvétele a bondgráf elemkészletébe még más jelentőséggel is bír. A bondgráfban szereplő információáramok általában csak globálisan szemléltetik a teljesítményt nem igénylő folyamatokat. Nullor elemek felhasználásával a bondgráf ezekről a folyamatokról is differenciáltabb képet képes nyújtani, mint azt e tanulmány második részében részletesebben kifejtjük.

Két nullorelemet vezetünk be az NS-nullort és az NI-nullort; lásd az 5. táblázatot.

5. táblázat

A bondgráf nullor-elemei

Elem	Jele	Jel kauzális alakja	Konstitutív reláció
NS - nullor			$e = \Phi_{NS} (e_1, e_2, \dots, e_n)$ $f_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, (n+1)$ Lineáris esetben $e = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ $f_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, (n+1)$
N - nullor			$e = \Phi_{NI} (p_1, p_2, \dots, p_n)$ $f_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, (n+1)$ Lineáris esetben $e = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n$ $f_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, (n+1)$

Mindkét nullor n -számú erő (potenciál) jellegű bemenettel és egyetlen erőjellegű kimenettel bír. Az NS-nullor jellegétől függően bármely

$$e = \Phi (e_1, e_2 \dots e_n) \quad (6)$$

statikus függvényt realizálhat. Lineáris esetben a (6) a

$$e = a_1 e_1 + a_2 e_2 \dots a_n e_n \quad (7)$$

alakot veszi fel. Ekkor az NS-nullor az analóg számítógép szummátorának szerepét tölti be.

Az NI-nullor lényegében az analóg gép szummátor-integrátorának általánosítása. Konstitutív relációja

$$e = \Phi_{NI} \left(\int e_1 dt, \int e_2 dt, \dots, \int e_n dt \right) = \Phi_{NI} (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

$$f_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

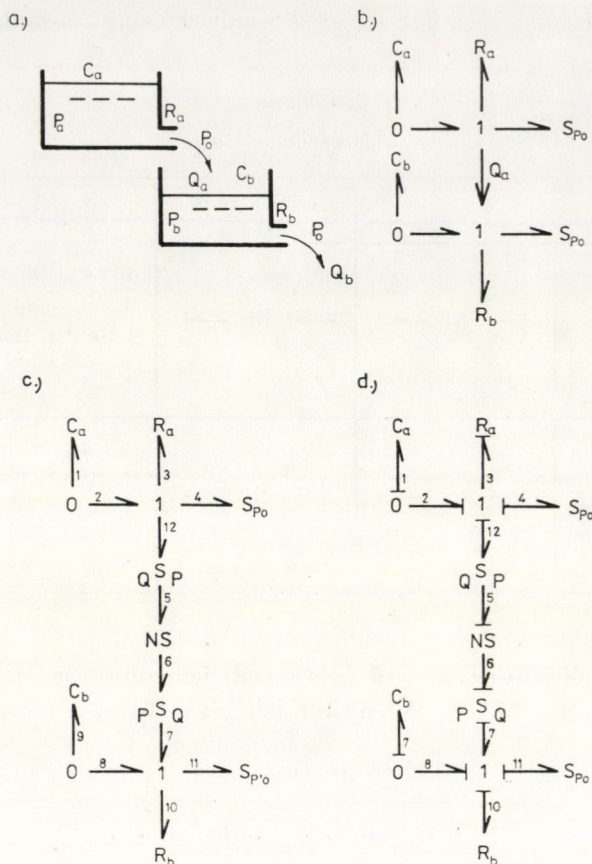
Lineáris esetben ez a

$$e = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n,$$

$$f_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

alakot veszi fel.

A 4b. ábrán levő bondgráfból egy NS-nullor és egy erő által vezérelt áramforrás segítségével az „információáram” kiküszöbölhető; (4c.-d. ábra).



4. ábra

Mint látható a „ Q_a ” információáramot egy $Q S_P$ áram vezérelt erőforrás, egy NS -nullor és egy $P S_Q$ „erő-vezérelt-áramforrás”-ból álló bond-lánccal helyettesítettük.

5. A kauzális bondgráf

A bondgráf koncepcióban lényeges szerepet játszik az ok-okozati összefüggések, a kauzalitás *irányának* kérdése. Kauzális bondgráf alatt olyan bondgráf értendő, melyről megállapítható, melyek az egyes elemek független, ill. függő változói.

A kauzalitás irányának ábrázolása a bondgráfnál az ún. kauzális vonással (causal stroke) történik. Amennyiben az A és B elemet összekötő bondon a kauzális vonás a B elem felé mutat

$$A \xrightarrow[e]{e} B \text{ vagy } A \xleftarrow[f]{e} B \quad (10)$$

a B független változója az e erő, ill. az A független változója az f áram. Amennyiben a kauzális vonás az A felé mutat,

$$A \left| \begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix} \right. \rightarrow B \text{ vagy } A \left| \begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix} \right. \leftarrow B, \quad (11)$$

az A független változója az e erő, a B -é az f áram. A (10) és (11)-ben vázolt mindkét esetben a kauzalitás iránya azonos: a kauzalitás iránya *nincs* összefüggésben a teljesítményáram irányával.

Az egy-kapu elemeknél a kauzalitás iránya meghatározza az elem konstitutív relációinak felírási módját és fordítva. Az e , ill. p változó által meghatározott elem, az „ e -kauzális elem”, konstitutív relációját az f -re explicit alakban kell megadni. Az f , ill. q által meghatározott „ f -kauzális elemnél” az e -re explicit alakban. Az egy-kapu elemek kauzális jelölése a 2. táblázat 3. oszlopában található.

Több megfontolást igényelnek a több-kapus elemek kauzális viszonyai; lásd a 3. táblázat 3. oszlopát. Így a transzformátornál elvben lehetséges 4 kauzális kombináció:

$$\begin{array}{cccc} \left| \rightarrow TR \right| \rightarrow; & \left| \rightarrow TR \right| \leftarrow; & \left| \leftarrow TR \right| \rightarrow; & \left| \leftarrow TR \right| \leftarrow \\ a) & b) & c) & d) \end{array} \quad (12)$$

közül a konstitutív relációkkal csakis az $a)$ és $c)$ kombináció fér össze.

A girátornál a lehetséges négy kombináció közül csakis a

$$\left| \rightarrow GY \right| \rightarrow; \quad \left| \leftarrow GY \right| \leftarrow \quad (13)$$

megengedett.

A O -kötésnél az egyetlen megengedett, a (4) relációkkal összeférő kauzális kombinációnál az összes bondok közül csak *egyetlen e -kauzális*. Az 1 -kötésnél csupán az az eset megengedett, amelynél *egyetlen f -kauzális* bond szerepel.

Szükséges megjegyezni, hogy az elemek kauzális alakjának két alternatívája fizikailag nem minden esetben egyenértékű. A lineáris kapacitás konstitutív relációjának két alakja

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{C} q = \frac{1}{C} \int f dt \\ q &= C \frac{de}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

közül az első az f -kauzális alakot előnyben kell részesíteni. Nyilvánvalóan a tartályban levő víz magasságát közvetlenebbül befolyásolhatjuk az f árammal, mint fordítva. Az inercia-elemnél ellenkező a helyzet. Mindkét esetben az ún.

integrális kauzalitásról van szó, mivel a függő változót a független változó integrálja határozza meg. Rendkívüli esetektől eltekintve, a konstitutív reláció integrális alakja előnyben részesítendő a differenciális alakkal szemben.

A lineáris ellenállás e - és f -kauzális alakja egyenértékű. Nem feltétlen ez a helyzet nem-lineáris ellenállásoknál, ahol előfordulhat, hogy a konstitutív reláció egyik alakja több értékű.

Felhasználva a mondottakat, az adott nem-kauzális bondgráfból a kauzális gráf a következő irányelvek szerint szerkeszthető meg. Először egy általános megjegyzés:

1. Az egyes bondokhoz a kauzális jelet lépésről lépésre rendeljük hozzá ügyelve arra, hogy ne kerüljünk ellentmondásba az egyes elemek 2., 3. és 4. táblázatokban szereplő kauzális jelöléseivel. Pl. a O -kötésnél csak egyetlen e -kauzális bond szerepelhet. Az I -kötésnél csupán egyetlen f -kauzális bond van megengedve. A kapacitásnál és a C -térnél csak a $a \mid C$, az inerciánál és az I -térnél csak $a \mid I$ kombináció megengedett.

Amennyiben a kauzális vonást nem sikerül a gráf minden bondjához a mondottak értelmében hozzárendelni, általában arra mutat, hogy a rendszermodell nem megfelelő, ill. kiegészítésre szorul.

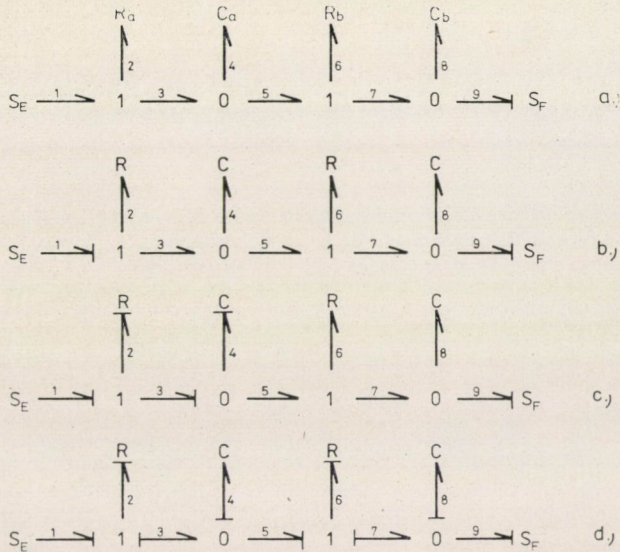
2. A kauzális jelet felvisszük az S_e , S_f forrásokhoz, valamint az NS és NI nullor elemekhez kapcsolódó bondokra.

3. A megjelölt bondokból kiindulva, elsősorban a O - és I -kötéshez, valamint a transzformátorokhoz és girátorokhoz kapcsolódó bondokat látjuk el — bizonyos sorrendiséget betartva — kauzális vonással. Ezt mindaddig folytatjuk, amíg ellentmondás nem mutatkozik.

4. Az ellentmondások feloldására az utolsó O , ill. I -kötésnél megpróbáljuk megváltoztatni az R -elemekhez kapcsolódó bondok kauzális irányát. Amennyiben ez nem elégséges, visszalépünk a sorban előtte levő kötőelemhez és megpróbálunk ennek jellegével és a hozzá kapcsolódó elemekkel kompatibilis kauzális struktúrát kialakítani. Ezután folytatjuk a 2.-ban vázolt eljárást.

5. Bizonyos esetekben az ellentmondások feloldására megfontolás tárgyát képezheti: a C , ill. I elemekhez kapcsolódó bondok kauzális irányának megváltoztatása. Ez azonban csak kivételnek tekintendő és csak a valóságos rendszer viszonyainak gondos mérlegelése alapján történhet.

A vázolt eljárást az 1d. ábrán levő bondgráfon mutatjuk be; 5. ábra. Az első lépésnek megfelelően kauzális vonással látjuk el az 1. és 9. bondokat (5b. ábra). A második lépésben az első I -kötés bondjának kauzális irányát jelöljük be, majd azután a O -kötéshez kapcsolódó bondokét; 5c. ábra. Itt meg kell állni, mivel a 4-es bond kauzalitásának iránya nem megengedett (differenciális kauzalitás!). A harmadik lépésben ezért visszamegyünk az első I -kötéshez és megváltoztatva a 2 bond kauzális irányát, megismételjük a második lépést, ami azután lehetővé teszi az összes fennmaradó bond kauzalitásának ellentmondásoktól mentes kijelölését (5d. ábra).



5. ábra

Kauzális bondgráfok szerkesztésének további példái a 2c., 3c. és 4d. ábrákon láthatók.

A kauzális bondgráf hű kifejezője a rendszer dinamikus viszonyainak, és mint ilyen, egyenértékű ennek matematikai leírásával. A bondgráf alapján a rendszer egyenleteit úgy nyerhetjük, hogy a 2–5. táblázatokat szótárként használva sorban felírjuk az elemek és kötélemek konstitutív relációit. Az így adódó primitív egyenletrendszer — mely numerikus számításokra általában kevésbé gazdaságos — megfelelő matematikai transzformációk útján azután az adott feladat természetének megfelelő (pl. állapotváltozós) alakra hozható.

IRODALOM

1. KRON, G.: Diacoptics. McDonald London, 1963
2. KÖNIG, H. E.—BLECKWELL, W. A.: Electromechanical System Theory McGraw Hill, New York, 1961
3. Mac FARLANE, A. G. I.: Dynamical System Models. Harrap, London, 1971
4. SINGER, D.: Fizikai hálózatok általánosítása és a technológiai folyamatok rendszerelmélete. Akadémiai doktori értekezés, Budapest, 1973
5. PAYNTER, H. M.: Analysis and Design of Engineering Systems. M. I. T. Press, Cambridge, Mass. 1961
6. KARNOPP, D.: Power-conserving Transformations. *I. Franklin Institute* **288**, (1969), 175–201
7. KARNOPP, D.—ROSENBERG, R. C.: Analysis and Simulation of Multiport-Systems. M. I. T. Press, Cambridge, Mass. 1968
8. BROWN, F. T.: Lagrangian Bond Graphs. *I. Dyn. Syst., Meas. Contr.*, 1972, pp. 213–221
9. ROSENBERG, R. C.: Multiport Models in Mechanics. *Trans. ASME* (1972), 206–212
10. KARNOPP, D.: Bond Graph Models for Fluid Dynamic Systems. *Trans. ASME* (1972), 222–229

11. POLDER, I. W.: Model of a Mechanical Transmission. „Physical Structure in Systems Theory”. (Edited by I. I. van Dixhorn and F. I. Evans. Academic Press, London, 1974, pp. 69—82
12. DIXHORN VAN I. I.: The Use of Network Graphs and Bond Graphs in 3D Mechanical Models of Motorcars. Ibid. pp. 83—110
13. PERELSON A. S.: Description of Electrical Networks Using Bond Graphs. *Circ. Theory A* 4, (1976), 107—123

” **Unified Bondgraph Representation of Dynamic Systems I.** — The paper gives a unified approach to the modelling of technical systems using the bond graph representation, and shows the visual advantages of this method. For the bond graph representation some new elements nullors are introduced, allowing the elimination of information flow, incompatible with the pure energetic aspect.

Einheitliche Behandlung von dynamischen Systemen mit Hilfe der Bondgraphtechnik I
Die Arbeit befaßt sich mit der Bondgraphmodellierung von technischen Systemen und zeigt die Vorteile der Methode bei der einheitlichen Behandlung dieser. Es werden neue Schaltelemente, Nullors zur Eliminierung von Informationsströmen eingeführt, welche die logische Geschlossenheit der Methode stören.

SZERKEZETEK SAJÁTFREKVENCIÁINAK KONTINUUM-MODELLT ALKALMAZÓ SZÁMÍTÁSA

BOSZNAY ÁDÁM*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1978. aug. 24.]

1. Bevezetés

A szerkezetek mechanikai számítása során újabban egyre inkább kontinuum-modelleket alkalmaznak. A következőkben olyan feladatokat tekintünk, amelyekben sajátfrekvenciák definiálhatók. Ismeretes, hogy ilyen esetekben a sajátfrekvenciák ismerete a szerkezet lehetséges mozgásainak és a mozgás során előálló mechanikai feszültségi állapotainak számítását megkönnyítheti; mindez mind a tranziens, mind a determinisztikus gerjesztés hatására előálló állandósult rezgésre vagy a sztohasztikus gerjesztés hatására kialakuló mozgásra egyaránt érvényes.

E dolgozat az ún. frekvencia-egyenletet (lásd 2. pont) nem igénylő sajátfrekvencia számítás néhány régebbi és újabb irányvonalát mutatja be. Elsősorban azokra a módszerekre tér ki, amelyek előírt számú — nemcsak egykét — sajátfrekvencia számítását teszik lehetővé, s amelyek az eljárás hibájára is adnak lehetőleg gyakorlatias felvilágosítást. Nem foglalkozik a dolgozat a számítás kivitelezése során előadódó numerikus természetű problémákkal, s azok megoldásával; igyekszik azonban ismeretes numerikus eljárásokra támaszkodni.

2. A klasszikus eljárás

Egyszerűbb alakú és/vagy egyszerűbb peremfeltételeknek alávetett kontinuumok — pl. homogén tömegeloszlású prizmatikus egyenes rudak; speciálisan változó keresztmetszetű egyenes rudak; speciális peremgörbájű, homogén tömegeloszlású, a peremen állandó feszültséggel előfeszített sík membránok; speciális peremgörbájű, homogén tömegeloszlású, állandó vastagságú sík lemezek; speciális alakú, (főként forgás-) héjak — vagy ilyenekből összeállított rendszerek esetében lehetséges a sajátfrekvenciákat definiáló zárt alakú egyenlet előállítás. Ez a rendszerint transzcendens egyenlet az ún. frekvencia-egyenlet. Ha ez rendelkezésünkre áll, szóba kerülhet az egyenlet gyökeinek numerikus úton, pl. léptetési technikával, Newton-módszerrel vagy ennek finomított, vagy kombinált alkalmazásával való meghatározása.

* Prof. Dr. Bosznay Ádám, 1111 Budapest, Goldmann György tér 3.

A sajátfrekvencia-számításnak ezt a módját nevezhetjük klasszikus eljárásnak. Ezzel az eljárással dolgozatunk — mint azt az 1. pontban említettük — nem foglalkozik. Az itt áttekintendő módszerek azonban ezekre — a klasszikus eljárással kezelhető — esetekre is alkalmazhatók.

3. Közvetlen finitizálás

A kontinuum-modellek megközelítő sajátfrekvencia-számításának egy kedvelt módszere abban áll, hogy valamilyen — lehetőleg egyszerű — utasítás alapján a megoszló tömeget pontszerű vagy merev testek alakjában egyes pontokba „koncentrálják”, de a modell egyéb jellemzőit nem változtatják. Ily módon véges sok szabadságfokú rendszerre jutunk; innét származik az e pont címében olvasható elnevezés.

Szokásos az is, hogy a fent leírt finitizálás mellett a modell rugalmas tulajdonságait is módosítják, pl. oly módon, hogy a modell rugalmas vázát egymással „rugók” segítségével összekapcsolt tömegtelen merev testekből felépítettnek veszik.

Ilyenféle finitizálást már RAYLEIGH ajánlott ([1], 1. kötet, 172. o.). A két rögzített pont között T erővel kifeszített, L hosszúságú, ρ hosszegységre eső állandó sűrűségű, transzverzálisan rezgő húrt úgy vezeti vissza finit modellre, hogy a húrt m számú egyenlő részre osztva minden rész tömegét két egyenlő részre bontja, és e tömegeket az egyes részek két végpontjára koncentrálja (1. ábra). Ily módon tömegtelen húrra erősített, $m-1$ szabadságfokú modellt nyer; a koncentrált tömegek $\rho L/m$, illetve $\rho L/2m$ nagyságúak. α_i -vel jelölve a kontinuum húr i -edik sajátfrekvenciáját, és α_{im} -el a helyettesítő finit modelét, RAYLEIGH szerint elegendő kis i/m -nél

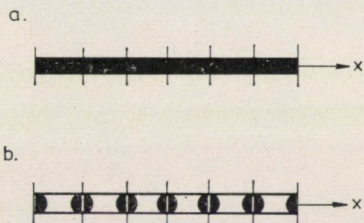
$$\frac{\alpha_i - \alpha_{im}}{\alpha_i} \approx \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{i}{m} \right)^2. \quad (1)$$

(1) bal oldala az ún. relatív frekvencia-hiba. α_{im} tehát alulról közelíti meg α_i -t elég kis i/m esetében. Ez az eredmény a bal oldali hányadosnak az $i/m = 0$ hely környezetében Taylor-sorba való fejtésével és a magasabb fokú tagok elhagyásával adódik.

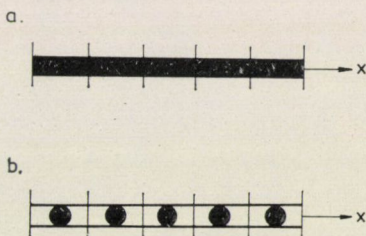
A fenti eredmény levezetésének jellegzetessége, hogy előzetesen explicite felírja mindkét modell i -edik sajátfrekvenciájának kifejezését. E levezetéstechnika tehát csak olyan esetre alkalmazható, amelyben ez lehetséges, vagyis erősen korlátozott.

Érdekes, hogy a kontinuum húr i -edik normálrezgési alakjának az osztáspontokban felvett értékei megegyeznek az így leszámaztatott finithez tartozó i -edik normálrezgési amplitúdókkal.

DUNCAN [2] egy másfajta, már LAGRANGE által felvetett finitizálást vizsgált az imént tárgyalt feladat kapcsán: egy-egy húrdarab tömegét a húrdarab felezőpontjába koncentrálja (2. ábra). Ez a koncentráció ugyanarra az eredményre vezet a vizsgált húrfeladatnál, mint a RAYLEIGH-féle, de m részre való osztás itt m szabadságfokú finit modellt szolgáltat.



1. ábra. Kontinuusnak modellezett, T erővel kifeszített, állandó sűrűségű húr (a.), és RAYLEIGH szerint finitizált alakja (b.)



2. ábra. Kontinuusnak modellezett, T erővel kifeszített, állandó sűrűségű húr (a.), és DUNCAN szerint finitizált alakja (b.)

A jól ismert analógia alapján a fent húrral kapcsolatban kimondott eredmények érvényesek két végén megfogott, egyenes, végig állandó fajlagos jellemzőkkel bíró rúd csavaró vagy longitudinális lengésével kapcsolatban is.

Hasonló levezetésttechnikával jutott eredményre LIVESLEY [3] a két végén csuklósan megfogott, egyenes, végig állandó fajlagos jellemzőkkel bíró rúd hajlítólengése kapcsán. Akár a RAYLEIGH, akár a DUNCAN-féle finitizálást alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\alpha_i - \alpha_{im}}{\alpha_i} \approx \frac{\pi^4}{1440} \left(\frac{i}{m} \right)^4. \quad (2)$$

Itt α_i a kontinuus modellnek, α_{im} az m számú mezőnyre való felosztás által keletkező finit modellnek az i -edik hajlítólengési sajátfrekvenciája, m számú rész ebben az esetben is $m-1$ szabadságfokú modellt ad a RAYLEIGH finitizálásnál, és m szabadságfokút a DUNCAN-félénél. (2)-ből kitűnik, hogy α_{im} alulról közelítő érték.

GLADWELL más kerületi feltételeknek eleget tevő, egyenes, a hosszuk mentén állandó fajlagos jellemzőkkel bíró rúd RAYLEIGH- és DUNCAN-féle finitizálásának hatását vizsgálta a hajlítólengési sajátfrekvenciákra [4]. Azt találta, hogy ha a rúd egyik vége sem szabad (hanem befogott, csuklós vagy csuszkával vezetett), mindkét finitizálásnál α_{im} alulról közelíti meg α_i -t, s az

$$\frac{\alpha_i - \alpha_{im}}{\alpha_i}$$

relatív hiba $1/m^4$ -el arányos.

Egyik vagy mindkét végén szabad rúd esetében a relatív hiba $1/m^2$ -el arányos; továbbá

$$\frac{\alpha_i - \alpha_{im \text{ DUNCAN}}}{\alpha_i} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_i - \alpha_{im \text{ RAYLEIGH}}}{\alpha_i}, \quad (3)$$

valamint, hogy ekkor is

$$\frac{\alpha_i - \alpha_{im \text{ RAYLEIGH}}}{\alpha_i} > 0.$$

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ilyen rúd esetében a RAYLEIGH-modell mindig alsó, a DUNCAN-modell pedig mindig felső frekvenciakorlátot ad. Megjegyzendő, hogy DUNCAN [2] dolgozatában tévesen pozitívnak vette a DUNCAN-finitizálással erre az esetre számított relatív hibát.

A fentieket áttekintve kitűnik, hogy a DUNCAN-féle finitizálás a peremfeltételektől függően hol alsó, hol felső frekvenciakorlátot nyújt; mindkét finitizálásnál csökken a relatív hiba a mezőnyszám növelésével, de az adott m -hez tartozó relatív hiba nagyságát a peremfeltételek is befolyásolják; valamennyi eddigi eredmény a hossza mentén állandó fajlagos jellemzőkkel bíró húrra, ill. egyenes rúdra érvényes csak.

Egyenes rúd síkbeli hajlítólengésével kapcsolatos sajátfrekvenciáinak megközelítő számításához szokásos a finit modellt rugalmas csuklókkal összekapcsolt merev, tömeggel bíró rudakból összeállítani. Ez is közvetlen finitizálásnak tekinthető. SCHAEFER [5] rámutatott arra, hogy e finitizálásfajta variációs feladat alakjában nem fogalmazható meg.

A közvetlen finitizálást szemléletessége és az egyenletek viszonylag könnyű felírhatósága miatt a gyakorlat erősen kedveli. Célszerűnek látszik ezért, hogy a fent felsorolt esetekben megmutatkozó, már ismertett hiányosságain kívül néhány további kedvezőtlen tulajdonságára is rámutassunk. Ezek a következők. A szemlélet alapján felvett finitizálásfajtaánál nem feltétlenül bizonyos, hogy a szabadságfokkal végtelen felé tartva az így kapott sajátfrekvenciák egyáltalában konvergálnak-e a kontinuos modell sajátfrekvenciáihoz. Numerikus kísérletekben olyan jelenség is előadódott, hogy a szabadságfok növelése során egyes sajátfrekvenciák felülről, mások alulról közeledtek a „pontos” értékekhez (SINGH [6]).

4. A Poincaré-Rayleigh—Ritz-féle finitizálás

Ez a jólismert finitizálásfajta matematikainak nevezhető, mert a vizsgált kontinuum-modell e sajátságait tükröző egyenlet(ek)ből indul ki, és annak matematikai kezelésével jut eredményre.

Tegyük fel, hogy az α körfrekvenciájú szinuszosan változóknak vett időfaktor leválasztásával az alábbi, csak a térbeli változóktól függő sajátérték-feladatra jutunk:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha^2\mathbf{B}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{K}\mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

\mathbf{A} és \mathbf{B} valós együtthatós lineáris differenciáloperátorok; \mathbf{A} a szerkezet rugalmas visszatérítő sajátságainak, \mathbf{B} a tehetetlenségi (tömeg-) hatásoknak felel meg; \mathbf{K} valós lineáris operáció: a homogén peremfeltételeket, illetve ha a szerkezetet több részből összekapcsoltnak tekintjük, akkor még az ugyancsak homogén illesztési feltételeket fejezi ki.

A (4) differenciálegyenlet rendszára a gyakorlati esetekben páros; $2r$ -el fogjuk jelölni. A perem- és illesztési feltételeket egyes esetekben fel lehet bontani ún. lényegessékre (amelyek legfeljebb $r-1$ -edrendű deriváltakat tartalmaznak) és dinamikaiakra (amelyek az r -edik és magasabb rendű deriváltakat tartalmazzák).

\mathbf{u} a keresett α^2 sajátértékhez tartozó valós elmozdulási amplitúdó mező függvény; ha a feladat úgy kívánja, \mathbf{u} oszlopvektor; ez esetben \mathbf{A} és \mathbf{B} mátrix operátorok, \mathbf{K} pedig mátrixos operáció. Feltesszük, hogy \mathbf{A} és \mathbf{B} önadjungált differenciáloperátorok, továbbá, hogy a $\mathbf{K}\mathbf{u} = 0$ feltételnek eleget tevő, elegendő sokszor differenciálható, és nem zérus \mathbf{u} -kra

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0, \quad (\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0. \quad (5)$$

A gömbölyű zárójel itt skaláris szorzást jelent az

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_T \mathbf{u}^* \mathbf{v} \, d\tau \quad (6)$$

formula szerint, ahol T a szerkezet által elfoglalt térbeli tartomány, és a $*$ transzponálást jelent.

Az operátorok önadjungáltságának feltevése mechanikai értelmezésben annak a feltevésnek felel meg, hogy a szerkezet egyes részei is, és a perem- és illesztési feltételeket létrehozó szerkezetek is olyanok, hogy egy periódusidő alatt sem energia-elnyelés, sem -betáplálás nem történik a szerkezetbe.

A tett feltevések biztosítják, hogy a (4) feladatnak végtelen sok, egyenként véges sokszorosságú pozitív sajátértéke van. Ezeket — mindegyiket annyiszor felírva, ahányszoros — az alábbi egyenlőtlenség-láncha rendezhetjük:

$$\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_v^2 \leq \dots \quad (7)$$

Az egyes sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényeket $u_1, u_2, \dots, u_\nu, \dots$ -vel jelölve érvényes, hogy

$$(\mathbf{A}u_i, u_j) = 0 \quad \text{és} \quad (\mathbf{B}u_i, u_j) = 0, \quad \text{ha } i \neq j,$$

azaz a különböző indexű sajátfüggvények mind az \mathbf{A} , mind a \mathbf{B} operátor közvetítésével általánosított értelemben ortogonálisak. Továbbá: a sajátfüggvények teljes rendszert alkotnak.

A jelen pont címében írt módszer klasszikus változatához úgy juthatunk el, hogy m számú, $2r$ -szer differenciálható, a peremfeltételeknek eleget tevő lineárisan független v_1, \dots, v_m valós függvényt választunk.

Az alábbi (8) egyenletre többféle megfontolással is eljuthatunk. Ebbe az áttekintésbe legjobban beleillőnek az alábbi megfontolás tűnik: képezzük a v_i ($i = 1, 2, \dots, m$) függvények által alkotott lineáris sokaságra vetítő \mathbf{P}_m projektor operátort, és ezzel (4) első egyenletéből kiindulva a

$$\mathbf{P}_m \mathbf{A} \mathbf{P}_m \mathbf{u} - \alpha^2 \mathbf{P}_m \mathbf{B} \mathbf{P}_m \mathbf{u} = 0$$

feladatra térünk át. E feladatnak sajátértékei lesznek a

$$\det [(\mathbf{A}v_i, v_j) - \alpha_{fm}^2 (\mathbf{B}v_i, v_j)] = 0 \quad (8)$$

egyenlet α_{fm}^2 -re vonatkozó megoldásai, továbbá az $\alpha^2 = 0$ érték.

A (8) egyenlet $\alpha_{fm1}^2, \dots, \alpha_{fmm}^2$ gyökei az eredeti feladat első m sajátértékének felső korlátai:

$$\alpha_v^2 \leq \alpha_{fmv}^2, \quad v = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Az m növelésével a korlátok nem romolhatnak:

$$\alpha_{f,m+1,v}^2 \leq \alpha_{fmv}^2, \quad v = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Ez a finitizálásfajta tehát javítható felső korlátokat ad az első m sajátfrekvenciára. Ha a szerkezet olyan, hogy az $\mathbf{A}u = 0$ egyenletnek van (a $\mathbf{K}u = 0$ -nak is eleget tevő) $u \neq 0$ megoldása, akkor (5) első egyenlete helyett

$$(\mathbf{A}u, u) \geq 0 \quad (5a)$$

áll fenn, azaz vannak olyan, a perem- és illesztési feltételeknek eleget tevő u vektorok, amelyekre az (5a) bal oldalán levő skalárszorzat zérus. Ez esetben a sajátértékek sorozatában a zérus is szerepel. Az $\mathbf{A}u = 0$ egyenlet $u \neq 0$ megoldása a zérus sajátértékhez tartozó valamelyik sajátfüggvény.

Az eddig e dolgozatban alkalmazott leírási mód alkalmazásakor, amelynek az a fő jellemzője, hogy u az elmozdulási amplitúdó mezőt jelenti, ez az eset akkor fordulhat elő, ha a perem- és illesztési feltételek megengedik a szerkezet merev test-, illetve merev testekből álló mechanizmusszerű elmozdulását úgy, hogy ez az elmozdulásmező nem hoz létre rugalmas visszatérítő hatásokat. Az e miatt előforduló zérus sajátérték sokszorossága ezért csak véges lehet.

Jelöljük a zérus sajátértékhez tartozó lineárisan független sajátfüggvényeket $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n}$ -el. Ha azt kívánjuk, hogy a jelen pontban tárgyalt Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálás zérus sajátérték(ek) létezése esetében is a zérustól különböző sajátértékekre adjon csak felső korlátot, akkor a v_1, \dots, v_m függvényeket úgy kell felvenni, hogy a már említett feltételeken kívül elégtésék még ki az

$$(\mathbf{A}u_{0i}, v_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$$

feltételeket is, azaz legyenek általános értelemben ortogonálisok a zérus sajátértékhez tartozó sajátfüggvényekre.

5. A véges elem módszer

LECKIE és LINDBERG [7] az alábbi célkitűzéssel jutott a ma már széles körben és sokkal tágabb célkitűzéssel alkalmazott véges elem eljáráshoz, ehhez a különleges finitizálási módszerhez. Homogén, prizmatikus egyenes rudat a síkbeli hajlítólengés sajátfrekvenciáinak meghatározása céljából úgy kívánt finitizálni, hogy az (1) bal oldala által definiált relatív frekvencia-hiba a szokásos egyszerű peremfeltételeknél, azoktól függetlenül a mezőnyszám negyedik hatványának reciprok értékével legyen arányos. Ezt a célt a 3. pontban írtak szerint sem a RAYLEIGH-, sem a DUNCAN-féle finitizálással nem lehet elérni. Igazolható, hogy nem érhető el ez a cél a 3. ábra szerinti, a közvetlen szemlélet alapján felvehető modellekkel sem.

A véges elem módszerrel kapcsolatos első olyan munkákban, amelyeknek célja sajátfrekvenciák meghatározása volt, a szerkezet tömegét a 3. pontban ismertetett közvetlen finitizálással a csomópontokra koncentrálták. Így járt el pl. ZIENKIEWICZ [8].

LECKIE és LINDBERG fent idézett dolgozata és ARCHER [9] ismerték fel először, hogy a közvetlen finitizálással ellentétben a véges elem módszerbe természetes módon beleillő ún. konzisztens tömegmátrix a sajátfrekvenciák sokkal jobb közelítését teszi lehetővé. A konzisztens tömegmátrixszal kapcsolatos gondolatok alkotó kifejtésével találkozunk még ez idő tájt ZIENKIEWICZ és CHEUNG-nál [10], ZURMÜHLNél [11], FALK-nál [12] és UHRIGNál [13].

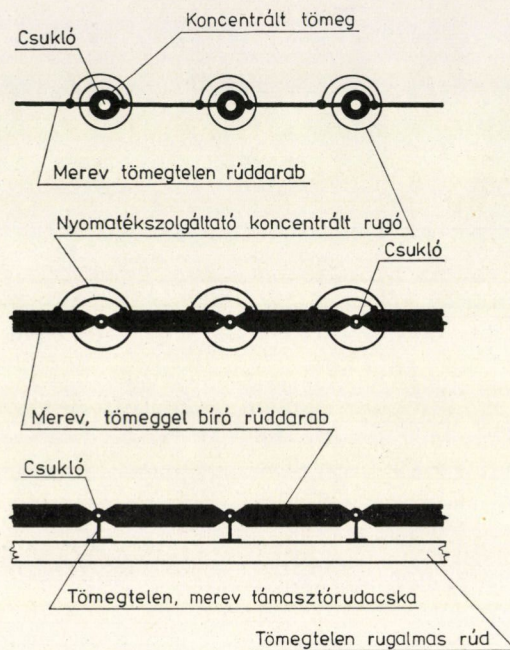
A véges elem módszer alkalmazása során — mint OLIVEIRA [14] kiemeli — három főtevékenységre van szükség:

a) a szerkezet által elfoglalt tartomány résztartományokra való felosztására,

b) az egyes résztartományokon a megengedett mechanikai mezők véges dimenziós sokaságának definiálására,

c) a résztartományok csatlakozásánál az egyes mechanikai mezőkre vonatkozó csatlakozási (illesztési) feltétel előírására.

Aszerint, hogy milyen előírást teszünk a b) és c) pontokban mondtakra, a véges elem módszer különböző módosulatait kapjuk. Figyelmünket a lehetséges módosulatok közül kettőre koncentráljuk, mert ezeknél az eredeti kontinuus modell sajátfrekvenciáira mindig egyoldali (felső) korlátot kapunk. A többi, eddig számon tartott módosulat — a hibrid, ill. a vegyes elemek,



3. ábra. Transzverzálisan rezgő rúd néhány, közvetlen finitizált alakja

gyűjtőnéven a nemkonform elemek néven ismertek — nem nyújt biztosítékot a sajátfrekvenciák egy oldalról való megközelítésére.

Az egyik ilyen — az ún. elmozdulás — módosulat (ez volt történetileg az első) az egyes résztartományokon belül elmozdulásmezőket definiál, és illesztési feltételekül az elmozdulások folytonosságát (kompatibilitását) írja elő.

A másik módosulat, amely áttekintésünk körébe esik, a FRAEIJIS DE VEUBEKE által kidolgozott [15] ún. egyensúlyi módosulat. Ez az egyes résztartományokon belül feszültségmezőket definiál, és az illesztéseknél egyensúlyi feltételek kielégítését írja elő.

A sajátfrekvenciák approximációja az elmozdulási módosulatnál e módszerrel is (8) típusú determináns-egyenletre vezet. Az eltérés a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizáláshoz képest a v_i függvények másféle felvételében áll. Az eltérések közül itt csak arra mutatunk rá, hogy — és ezt a feladat

variációs megfogalmazásának vizsgálatával lehet megindokolni — a v_i -ktől elegendő csak r -szeres differenciálhatóságot megkívánni, és a peremfeltételek közül elegendő csak az ún. lényegesek kielégítése. Ez a nagyon lényeges lehetőség a nem véges elem eljárás értelmezésű Poincaré—Rayleigh—Ritz módszer-nél is kiaknázható.

A (9) egyenlőtlenség ebben az esetben is fennáll; az elmozdulási módosulattal számolva is felülről közelítjük meg a sajátfrekvenciákat.

Az egyensúlyi módosulattal dolgozva ugyanannál a szerkezetnél, a közelítő sajátfrekvenciákat a (8)-hoz hasonlatos determináns-egyenlet szolgáltatja ugyan, most azonban mások lesznek a szereplő operátorok, mások a peremfeltételek, és más a jelentése az m számú lineárisan független, a v_i függvények helyébe lépő függvényeknek. Ez utóbbiak fizikai jelentése — mivel az egyensúlyi módosulat feszültségmezőkkel dolgozik — valójában feszültség, azonban célszerűbbnek látszott a feszültség tenzormezőt a vele egyértelmű kapcsolatba hozható impulzussűrűség tenzormezővel kifejezni (FRAEIJIS DE VEUBEKE, GERADIN, HUCK [16]).

E módosulattal dolgozva is előadódhatik, hogy a zérus is a sajátfrekvenciák közé tartozik. Ebben az esetben más ennek a körülménynek a fizikai jelentése, mint az elmozdulási módosulattal való dolgozaskor. Azt jelenti, hogy létezik olyan, nem azonosan zérus feszültségmező, amely aktív külső erők nélkül egyensúlyt tesz lehetővé. Ilyen feszültségmező csakis statikailag határozatlan szerkezeteknél létezhetik, de ilyenkor már végtelen sok a lineárisan független efféle mezők száma. Az egyensúlyi módosulattal dolgozva tehát statikailag határozatlan szerkezetnél lesz a zérus sajátfrekvencia, és multiplicitása végtelen (TABARROK [17]).

A kapott determináns-egyenlet megoldásai ebben az esetben is kielégítik a (9) egyenlőtlenségeket, tehát most is felső korlátok.

Egyes statikai feladatoknál — ugyanarra a kontinuum-modellre először az elmozdulási, majd az egyensúlyi módosulatot alkalmazva, azaz az ún. duális analízissel — sikerült a rugalmas elmozdulásokat alulról és felülről behatárolni (G. SANDER—B. FRAEIJIS DE VEUBEKE [18]). Részben erre alapozva kísérletek történtek sajátfrekvenciák kétoldali behatárolására is (M. GERADIN [19], B. TABARROK—R. L. SAKAGUCHI [20]).

E kísérletek statikailag határozatlan szerkezetekkel voltak kapcsolatosak. Ilyen szerkezetek sajátfrekvenciáit a véges elem módszer egyensúlyi módosulataival keresve — mint láttuk — a zérus végtelen multiplicitású sajátérték lesz.

A 4. pontban mondottak alapján tehát a finitizáláshoz használt függvényeknek általános értelemben ortogonálisaknak kell lenniük a zérus sajátértéknek megfelelő sajátfüggvényekre. Ez FRAEIJIS DE VEUBEKE és GERADIN egy megjegyzése [21] alapján megoldható annak ellenére, hogy e függvények megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. A már említett [19] és [20] dolgo-

zatok arról a numerikus tapasztalatról számolnak be, hogy elhagyva az ortogonalitás kielégítését, a máshonnet ismert sajátfrekvenciáknál kisebb számok — szerzők szerint alsó korlátok — adódnak. Szerzők a jelenség további elméleti vizsgálatát tartják szükségesnek.

A sajátértékek variációs megfogalmazásából következik, hogy az említett számértékek nem lehetnek a sajátfrekvenciák alsó korlátai, csak a sajátfrekvenciák felső korlátainak alsó korlátai. A véges elem módszernek ugyanis — mint láttuk — mindkét módosulata felső korlátot szolgáltat a zérustól különböző sajátértékekre zérus sajátfrekvencia létezése esetén, ha a finitizáláshoz szükséges függvények megfelelő ortogonalitási feltételeket elégítenek ki. Az ortogonalitási feltételek elhagyásával e függvények halmaza nő, a közelítő sajátértékek tehát csak csökkenhetnek, azaz a felső korlátokra adódnak alsó korlátok. A fent idézett numerikus kísérletek csak azt mutatják, hogy a vizsgált esetekben a felső korlátok alsó korlátai olyan kicsinyre adódtak, hogy már a pontos sajátértékek alá kerültek.

További dolgozatok is tettek kísérletet arra, hogy a véges elem módszerrel alsó korlátot nyerjenek a sajátfrekvenciák számára.

LINDBERG és OLSON [22] különböző peremfeltételeknek alávetett homogén, állandó vastagságú négyzet alakú lemez hajlító rezgéssel kapcsolatos sajátfrekvenciáit számolták. A lemez alakjának szabályosságát kihasználva a résztartományokat is szabályosan vehették fel, így mód volt az eljárás véges differenciaeljárásként való értelmezésére, és a „shifting” operátorok segítségével a közelítő frekvencia-egyenletnek zárt alakban való előállítására.

A véges elem módszer elmozdulási módosulatával — az előzőekben írtakkal összhangban — felső korlátokat kaptak. Egy nemkonformis elemtípussal több peremfeltétel esetében az ismert sajátfrekvenciáknál kisebb számértékeket kaptak, volt azonban olyan peremfeltétel, amelynél egyes sajátfrekvenciáknál nagyobb, másoknál kisebb számérték adódott. A nemkonformis elemekkel kapcsolatban — ugyancsak összhangban az előzőekben írtakkal — nem lehetett tehát egyoldali sajátfrekvencia megközelítést garantálni.

VENKATESWARA RAO, KRISHNA MURTY és KAMESWARA RAO [23] nemkonformis elemtípussal dolgozva a merevségi-, illetve a tömegmátrix szisztematikus perturbációját javasolja avégből, hogy két, olyan sajátértékfeladat sorozatot nyerjenek, amelyek egyike a sajátértékekhez felülről, a másika alulról konvergáló sajátértéksorozatokot szolgáltatasson. A javasolt módszer e tulajdonságait általános esetben még nem sikerült bebizonyítani. Az idézett dolgozat négy példát mutat be; az egyiknél a javasolt módszer akkor alkalmazható, ha előre ismerjük a kontinuum modell, továbbá a kontinuumból egy speciális közvetlen finitizálással leszármaztatott modell sajátértékeit megadó zárt formulát. A perturbációs paraméternek e példában számszerűen megadja az alsó, illetve a felső korlátokat eredményező tartományait. A másodiknál iteratív eljárás szükséges, amelynek során egy biztosan alsó korlátokat adó feladat-

ból kiindulva minden egyes lépésben numerikusan kell megoldani egy-egy sajátértékfeladatot, majd a megoldás ismeretében a feladatot meghatározott módon módosítani kell mindaddig, amíg numerikus „konvergenciát” nem tapasztalunk. Nem szerepel itt annak részletezése, hogy mi értendő e konvergencián, és hogy miként kell ennek fennállásáról meggyőződni, ha nem ismerjük előre a pontos sajátfrekvenciákat. A harmadik és negyedik (ez utóbbi nem lengéstani sajátértékfeladat) példában egy biztosan felső korlátokat adó sajátértékfeladathoz kiindulva kell ugyanolyan módon eljárni, mint a második példában; azok a megjegyzéseink, amit annak kapcsán tettünk, itt is érvényesek.

K. RAO, S. RAMAMURTHY, V. KRISHNA MURTY és V. RAO [24] dolgozatukban szélesebb feladatkörre terjesztik ki a [23]-ban bemutatott eljárást, és általánosabban alapozzák meg. A kiinduláshoz — nem szükségképpen a véges elem módszerrel előállított — monoton konvergencia közelítő sajátértéksorozatot kell ismerni minden keresett sajátértékhez. Szerzők a gyakorlatias próbálkozásnak olyan irányelveit adják meg, amelyekkel a finitizálási szabadságfokok egy tartományában a megközelítés hibáját csökkenteni lehetett. Ha pl. a kiinduláshoz használt monoton konvergencia sorozat felülről közelített, akkor e próbálkozással alulról való megközelítésre is át tudtak térni, és fordítva. Úgy tűnik azonban, hogy a közelítési hiba csökkenésének, ill. előjelének ellenőrzése csak a keresett „pontos” sajátfrekvencia előzetes ismeretében lehetséges.

A fenti eredmények alapján nem lehet tehát lezártnak és elég általánosnak tekinteni azokat a kísérleteket, amelyek kétoldali korlátokat kívánnak nyerni a véges elem módszerrel a sajátfrekvenciákra.

6. A közbenső operátoros módszer

A WEINSTEIN által bevezetett [25] és BAZLEY és FOX [26], valamint mások által továbbfejlesztett címbeli módszer abból indul ki, hogy az eredeti sajátértékfeladathoz sok esetben található olyan másik sajátértékfeladat (az ún. alapfeladat), amelynek sajátértékei az eredetieknek durva alsó korlátai, és amellet elég egyszerű ahhoz, hogy elegendő sok sajátérték és sajátvektora (sajátfüggvénye) numerikusan kiszámítható legyen. Az alapfeladathoz kiindulva az ún. közbenső feladatok egy sorozatát szerkesztik, úgy hogy az i -edik feladat sajátértéke se legyen kisebb, mint az $i-1$ -iké, de mégis maradjanak a sajátértékek kisebbek, mint az eredeti feladat megfelelő keresett sajátértékei. A közbenső feladatok megszerkesztésénél éppúgy projektoroperátorok játszanak szerepet, mint a Poincaré—Rayleigh—Ritz módszernél.

A közbenső feladatokat úgy alakítják ki, hogy elegendő sok sajátértéküket az alapfeladat sajátértékeiből ki lehessen számítani.

E sorok írója változó keresztmetszetű egyenes rudakból tetszés szerinti módon összetett, általános peremfeltételeknek eleget tevő rúdszerkezet rezgési sajátfrekvenciáit kívánta e módszerrel approximálni. Tekintetbe vette az egyes rudak longitudinális, két síkban végbemehető transzverzális és csavaró rezgéseit is (BOSZNAY [27], [28]).

A közbenső operátoros módszerrel e próbálkozás előtt egyetlen, egyszerű peremfeltételeknek alávetett egyenes rúd, valamint egyszerű peremgörbájű sík lemez és membrán kapcsán oldottak meg mechanikai rezgéstani területre eső sajátértékfeladatot.

Az említett szerkezetre való kiterjesztés részben azért jelentett bonyolultabb feladatot, mert ez a módszer egy-egy rúd többféle lengését is tekintetbe kívánta venni, részben a perem- és illesztési feltételek bonyolultabb volta miatt, továbbá azért is, mert a sajátfrekvenciák javítható felső korlátait is a közbenső operátoros módszerrel szándékozott meghatározni.

Az alapfeladatnak megfelelő szerkezet az eredeti szerkezettel azonos tartományt elfoglaló, megfelelően (másképpen a felső, és másképpen az alsó korlátok számításánál) megválasztott állandó keresztmetszetű rudakból áll; a perem- és illesztési feltételeket ugyanazok a szerkezetek valósítják meg, mint az eredeti rúdszerkezetnél.

Az alapfeladat sajátérték problémájának numerikus megoldásával jó szolgálatot tett CZEGLÉDI [29] dolgozata.

A közbenső operátoros módszer gyakorlati alkalmazásának további nehézségét, a (közbenső feladatok előállításához szükséges) projektor operátorok bázisainak BAZLEY-féle speciális megválasztását is sikerült megoldani, és explicit módszert adni [27], [28] ezek felvételére. Az eljárást számpélda illusztrálja [28].

7. Az ortogonális invariánsok módszere

TREFFTZ egy módszerét [30] továbbfejlesztve FICHERA [31] az eddig ismertettektől lényegesen eltérő, új módszert adott sajátfrekvenciák javítható alsó korlátainak számítására. Módszere olyan esetben alkalmazható, amelyben a (4)-beli operátorok olyanok, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ szigorúan pozitív kompakt operátor; a gyakorlati esetek többségében ez fennáll. FICHERANÁL \mathbf{B} az identitás operátor.

A javítható alsó korlátok számítására adott Fichera-féle formula használatához a sajátfrekvenciák javítható felső korlátait kell ismerni, továbbá $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ -t, az $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ operátorhoz rendelhető s -ed rendű, n -ed fokú ortogonális invariánst. Ez utóbbit nem lehetséges általában esetünkben zárt formulával kifejezni, approximálni kell tehát. FICHERA formulájának sajátfrekvencia alsó korlát adó tulajdonságát bizonyosan csak akkor nem rontjuk el, ha $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ -t felülről közelítjük.

ROMANO [35] prizmatikus rudakból álló keretekre alkalmazta FICHERA elméletét; ebben az esetben $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ explicite előállítható.

STUMPF [32]-ben módszert adott $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ felülről történő megközelítésére. Módszere azt igényli, hogy az eredeti szerkezethez hozzárendelt végtelen kiterjedésű szerkezet Kelvin-állapotához rendelt feszültségfüggvényt explicite, előre ismerjük. Speciális esetekben — mint pl. az állandó vastagságú, homogén lemeznél — az egyértelmű hozzárendelés lehetősége fennáll, és a szükséges feszültségfüggvény is ismeretes. Változó vastagságú vagy inhomogén lemezhez nem tudjuk, hogy milyen vastagságú és inhomogenitású végtelen kiterjedésű lemezt kell hozzárendelni, de ettől függetlenül sem ismeretes már a szükséges feszültségfüggvény. Rúdszerkezet vagy lemezszerkezet esetében ugyancsak nem világos, hogy mit értsünk az ehhez hozzárendelt végtelen kiterjedésű szerkezeten.

FICHERA [33] $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ felülről való megközelítését arra az esetre oldja meg, amelyben \mathbf{B} az identitás-operátor, és az eredeti (változó együtthatós \mathbf{A} operátorral leírható) szerkezethez egy olyan másikat lehet hozzárendelni, amelyikről tudjuk, hogy a hozzátartozó ortogonális invariáns a keresetnek durva felső korlátja, továbbá a hozzárendelt szerkezet Green-féle függvénye (illetve mátrixa) explicite ismeretes.

E sorok írója (BOSZNAY [34]) FICHERA [33] elméletét olyan szerkezetekre alkalmazta, amelyeknél \mathbf{A} változó együtthatós differenciáloperátor és \mathbf{B} változó együtthatós szorzó operátor.

A gyakorlatban annyira összetett szerkezetekkel is találkozunk, amelyeknél nem sikerül az eredeti szerkezethez olyat hozzárendelni, amelyet FICHERA imént említett [33] elmélete megkíván. Az ilyen esetekre alkalmazható jelen sorok írójának elgondolása (BOSZNAY [36]). Az elgondolás további részletezését szerző másutt is kifejtette (BOSZNAY [37]).

A [36] és [37] szerinti elmélet első lépésben [33]-hoz hasonlóan olyan szerkezetet rendel hozzá az eredetihez, amelyikről tudjuk, hogy a hozzá tartozó ortogonális invariáns a keresetnek durva felső korlátja. Feltesszük, hogy ez a hozzárendelt szerkezet olyan bonyolult, hogy a megfelelő Green-függvények nem adhatók meg explicite.

Jelöljük a hozzárendelt szerkezet megfelelő operátorait \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 , illetve \mathbf{K}_0 -val. \mathbf{A}_0 állandó együtthatós, pozitív differenciáloperátor, \mathbf{B}_0 állandó elemű, pozitív szorzó operátor; az $\mathbf{A}-\mathbf{A}_0$ és a $\mathbf{B}_0-\mathbf{B}$ operátorkülönbségeknek pozitívaknak kell lenniük, továbbá $D(\mathbf{A}_0) \subset D(\mathbf{A})$ és $T_0 = T$ kell, hogy fennálljon. T_0 annak a térbeli tartománynak a jele, amelyet a hozzárendelt szerkezet elfoglal. Az \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 és \mathbf{K}_0 operátorok a Poincaré-féle minimax elv és a közvetlen szemlélet alapján határozhatók meg.

Az említett kiindulás szerint

$$I_s^n(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{B}_0) > I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}), \quad (11)$$

azonban a legutóbb a Green-függvények meg nem adhatóságára tett feltevésünkől az következik, hogy (11) bal oldala nem számítható ki zárt alakban.

E nehézség megkerülésére (11) bal oldalát egy „kissé” még tovább növeljük. A növeléshez az explicite nem ismert \mathbf{A}_0^{-1} helyett egy másik, $\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}$ -el jelölt operátort vezetünk be úgy, hogy

$$(\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{r}) \geq (\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{r}) \quad (12)$$

legyen. (12)-nek az a következménye, hogy

$$I_s^n(\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}\mathbf{B}_0) \geq I_s^n(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{B}_0).$$

(12) kielégítését úgy segítjük elő, hogy $\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}$ -et a \mathbf{H}_0 Green-féle maggal állítjuk elő

$$\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}\mathbf{r} = \int_T \tilde{\mathbf{H}}_0(\tau, \tau_1)\mathbf{r}(\tau_1)d\tau_1$$

alakban, és így $\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}$ meghatározását $\tilde{\mathbf{H}}_0$ meghatározására vezetjük vissza.

$\tilde{\mathbf{H}}_0$ meghatározásának bemutatása céljából gondoljuk meg, hogy $\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}$ úgy értelmezhető, mint az $\mathbf{A}_0\mathbf{u} = \mathbf{r}$ statikai feladat közelítő megoldását szolgáló inverz operátor. (Ha pl. ez a közelítő megoldás véges elem módszer, akkor $\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}$ felépítésében impliciten benne van az elemképzés módja és az elemek közötti kapcsolat előírása.) Olyan közelítő megoldást kell választani, amellyel (12) kielégíthető megfelelő \mathbf{r} tartományon.

(12) bal oldala a közelítő megoldáshoz rendelt közelítő szerkezetben, jobb oldala az eredeti szerkezethez a mondottak szerint hozzárendelt szerkezetben felhalmozott alakváltozási energia kétszerese. Ha $\tilde{\mathbf{H}}_0$ -t (és így $\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}$ -et) az eredeti szerkezethez rendelt szerkezeten a véges elem módszer egyensúlyi módosulatának megfelelően számítjuk, akkor a (12)-vel előírt majorizálás az alakváltozási energiára érvényes felső korlát tétel (GURTIN [38]) alapján automatikusan kielégül.

$I_s^n(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{B}_0)$ -hoz hasonlóan $I_s^n(\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}\mathbf{B}_0)$ sem számítható ki zárt alakban, ezért $I_s^n(\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}\mathbf{B}_0)$ és $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ közé a k_1 és k_2 természetes számoktól függő

$$I_s^n(\mathbf{A}_{k_1}^{-1}\mathbf{B}_{k_2})$$

ún. közbenső ortogonális invariánsokat szerkesztjük.

E szerkesztés FICHERA tételei [31], [33] alapján az ún. Aronszajn-féle közbenső operátorokkal történhetik. A szerkesztés olyan, hogy a közbenső ortogonális invariánsok zárt alakban kiszámíthatók.

Ily módon lehetőségessé vált a véges elem módszer segítségével alsó saját-frekvencia korlátok számítása is. Azokhoz az 5. pontban említett régebbi kísérletekhez képest, amelyek az egyensúlyi módosulattal közvetlenül szerettek

volna alsó korlátokat kapni, ez a megoldás bizonyos kerülőutat jelent ugyan, viszont az eredmények biztos alsó korlátok. A közvetlen véges elem eljáráshoz képest az a hátrány mutatkozik, hogy itt a szereplő operátorokra is szükség van.

A jövőben érdemesnek tűnik erőfeszítéseket tenni arra, hogy a jelen pontban ismertetett módszerhez olyan speciális és általánosabb programokat tervezzünk, amelyek szélesebb körű gépi számítást tesznek lehetővé.

IRODALOM

1. RAYLEIGH, Lord: The Theory of Sound. 2nd. ed. Mac Millan, London 1894
2. DUNCAN, W. J.: A Critical Examination of the Representation of Massive and Elastic Bodies by Rigid Masses Elastically Connected. *The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math.* 5 (1952), 97—108
3. LIVESLEY, R. K.: The Equivalence of Continuous and Discrete Mass Distribution in Certain Vibration Problems. *The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math.* 8 (1955), 353—360
4. GLADWELL, G. M. L.: The Approximation of Uniform Beams in Transverse Vibration by Sets of Masses Elastically Connected. *Proceedings 4th Nat. Congr. Appl. Mech., American Society of Mechanical Engineers* 1962, 169—176
5. SCHAEFER, H.: Diskontinuierliche Rechenmethoden bei Randwertproblemen. *Monatshefte für Math.* 66 (1962), 252—264
6. SINGH, G. D.: Matrix Solution for Vibration of Machine Structures. *I. E. (I) Journal-ME.* 52 (1972), 257—262
7. LECKIE, F. A.—LINDBERG, G. M.: The Effect of Lumped Parameters on Beam Frequencies. *The Aeronautical Quarterly*, 14 (1963), 224—240
8. ZIENKIEWICZ, O. C.: Finite Element Procedures in the Solution of Plate and Shell Problems. O. C. ZIENKIEWICZ—G. S. HOLISTER (editors): Stress Analysis — Recent Development in Numerical and Experimental Methods. John Wiley and Sons Ltd., London New York Sydney 1965
9. ARCHER, J. S.: Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems. *J. Struct. Div. Proc. ASCE* 89 (1963), 161—178
10. ZIENKIEWICZ, O. C.—CHEUNG, Y. K.: The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs. *Proc. Inst. Civ. Eng.* 28 (1964), 471—488
11. ZURMÜHL: Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen nach der Deformations-methode. *Ing. Arch.* 32 (1963), 201—213
12. FALK, S.: Das Verfahren von RAYLEIGH—RITZ mit hermiteschen Interpolationspolynomen. *Z. für ang. Math. und Mech.* 43 (1963), 149—166
13. UHRIG, R.: Finite Berechnung von Schwingern mit kontinuierlich verteilter Masse und Nachgiebigkeit. *Ing. Arch.* 34 (1965), 95—108
14. de ARANTES e OLIVEIRA, E. R.: Foundations of the Mathematical Theory of Structures. CISM Courses and Lectures No. 121. International Centre for Mech. Scienc. Springer Verlag, Wien New York 1975
15. FRAEIJIS de VEUBEKE, B.: Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis. AGARDO graph 72. A Pergamon Press Book, The Mac Millan Company, New York 1964. 165—201
16. FRAEIJIS de VEUBEKE, B.—GERADIN, M.—HUCK, A.: Structural Dynamics. CISM lecture. Udine 1972
17. TABARROK, B.: Some Remarks on the Zero Frequency Modes. *The Aeronautical J.* 72 (1968), 68—70
18. SANDER, G.—FRAEIJIS de VEUBEKE, B.: Upper and Lower Bounds to Structural Deformations by Dual Analysis in Finite Elements. *Air Force Flight Dynamics Laboratory Technical Report AFFDL—TR—66—199*. Wright Patterson Air Force Base, Ohio 1967.
19. GERADIN, M.: Computational Efficiency of Equilibrium Models in Eigenvalue Analysis. IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures. Les Congres et Colloques de l'Universite de Liège. 61 (editor: B. FRAEIJIS de VEUBEKE).
20. TABARROK, B.—SAKAGUCHI, R. L.: Calculations of Plate Frequencies from Complementary Energy Formulation. *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, 2 (1970), 283—293

21. FRAEIJIS de VEUBEKE, B.—GERADIN, M.: Structural Dynamics. 3. Eigenvalue analysis. CISM, Udine 1972.
22. LINDBERG, G. M.—OLSON, M. D.: Convergence Studies of Eigenvalue Solutions Using two Finite Plate Bending Elements. *Int. J. for Num. Methods in Engineering*. 2 (1970), 99—116
23. VENKATESWARA RAO, G.—KRISHNA MURTY, A. V.—RAO, A. K.: Bounds for Eigenvalues in Some Vibration and Stability Problems. *Int. J. for Num. Methods in Engineering*. 5 (1972), 237—242
24. RAO, A. K.—RAMAMURTHY, T. S.—KRISHNA MURTY, A. V.—RAO, G. V.: Bound and Error Control for Eigenvalues. Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis. *Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis*. (Editors: Y. Yamada—R. H. Gallagher), 305—322
25. WEISTEIN, A.: Sur la stabilité des plaques encastrées. *C. R. Acad. Sci. Paris*. 200 (1935), 107—109
26. BAZLEY, N.—FOX, D. W.: Methods for Lower Bounds to Frequencies of Continuous Elastic Systems. *J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP)* 17 (1966), 1—37
27. BOSZNAY, Á.: Algebraic Eigenvalue Problems Bracketing Eigenfrequencies of Structures Consisting of Rods of Varying Cross Section. Lecture 13th Congress IUTAM. Moscow, 21—26 Aug. 1972
28. BOSZNAY, Á.: Improvable Bracketing of the Eigenfrequencies of a Space Frame Structure Consisting of Rods with Varying Cross Section. Part I, II, III. *Acta Techn. Hung.* 83 (1976), 31—48, 187—203, 393—399
29. CZEGLÉDI, GY.: Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenzen von Stabwerken. *Periodica Polytechnica, Electrical Eng.* 18 (1974), 191—202
30. TREFFTZ, E.: Über Fehlerschätzung bei Berechnung von Eigenwerten. *Math. Annalen*. 108 (1933), 595—602
31. FICHERA, G.: Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems. Lecture Notes in Math. 8. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1965.
32. STUMPF, H.: Zum Eigenwertschrankenverfahren nach TREFFTZ-FICHERA. *Revue Roum. Sci. Techn. Mech. Appl.* 16 (1971), 1033—1047
33. FICHERA, G.: Upper Bounds for Orthogonal Invariants of Some Positive Linear Operators. *Rendiconti Istituto Matematico Università Trieste*. 1 (1965), 1—8
34. BOSZNAY, Á.: Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Structures by FICHERA's Theory of Orthogonal Invariants. 14th IUTAM Congress. Delft 1976
35. ROMANO, M.: Upper and Lower Bounds to the Eigenfrequencies of Elastic Frames. *Meccanica*. 10 (1975), 203—209
36. BOSZNAY, Á.: Lower Bounds for Eigenfrequencies by the Finite Element Method. *Proceedings 3d Bulgarian Nat. Conf. on Theor. and Appl. Mech.* Varna 13—18 Sept. 1977, 13—18
37. BOSZNAY, Á.: Untere Schranken für die Eigenfrequenzen kontinuierlicher Systeme mittels der Methode der finiten Elemente. Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik und der Strömungslehre. Technische Universität Wien Nov. 1977
38. GURTIN, M. E.: The Linear Theory of Elasticity. S. FLÜGGE (chief editor): *Encyclopedia of Physics*, Vol. VIa/2. Mechanics of Solids II./C. Truesdell editor) Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1972

Computation of Eigenfrequencies Using Continuum-models. — Older and newer methods for computation of eigenfrequencies of continuum-models — without using the frequency equation — are summarized. Mainly methods enabling approximation of a prescribed number of eigenfrequencies and giving a practicable error estimation are treated in the paper. Relevant results of the Research Group for Technical Mechanics of the Hungarian Academy of Sciences are included too.

Berechnung der Eigenfrequenzen von Konstruktionen mit Kontinuumsmodellen. — Ältere und neuere Methoden zur Berechnung der Eigenfrequenzen — ohne Benutzung der Frequenzgleichung — von Kontinuums-Modellen werden zusammengefaßt. Hauptsächlich diejenigen Methoden werden behandelt, die die Approximation von einer vorgeschriebenen Zahl von Eigenfrequenzen ermöglichen, und auch eine praktische Fehlerschätzung geben. Diesbezügliche Arbeiten der Forschungsgruppe für Technische Mechanik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften wurden auch hineingezogen.

SZILÁRD SZEMCSÉK MOZGÁS TÖRVÉNYEI CENTRIFUGÁLIS ERŐTÉR BEN*

PETHŐ SZILVESZTER**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1977. szept. 10.]

A tanulmányban a Stokes-féle közegellenállás érvényessége esetén a centrifugális erőterben mozgó szilárd szemcsék foronómiai függvényeit lehet megtalálni. FINKEJ professzor által bevezetett jelöléseket alkalmazva, a foronómiai függvényeknek a centrifugális erőter és a szilárd szemcse alapvető paramétereivel való kapcsolatát jól meg lehet állapítani.

Folyamatos üzemű centrifuga szilárd szemcséinek mozgás törvényeinek tanulmányozásához az 1. ábra nyújt segítséget. A centrifuga n fordulatszámú, így ω szögsebessége is állandó. Az igen nagy fordulatszám következtében a szemekre ható centrifugális erő a nehézségi erőnél nagyságrendekkel nagyobb, így a nehézségi erőt nem is szükséges figyelembe venni. A zagy bevezetése a centrifugába R_1 sugáron történik, a centrifuga külső sugara R_2 .

A centrifugára általában igen finom szemű anyag kerül feladásra, ezért a Stokes-féle közegellenállást veszik figyelembe. Így a centrifugában t időpillanatban v sebességgel sugár irányban mozgó m tömegű, x nagyságú szemcsére ható mdv/dt gyorsító erő a következő:

$$m \frac{dv}{dt} = mR\omega^2 - kxv: \quad R_1 \leq R \leq R_2. \quad (1)$$

A differenciálegyenletben k a közegellenállási tényező. Az egyenletet differenciálva, $dR/dt = v$ figyelembevételével

$$mv'' + kxv' - m\omega^2v = 0. \quad (2)$$

Az ilyen típusú differenciálegyenlet megoldásakor a v függvényt a t független változó exponenciális függvényeként a következő formában írják fel:

$$v = e^{\lambda t}. \quad (3)$$

A kitevőben λ állandót jelent. Ezt az egyenletet ill. ennek első és második differenciál-hányadosát (2)-be helyettesítve, az állandó értéke meghatározható.

* Az MTA Műszaki Mechanikai Bizottságához beterjesztett jelentés első részének rövidített szövege.

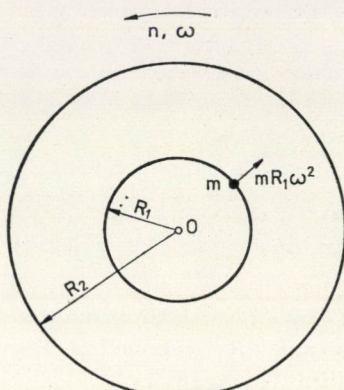
** Prof. Dr. Pethő Szilveszter, Miskolc-Egyetemváros Ásványelőkészítési Tanszék.

A függvény első és második differenciálhányadosa

$$v' = \lambda e^{\lambda t} \quad \text{és} \quad v'' = \lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (4)$$

Így a (2) egyenlet az

$$m\lambda^2 + kx\lambda - m\omega^2 = 0 \quad (5)$$



1. ábra

alakot vesz fel. Ez az egyenlet λ -ra megoldható, mivel másodfokú egyenletről van szó:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-kx \pm \sqrt{(kx)^2 + 4m^2\omega^2}}{2m} \quad (6)$$

A v sebesség

$$v = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (7)$$

Itt C_1 és C_2 integrálási állandókat jelentenek. Mivel $t = 0$ -nál $v = 0$, ezért $C_2 = -C_1$ és

$$v = C_1 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (8)$$

A C_1 állandó meghatározása érdekében sebességgel kapcsolatos további peremfeltétel nem ismeretes. Viszont a függvényt differenciálva, a kezdő gyorsulás ismeretében használható peremfeltételt lehet megadni:

$$a = \frac{dv}{dt} = C_1 (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}) \quad (9)$$

$t = 0$ esetében $a = R_1 \omega^2$, így

$$C_1 = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (10)$$

Ezért a pillanatnyi v sebesség és az a gyorsulás:

$$v = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \quad (11)$$

és

$$a = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (12)$$

A t ideig megtett s út a következő:

$$s = \int_0^t v dt = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} + C_3 \right). \quad (13)$$

A C_3 állandó meghatározásához szükséges határfeltétel: $t = 0$ -nál $s = 0$, így

$$C_3 = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (14)$$

és

$$s = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right). \quad (15)$$

Ezt az egyenletet tovább átalakítva,

$$s = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + 1 \right). \quad (16)$$

λ_1 -et és λ_2 -öt gravitációs erőterben való $v_0 = m/kx$ süllyedési végsebességgel ([1], [2]) ill. az ω szögsebességgel is meg lehet adni;

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2v_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \quad (17)$$

és

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2v_0} - \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2}. \quad (18)$$

Továbbá

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{v_0}\right)^2 + 4\omega^2} \quad (19)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\omega^2, \quad (20)$$

illetve

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right], \quad (21)$$

és

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right]. \quad (22)$$

λ_1 -et és λ_2 -őt illetve ezek függvényeit a (11), (12) és (16) egyenletekbe helyettesítve, látható, hogy a szilárd szem pillanatnyi sebessége, gyorsulása és a megtett út a centrifugára jellemző R_1 és ω , a szilárd szemcse v_0 süllyedési végsebességének, továbbá a t időnek a függvénye:

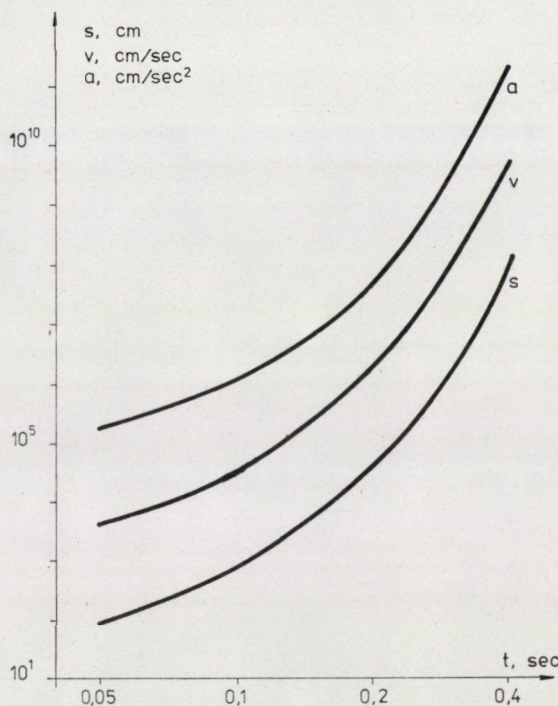
$$v = \frac{R_1^2}{\sqrt{\frac{1}{v_0^2} + 4\omega^2}} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2v_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t - \exp \left[-\frac{1}{2v_0} - \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t \right\} \quad (23)$$

$$a = \frac{1}{2} R_1 \omega^2 \left\{ \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2v_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t + \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2v_0} - \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t \right\} \quad (24)$$

és

$$s = R_1 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2v_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2v_0} - \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t \right\}. \quad (25)$$

A 2. ábrán a centrifugális erőterben olyan szilárd szemcse foronómiai függvényei láthatók [3], amelynek $v_0 = 0,05$ cm/sec a süllyedési végsebessége; $R_1 = 25$ cm és $\omega = (2400)^{1/2}$. A sebesség, gyorsulás és befutott út exponenciálisan növekvő jellege az ábráról is jól látható.



2. ábra

IRODALOM

1. FINKEY József: Die wissenschaftlichen Grundlagen der nassen Erzaufbereitung. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924
2. TARJÁN Gusztáv: Ásványelőkészítés I. Egyetemi jegyzet. Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest 1974
3. RAISZ Iván: A szerző felkérése alapján készített kézirat, 1977

The Laws of Motion of Solid Grains in a Centrifugal Field of Forces. — The paper discusses the phoronomic functions of solid grains moving in a centrifugal field of forces, in the case Stokes' law of medium resistance, is valid. Using the notations introduced by Prof. FINKEY the relations of the phoronomic functions with the centrifugal field of forces and the basic parameters of the solid grains can be well established.

Die Bewegungsgesetze von festen Körpern in einem Zentrifugalkraftfeld. — In der Arbeit sind die phoronomischen Funktionen für sich in einem Zentrifugalkraftfeld bewegende feste Körper abgeleitet, falls das Stokessche Strömungswiderstandsgesetz Geltung hat. Unter Verwendung der von Prof. FINKEY eingeführten Bezeichnungen kann der Zusammenhang der phoronomischen Parameter mit dem Zentrifugalkraftfeld und den grundlegenden Parametern der festen Körper gut festgestellt werden.

SZTOCHASZTIKUS KEVEREDÉSI MODELL A PAKS ALATTI DUNA-SZAKASZRA

KONTUR ISTVÁN*

[Beérkezett 1977. március 14-én]

A Budapesti Műszaki Egyetem Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézetében az Erőmű és Hálózattervező Vállalat megbízásából elkeveredési vizsgálatok folytak a Paksi Hőerőmű hűtővizének elhelyezésével kapcsolatban. Az elkeveredés sztochasztikus modelljének felírásában és a levonulás valószínűségi alapon történő meghatározásában szerző működött közre. Az alkalmazott modell alap gondolata, hogy a vízrészecskék és ezzel együtt a szennyezett részecskék is véletlenszerű mozgást végeznek. Szerző a keresztirányú elkeveredésre a rácspontokon történő bolyongás modelljét mutatja be. Az átmenetvalószínűségi mátrix bizonyos egyszerűsítése révén a mátrixok spektráleméletére támaszkodva könnyen számolható formula volt levezethető. Ezt a hosszirányú elkeveredésre exponenciális eloszlások konvolúciójaként adódó gamma-eloszlási ábrák alapján számolták. Mindkét modell sok lehetőséget rejt magában a hidraulikai körülmények árnyaltabb figyelembevételére, és az általánosítás a számítógépes folyamatlejtést is lehetővé teszi.

1. Az elkeveredés bolyongási modellje

A hűtővíz-elkeveredés matematika i modelljét a valószínűségszámítás bolyongási modelljére alapozzák. Az elkeveredés matematikai leírását jelen tanulmányban csupán a vízszintes síkban lezajló elkeveredésre vonatkoztatják. Továbbá néhány egyszerűsítést tételnek fel, melyek a fizikai kép valószínűségét csak csekély mértékben torzítják, de a megoldás lehetőségét nagyban elősegítik.

A szennyező anyag eloszlását csak kijelölt rácspontokban fogják vizsgálni, ahol a rácspontok egymástól való távolságát a Dunán végzett tényleges mérésekre alapozva fogják meghatározni.

A szennyező anyag véletlen bolyongási útjait úgy fogják megszabni, hogy az átfolyás szelvényről szelvényre történik, és a visszaáramlás vagy a helyben maradás valószínűségét zérusra veszik. Ez a közelítés nem jelent hibát, ha nem a hosszirányú eloszlásra, hanem a keresztirányú eloszlásra vagyunk kíváncsiak.

Legyen a Dunán két szelvény, A és B , ahol A a felső és B az alsó szelvény.

Mivel feltételeztük, hogy a szennyezőanyag részecskék az A szelvényből a B szelvénybe kerülnek át, ezért az 1 rácspontból az $1', 2', \dots, n'$ rácspontok-

* Dr. Kontur István, 1075 Budapest, Kazinczy u. 28.

ba, a 2 rácspontból az $1', 2', \dots, n'$ rácspontokba és így tovább az n rácspontból az $1', 2', \dots, n'$ rácspontokba kerülhet át a részecske. Az átáramlás valószínűségeit legcélszerűbb *átáramlási vagy átmenetvalószínűségi mátrixba* foglalni. Ez azt jelenti, hogy ha ismerjük a szennyezőanyag eloszlását az A szelvényben, legyen ez \mathbf{x}_A sorvektor, akkor a B szelvényben a koncentráció eloszlást: \mathbf{x}_B sorvektor az alábbi vektor-mátrix szorzásból adja:

$$\mathbf{x}_A \cdot \mathbf{P} = \mathbf{x}_B \quad (1)$$

$$(1.n) (n.n) (1.n)$$

A Dunán végzett mérések során, amikor a szennyezőanyag (jelző anyag) bevezetése egyetlen ponton történt, akkor ezt a szelvényt A szelvénynek, a mérési szelvényt B szelvénynek nézve, úgy vehetjük, hogy az \mathbf{x}_A vektor $0, 0, 1, 0, 0$, ahol az 1-es azon a helyen áll, amelyik számú rácsponton a jelző anyag bevezetése történt. Ezek szerint a (1) egyenletből megkapjuk \mathbf{x}_B -t, a jelző anyag eloszlást a B mérési szelvényben. Ez a felírás ad lehetőséget arra, hogy \mathbf{P} karakterizáló, átmenetvalószínűségi mátrix elemeit meghatározzuk.

Mivel a mérések alapján jól kivehető a jelző anyag *csővaszerű* alakja, továbbá a kereszt irányú elkeveredés csekély mértéke a hosszirányú elkeveredéshez képest, ezért a \mathbf{P} átmenetvalószínűségi mátrix jelentősen egyszerűsíthető. A Dunán végzett 1974. évi mérések is igazolták, hogy ha 1 : 10 arányú torzított négyzetrács hálózatot vesszünk fel (ahol 1 egység a kereszt irányú rácsméret és 10 egység a folyás irányú rácsméret), még akkor is elegendő az A szelvény rácspontjait jobbra és balra követő egy-egy B szelvény rácspontját figyelembe venni.

Például: a rácsméreteket lehetnek kereszt irányban 50 m folyás irányban 500 m vagy kereszt irányban 25 m, folyás irányban 250 m. A méreteket a számítási kapacitás és az igényelt pontosság szabja meg. A rácspontok növelésével közelítően négyzetesen növekszik a számítási munka, míg a számítási pontosság közelítően lineárisan csökken.

Ha a kereszt irányú elkeveredés csak jobbra-balra egy-egy rácspontot érint, akkor a \mathbf{P} átmenetvalószínűségi mátrix az alábbi mátrixszá egyszerűsödik:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & & & \\ r_2 & p_2 & q_2 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & r_{n-1} & p_{n-1} & q_{n-1} \\ & & & r_n & p_n \end{bmatrix}$$

A $\tilde{\mathbf{P}}$ mátrix keresztiselvény mentén inhomogén és azon túl anizotróp, vagyis a bal és jobb irányú átmenetvalószínűségek különbözőek ($r_i \neq q_i$ $i = 2, 3, \dots$

$n-1$). Tovább egyszerűsítve, az inhomogén, izotróp ($r_i = q_i$) átmenetvalószínűségi mátrix:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & & & 0 \\ q_2 & p_2 & q_2 & & \\ & q_3 & p_3 & q_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & q_{n-1} & p_{n-1} & q_{n-1} \\ & & & & q_n & p_n \end{bmatrix}$$

Következő egyszerűsítés a homogén, izotróp átmenetvalószínűségi mátrix:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p & 2q & & & \\ q & p & q & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & q & p & q \\ & & & 2q & p \end{bmatrix}$$

A $\tilde{\mathbf{P}}$ mátrixot *kontinuáns* (tridiagonális) vagy *Jacobi-féle*, a $\hat{\mathbf{P}}$ mátrixot *szimmetrikus kontinuáns*, a $\tilde{\mathbf{P}}$ mátrixot pedig *szimmetrikus egyenletes kontinuáns mátrixnak* nevezzük.

A következőkben térjünk át több egymást követő szakaszon keresztül történő jelzőanyag áthaladás nyomon követésére. Tulajdonképpen a (1) egyenletet kell rekurzív módon egymás után többször használni.

Az általános leírás érdekében legyenek a keresztaszelvények $1, 2, \dots, k, \dots, m$, az egyes keresztaszelvényekben (a Duna szélességétől függően) legyen a rácspontok száma változó, éspedig $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_m$. Ez azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségi \mathbf{P} mátrix szelvényről szelvényre változó méretű és nem szükségképpen négyzetes. Jelölje \mathbf{P}_1 mátrix az 1-es szelvényből a 2-es szelvénybe, \mathbf{P}_2 mátrix a 2-es szelvényből a 3-as szelvénybe, \mathbf{P}_k a k szelvényből a $(k+1)$ szelvénybe történő jelzőanyag továbbhaladás valószínűségét.

Alkalmazva a (1) összefüggést az egyes keresztaszelvényekben a jelzőanyag eloszlására az alábbi összefüggések írhatók fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{P}_1 \\ (1 \cdot n_2) \quad (1 \cdot n_1) \quad (n_1 \cdot n_2) & \quad (2) \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{P}_2 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \\ (1 \cdot n_3) \quad (1 \cdot n_2) \quad (n_2 \cdot n_3) \quad (1 \cdot n_1) \quad (n_1 \cdot n_2) \quad (n_2 \cdot n_3) \end{aligned}$$

A $\hat{\mathbf{K}}$ mátrix saját értékei:

$$\lambda_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n-1}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (4)$$

A $\hat{\mathbf{K}}$ mátrix jobb oldali saját vektorainak az elemei ismeretében már egyszerűen előállíthatjuk $\hat{\mathbf{P}}$ mátrix $\hat{\mathbf{P}}^m$ hatványát:

$$\hat{\mathbf{P}}^m = \hat{\mathbf{U}} \cdot \left\langle \left(p + 2q \cos \frac{k\pi}{n-1} \right)^m \right\rangle \cdot \hat{\mathbf{V}}, \quad (5)$$

ahol $\hat{\mathbf{U}}$ mátrixban foglaltuk össze a jobb oldali és $\hat{\mathbf{U}}$ mátrixban a bal oldali sajátvektorokat.

A végeredmény így:

$$x_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\sqrt{2}}{(n-1)} \cos \left[(i-1) \cdot \frac{k\pi}{n-1} \right] \cos \left[(j-1) \frac{k\pi}{n-1} \right] \cdot \left(p + 2 \cdot q \cdot \cos \frac{k\pi}{n-1} \right)^m + \frac{1}{n-1} [(p+2 \cdot q)^m + (-1)^{i+j} (p-2q)^m]. \quad (6)$$

A fenti kifejezés akkor alkalmazható, ha sem i , sem j rácspont nem szélső rácspont, vagyis

$$i, j = 2, 3, \dots, n-1.$$

Az első szelvényben x_1 vektor szerint megoszló jelzőanyag adagolás esetén a (6) képlet az alábbi formát ölti:

$$x_j^{(m)} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} x_i^{(1)} u_k^{(i)} \cdot v_k^{(j)} \cdot \left(p + 2 \cdot q \cdot \cos \frac{k\pi}{n-1} \right)^m. \quad (7)$$

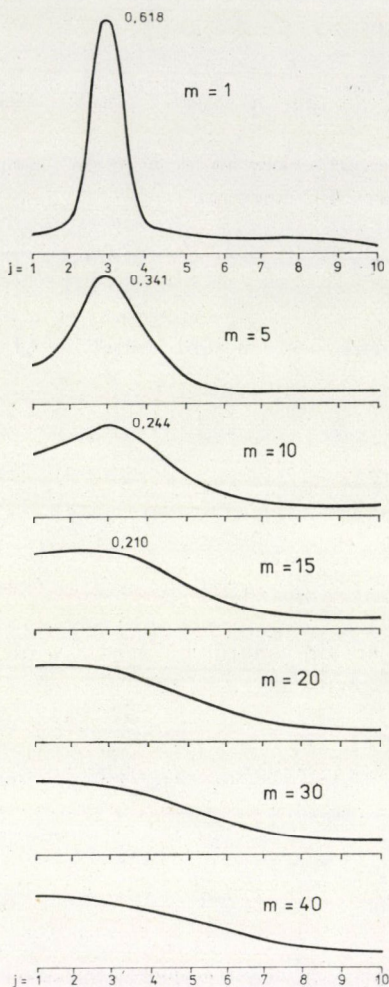
Példa a bolyongási modell alkalmazására

A számpélda arra az esetre vonatkozik, ha $n = 10$ és $q = 0,1$, $p = 0,8$. A rácsméret tehát az átlagos Duna szélességre tekintettel ≈ 50 m. A számítás alapjául szolgáló q és p értékek helyszíni mérések eredményei lehetnek, a rácspontok hosszmenti (longitudinális) távolsága tetszés szerinti állandó „lépésköz”. A számításokat arra az esetre végeztük, ha a szennyezőanyagot $i = 3$ rácsponton vezetik be, tehát a parttól mintegy 100–125 m-re.

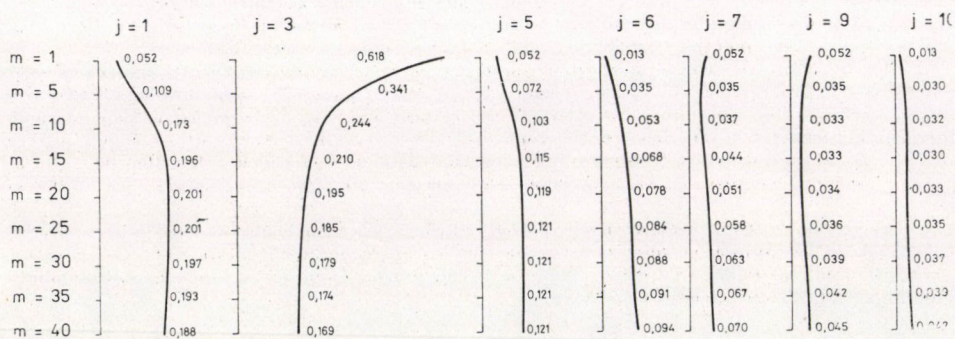
A kézi számítás mellett — mellyel a módszer rutinszerű alkalmazását kívántuk elősegíteni — *Algol* program készült az egyetemi ODRÁ számítógépre.* A számítógépi futtatások eredményeit az 1. és 2. ábrákon tüntettük fel. Jól látható, hogy az aszimmetrikus koncentráció-eloszlás a kereszt-szelvényben lassan kiegyenlítődik, továbbá a hossz-szelvény szerinti elkeveredés is jól tanulmányozható a 2. ábrán. A fenti számítások eredményei úgy kezelhetők, mint az egységnyi intenzitású szennyezőanyag-forrás koncentráció-eloszlása a kereszt-szelvény és a hossz mentén.

Az itt bemutatott valószínűségi modell alkalmazása még csak az első lépés, további vizsgálatok, a hidraulikai és mederviszonnyok, valamint különböző paraméter csoportosítás figyelembevétele a további munkák feladata. A rácspontok sűrítésével a pontosság fokozható, ami csak a számítógép kapacitásától függ.

*Wágner János IV. éves vízépítő mérnökhallgató munkája.



1. ábra. A koncentráció kereszt-szelvény menti eloszlása



2. ábra. A koncentráció hossz-szelvény menti eloszlása

2. A hosszmenti elkeveredés valószínűségi meghatározása

A Dunán levonuló szennyezőanyag hosszirányú elkeveredésére valószínűségi elgondolást fogunk alapul venni. Az elgondolás lényege, hogy a szennyezőanyag részecskék véletlenszerű viselkedésűek. Sok véletlenszerű viselkedésű részecske „észlelése” statisztikai mintává összegeződik, s a statisztikai törvényszerűségek már lehetőséget adnak a matematikai modell alkotására. A részecskék véletlenszerű viselkedésének tényleges észlelésére csak a helyszíni mérések alkalmasak. A Dunán végbemenő részecske vándorlási folyamat közelítő matematikai modelljéhez is elengedhetetlen a helyszíni mérés, mely alapján néhány lényeges paraméter beazonosítása lehetséges.

A lineáris tározó $S(\lambda)$ operációját és a lineáris csatorna $T(\tau)$ oprációját az $x(t)$ bemeneti idősorra alkalmazva a kimenetet az alábbiak szerint kapjuk:

$$y(t) = S(\lambda) [T(\tau) x(t)] = T(\tau) [S(\lambda) x(t)]. \quad (8)$$

Az S tározási és a T translációs operáció.

A hosszirányú elkeveredés matematikai modellezéséhez az átvonulási idők valószínűségi felvétele helyes közelítés:

$$y(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \text{ha } t > t_0. \quad (9)$$

Ez a tározási differenciálegyenlet megoldása, az exponenciális eloszlás sűrűség függvénye. Mivel az $x(t)$ -re a $T(\tau)$ eltolási operáció is hat, vagyis a lineáris csatorna hatását is figyelembe kell venni, így:

$$y(t + \tau) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (10)$$

A lineáris rendszerből adódóan $x(t_0)$ válasz függvénye: $x(t_0) \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda(t-t_0))$, a $(t + \tau)$ pontban az eltolási és tározási műveletek *kommutativitása* folytán az $y(t)$ az $x(t_0 - \tau)$ bemenetből a fentihez hasonlóan számolható. Az egyes részecskék egymástól nem akadályozott független átvonulásának feltételéből adódik, hogy $x(t)$ bemeneti eloszlásból az $y(t)$ összegzett kimeneti idősor a rész idősorok összege lesz. A $T(\tau)$ eltolási operáció (τ) időparamétere a $\tau = z_1$ minimális átvonulási idő, számítása az $L_1 - L_0 = l$ távolság alapján a v_{\max} maximális átvonulási sebesség ismeretében $z_1 = l/v_{\max}$. A Dunán végzett számítások során mi is az utóbbi számítási eljárást fogjuk követni. Tehát az exponenciális eloszlás (8) sűrűség függvényét $\tau = l/v_{\max}$ időértékkel kell eltolni.

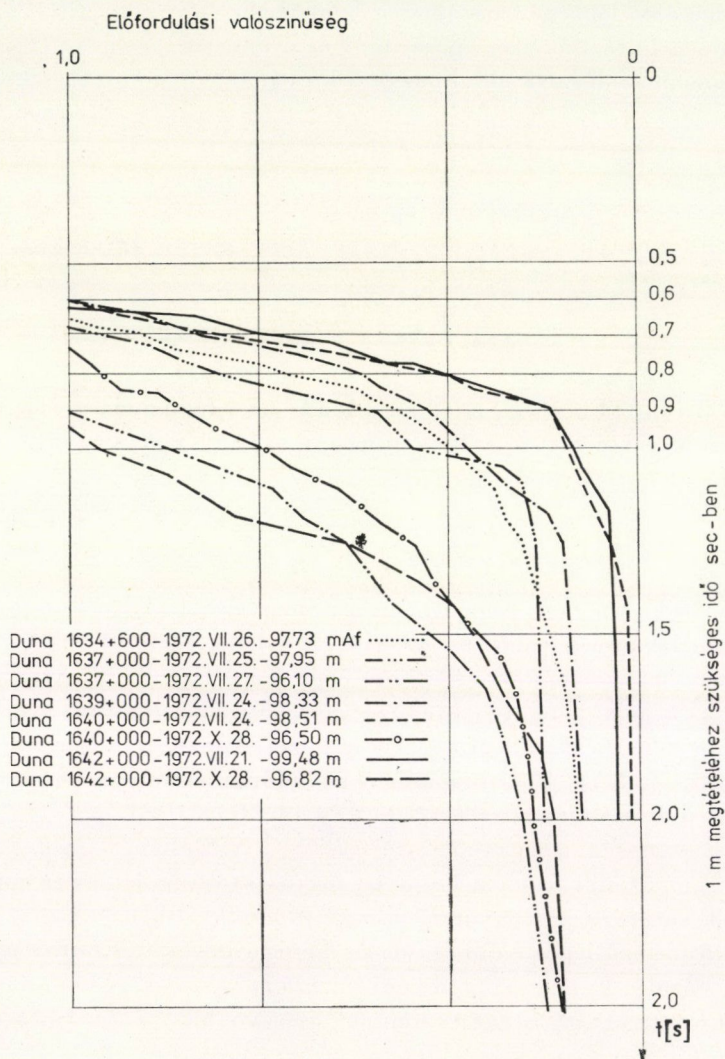
A következő lépés, több egymást követő lineáris csatorna és a lineáris tározók sorozata. Ennek végeredménye a *gamma eloszlás*. A koordináta transzformáció $T(\tau_1), T(\tau_2) \dots T(\tau_n)$ alapján összevonható egyetlen transzformációvá:

$$T_n(\tau) = T(\tau_1) T(\tau_2) \dots T(\tau_n).$$

A lineáris tározók $S(\lambda_1), S(\lambda_2), \dots, S(\lambda_n)$ sorozata $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ paraméterrel jellemezhető exponenciális eloszlások konvolúciója lesz. Mint ismeretes, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$, akkor a $\delta(t_0)$ Dirac delta bemenetre adott válasz:

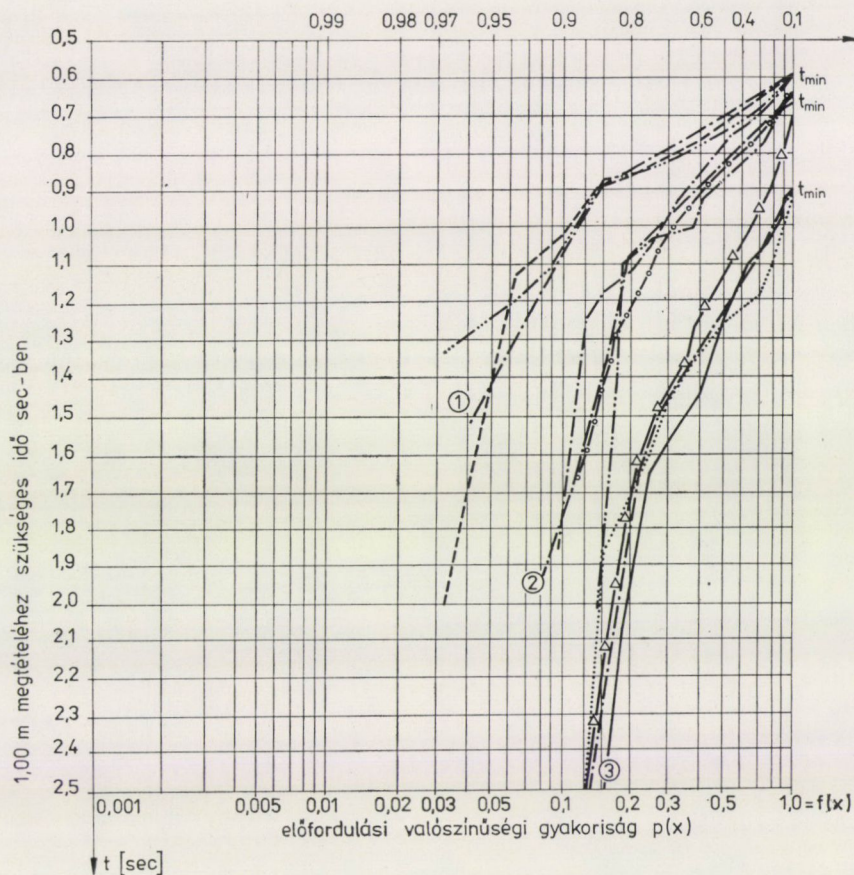
$$y(t) = \frac{\lambda^n (t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}; \quad t > t_0. \quad (11)$$

A paraméterbecslés a várható érték és a szórás alapján történhet: $t = n/\lambda$ $\sigma_t^2 = n/\lambda^2$. A momentumok és a Gamma eloszlás λ és n paramétere közötti fenti összefüggés a gyakorlati meghatározáshoz hasznosítható.



3. ábra. Átvonulási idők eloszlásfüggvényei

Az egyes szakaszokon az átvonulási idők a sebességek alapján határozhatók meg. Olyan vizsgálat, mely jelzőanyag eloszlását adná meg, meglehetősen fáradságos, különösen a Duna esetében. Ezért a keresztmetszeti sebességeloszlások ábráit használtuk fel a hosszirányú áramlási idők meghatározásához. Az eljárás lényege a következő volt. A Dunán végzett több sebességmérés *izotach* térképeit használtuk. A keresztszelvényt egyenletes osztással behálóztuk, majd a rácponton levő sebességértékeket, mint véletlen mintavétel értékeit kezeltük. Az így kapott statisztikai mintából empirikus eloszlásokat készítettünk és meghatároztuk a különböző előfordulási valószínűséghez tartozó értékeket.



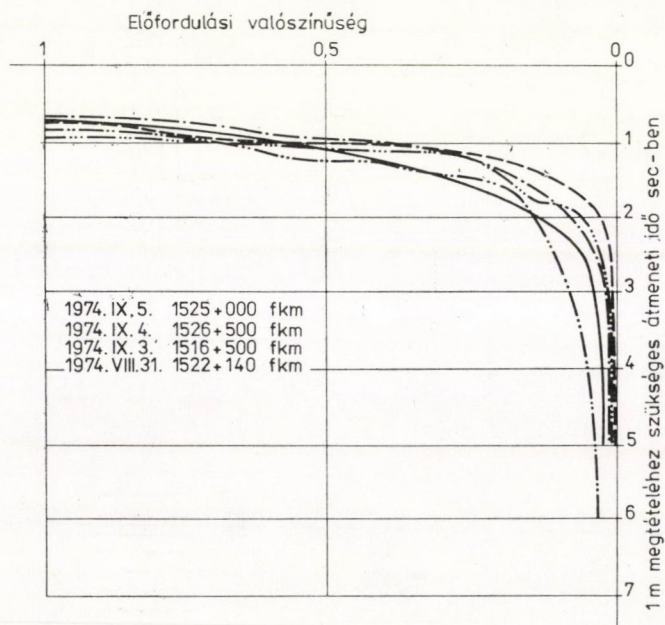
Duna	1634 + 600	- 1972. VII. 26.	- 97,73 mAf	—○—○—○—
Duna	1637 + 000	- 1972. VII. 25.	- 97,95 mAf	—...—...—
Duna	1637 + 000	- 1972. IX. 27.	- 96,10 mAf	—...—...—
Duna	1639 + 000	- 1972. VII. 24.	- 98,33 mAf	—...—...—
Duna	1640 + 000	- 1972. VII. 24.	- 98,51 mAf	—...—...—
Duna	1640 + 000	- 1972. IX. 28.	- 96,50 mAf	—△—△—△—
Duna	1642 + 000	- 1972. VII. 21.	- 99,48 mAf	—...—...—
Duna	1642 + 000	- 1972. IX. 28.	- 96,82 mAf	—...—...—

4. ábra. Valószínűségi hálózat az átvonulási idők exponenciális eloszlásához

A módszer általános alkalmazásának szemléltetése végett korábbi, Dunán végzett mérések eredményeit is feldolgoztuk különböző jellegzetes Duna-szakaszokra.

Az átvonulási időket $l(m)$ -es út megtételéhez szükséges idővel jellemeztük. A $t = l/v$ transzformációnak alávetett $f(v)$ eloszlásfüggvényeket a 3. ábrán rajzoltuk meg. Az ábrák is igazolni látszanak azt a feltevésünket, hogy az átvonulási idők exponenciális eloszlást követnek. Ez még szemléletesebben kitűnik, ha exponenciális valószínűségi hálózaton ábrázoljuk a pontokat (4. ábra). Az átvonulási idők eloszlása a valószínűségi hálózaton megmutatja, hogy az átvonulási időkre pontosabb jellemzést adhatunk két exponenciális eloszlás keverék formában való előállítására. Ez jól rávilágít arra, hogy a part és fenék közelében igen lassú mozgású vízrésecskék találhatók, melyek eltérő paraméterrel jellemezhetők. Így magyarázható és modellezhető a sekély mederszakaszok és áramlási holtterek szennyezőanyag visszatartó hatása. A kétféle paraméterrel jellemezhető exponenciális eloszlás keverési aránya közelítőleg a kerület és felület viszonyával fejezhető ki, ami hidraulikai tulajdonság. A vízhozam — tehát a középsebesség, az esés — függvényében az eloszlások eltolódnak és az áramlási idő nő a vízhozam csökkenésével, az árvizek gyorsabban vonulnak le és az eloszlásfüggvény is nyújtottabb. A jellegzetes eloszlási vonalakat a törésponttal a 4. ábrán (1), (2) és (3)-as jellel láttuk el.

A Paksi Atomerőművel kapcsolatos sebességmérések [1] alapján számított átvonulási idők eloszlásfüggvényét a 5. ábrán rajzoltuk meg. Az előbb

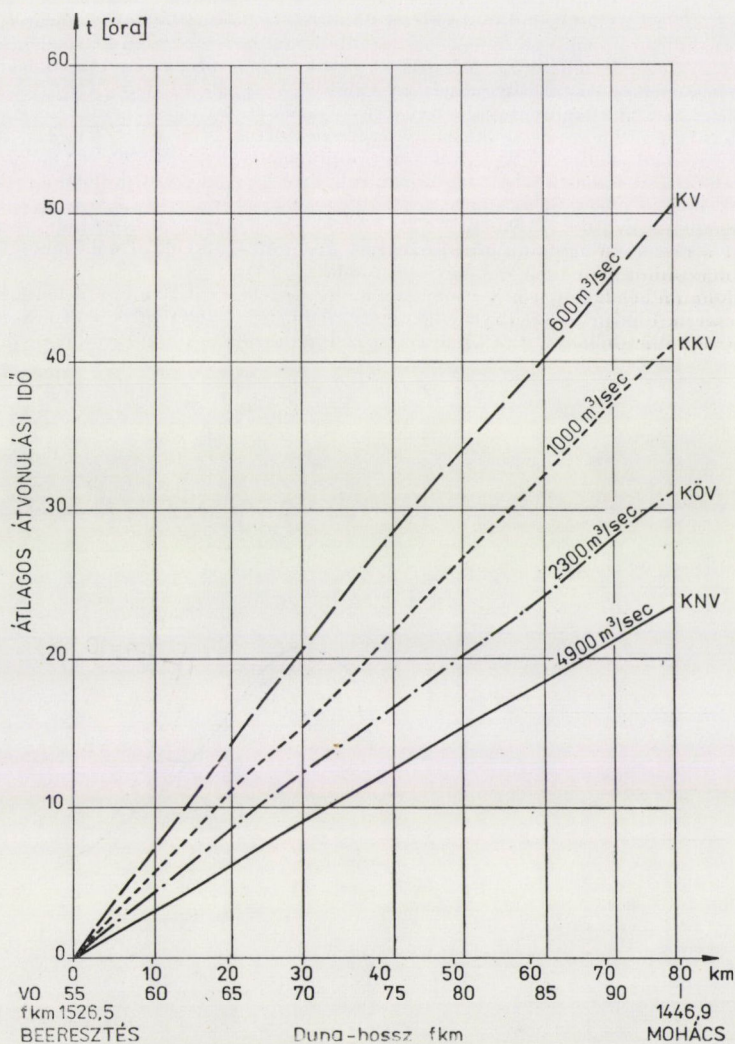


5. ábra. Átvonulási idők eloszlásfüggvényei a paksi mérések alapján

elmondottak itt is érvényesek. A 5. ábra eredményei a közvetlenül felvett Duna-szakaszra vonatkoznak, de jó közelítéssel alkalmazhatók alsóbb részek hasonló jellegű, szigetes-zátonyos szakaszaira is. A pontosság fokozása érdekében természetesen a teljes Duna-szakaszon sebesség felvételére lenne szükség.

Az átlagos levonulási időket a Paks 1526,5 fkm és Mohács 1446,9 fkm között vizsgáltuk.

Az átlagos levonulási időket $Q = 600 \text{ m}^3/\text{s}$ KV, $Q = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$ KKV, $Q = 2300 \text{ m}^3/\text{s}$ KÖV és $Q = 4900 \text{ m}^3/\text{s}$ KNV vízállásokra, illetve vízhozamokra határoztuk meg. A Q vízhozam és az F nedvesített keresztmetszvény alapján



6. ábra. A levonulási idők az átlagsebességek alapján

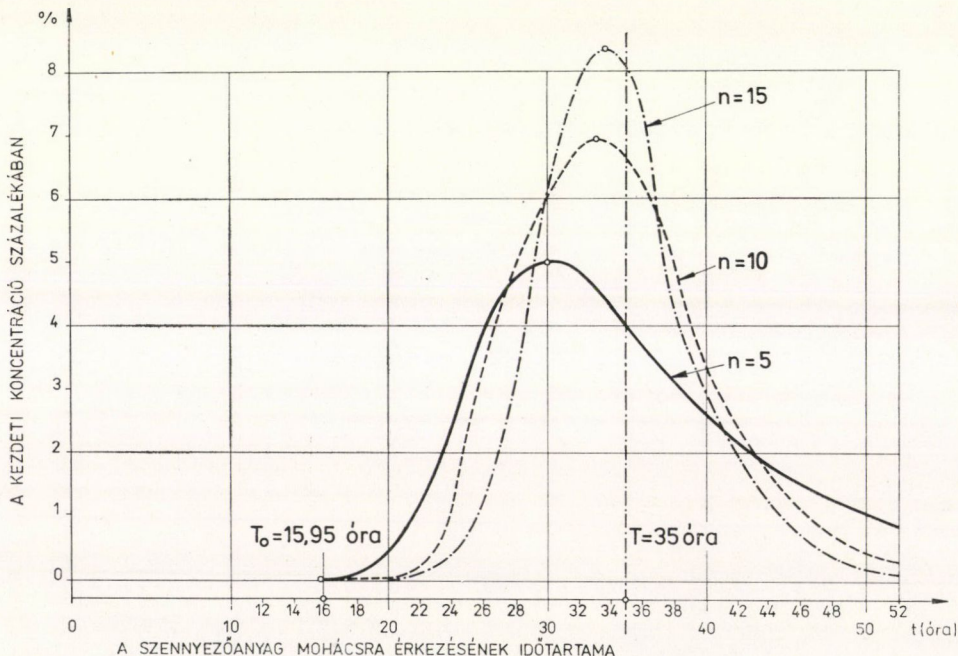
számítottuk a v_k szelvényközép sebességeket. A középsebességek és a szakasz-hosszak alapján számítottuk az átlagos átvonulási időt. Az eredményeket a 6. ábrán szemléltetjük. Az átlagos levonulási idő változása meglehetősen kiegyenlített képet mutat, a közbenső szelvények számítására ezért a lineáris interpoláció bátran ajánlható.

Példa a szennyezőanyag hosszanti levonulásra

A szennyező forrás Paks és a mohácsi észlelés közötti szakasz 79,6 km. A maximális sebesség alapján $\tau \approx 0,7$ [s] $l = 1$ [m]-en. Feltételezve, hogy $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{79600} = \tau$, így $T_0 = 79600 \cdot 0,7$ [s] = 15,95 óra. Tételezzük fel, hogy $Q = 2000$ m³/s és az átlagsebességek ábrája szerint $T = 35,00$ óra. Ez azt jelenti, hogy a lineáris csatornák időszükségletét 15,95 órát levonva a teljes 35 óra átvonulási időből a $n/\lambda = 35,00 - 15,95 = 19,05$ óra a lineáris tározóban való keresztülhaladás időszükséglete. Az egyszerűbb megoldás érdekében kénytelenek vagyunk $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ feltételt tenni. A hosszirányú elkeveredésben az egymást követő kereszt-szelvények sebességeloszlásának függetlensége valószínűleg nem áll fenn. Ez további kutatás feladata és az egymással összefüggő valószínűségi változók összeg eloszlásának meghatározását igényli. Esetünkben a 79,6 km-es szakaszt 10 részre osztottuk, $n = 10$, tehát $\lambda = 10/19,05 = 0,525$, így például a $t = 15,95 + 3,8$ óra időpontban $y(t) = 0,00019 \cdot 0,525 = 0,0001$. A számításokhoz a Poisson-táblázatot használtuk, ezért az időpontok nem kerek értékek.

Nézzük meg, ha $n = 5$, akkor $\lambda = 5/19,05 = 0,263$ [óra⁻¹] és így $y_{\max} = 0,19537 \times 0,263 = 0,0500$ [gr/m³] $t = 15,95 + 17,72 = 33,67$ [óra]. Látható, hogy minél több szakaszon halad át a részecske ugyanakkora összegzett átvonulási idővel, annál csúcsosabb lesz az eloszlás és a maximum időpontja egy kevéssé tolódik.

A példában a beadagolt szennyezőanyag mennyiség 2 kg volt, ami azt jelenti, hogy teljes elkeveredés esetén 1 gr/m³ a szennyezési koncentráció. ($Q = 2000$ m³/s volt.) A 79,6 km-es úton a szennyvízhullám ellapul, ezért a mohácsi szelvényben a beadagolást követő 33,1 órában



7. ábra. Szennyezőanyag-hullám ellapulás a Paks—Mohács szakaszon

jelentkező maximum is csupán 0,069 ($n = 10$ esetén). Ez azt jelenti, hogy az eredeti szennyező-dés $\approx 7\%$ -nál, $n = 5$ esetben 5% -nál kisebb maximális koncentráció észlelhető a mohácsi szelvényben.

A 7. ábrán megrajzoltuk az $n = 5$, $n = 10$ és $n = 15$ esetekre vonatkozó szennyező-anyag hullámot, ami arra enged következtetni, hogy az $n = 5 \div 10$ közötti felvétele a Paks--Mohács szakaszon megfelelő. Pontos állásfoglalás csak tényleges mérések alapján képzelhető el. A kémiai jelzőanyagok mérési korlátai miatt ilyen hosszú szakasz átvonulási idejének mérésére csak az izotóptechnika tűnik megfelelőnek.

3. Összefoglalás

A szennyezőanyag elkeveredés és levonulás valószínűségi modellezésére két utat mutattunk be. Az egyik az átmenetvalószínűségi mátrixokra alapozva a mátrixok spektrálfelbontásával ért célzt, a másik az átvonulási idők exponenciális eloszlásának feltételezésével gamma modellel közelítette a hosszmenti levonulást.

Mindkét módszer bizonyos egyszerűsítéseket alkalmaz, melyek közül sok feloldható részletesebb vizsgálat keretében. Ezek közé tartozik a hidraulikai, a mederviszonyok pontosabb figyelembevétele; az átvonulási idő eloszlásfüggvény paraméterének és a vízhozam kapcsolatának feltárása; a bolyongási modell szóródási számának (p, q) hely és idő szerinti változásának feltárása; a keresztiselvényben történő szétterjedés felírása a gamma modellhez hasonló formában béta eloszlással (vagy kétdimenziós béta eloszlással), ami az egy-séges béta-gamma eloszlási modell alkalmazását teszi lehetővé, végül a gamma modell feltételül szolgáló függetlenség felülvizsgálata és korrelált valószínű-ségi változók modelljének levezetése.

A felvetett problémák némelyike matematikai nehézségbe ütközik, de ezek megoldhatók. A gyakorlati alkalmazás szempontjából azonban a mérések elengedhetetlenek.

IRODALOM

1. BME Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézet Vízellátási és Csatornázási Osztály: Keveredési vizsgálatok a Paksi Atomerőmű alatti Duna-szakaszon. Kutatási szakvélemény (1974) Témafelelős: SZOLNOKY Csaba
2. Rózsa P.: Lineáris algebra, műszaki alkalmazásokkal. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974

A Stochastic Mixing Model for the Danube Beaches below Paks. — In connection with the disposal of the cooling water of the Paks thermal power station, the Institute of Water Management and Hydraulic Engineering of the Budapest Technical University was commissioned by the Power Station and Network Planning Enterprise to investigate the water mixing. The author has collaborated in establishing the stochastic model of the mixing and the determination of the discharge, on a probability basis. The basic idea of the applied model is that the water particles and with them the polluted particles carry out an arbitrary movement. The author presents the model for the transversal mixing. By a certain simplification of the transfer probability matrix and using the spectral theory of matrices, an easily evaluated formula is obtained. For the convolution of the exponential distributions of the longitudinal mixing a gamma distribution is used, the characteristic passage times were calculated on the base of the velocity diagrams. Both models involve many possibilities for a more differentiated consideration of the hydraulic conditions and the generalization permits reproducing of the phenomena on a computer.

Ein stochastisches Mischungsmodell für den Donauabschnitt unterhalb Paks. — Auf Antrag des Kraftwerk- und Netzprojektierungsunternehmens wurden im Institut für Wasserwirtschaft und Wasserbau der Technischen Universität Budapest Mischungsuntersuchungen betreffend die Unterbringung des Kühlwassers aus dem Wärmekraftwerk Paks durchgeführt. Der Verfasser wirkte beim Anschreiben des stochastischen Modells der Vermischung und der Bestimmung des Abfließens auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage mit. Der Grundgedanke des Modells ist, daß die Wasserteilchen und mit ihnen die verschmutzten Teilchen eine stochastische Bewegung durchführen. Für die transversale Vermischung beschreibt der Verfasser das Modell des Umherirrens in den Gitterpunkten. Durch eine gewisse Vereinfachung der Übergangsmatrix und Verwendung der Spektraltheorie der Matrizen wurde eine leicht rechenbare Formel abgeleitet. Für die longitudinale Vermischung wurde eine als Konvolution der exponentiellen Verteilungen abgeleitete Gamma-Verteilung benützt; die charakteristischen Durchlaufzeiten werden aufgrund der Geschwindigkeitsverteilungsbilder berechnet. Beide Modelle enthalten viele Möglichkeiten zu einer genaueren Beachtung der hydraulischen Bedingungen und die Verallgemeinerung ermöglicht auch das Abspielen des Vorganges auf einem Rechner.

A TÉRBELI RÚDSZERKEZETEK STATIKÁJÁNAK ÁTTEKINTÉSE KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A MODERN NUMERIKUS MÓDSZEREKRE

HELYZETKÉP*

ROLLER BÉLA**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1978. július 24-én]

A térbeli rúdszerkezetek számítási módszerei a matematikai rugalmasságtan két alapvető módszeréből, az *erő módszerből*, illetve az *elmozdulásmódszerből* fejlődtek ki, ezek műszaki alkalmazásaként. Az elektronikus számítógép elterjedése nyomán egyes hagyományos eljárások, mint például a fixpontmódszer, háttérbe szorultak, helyüket olyanok foglalták el, amelyek egyre jobban támaszkodtak a lineáris algebrára. A programozott számítások algoritmusait, amelyek az *első*-, a *másod*- és a *harmadrendű* elmélet alapján rendszerezhetők, a rúdszerkezetek állapotegyenletéből kiindulva lehet felépíteni. Ezeket az algoritmusokat a véges elemek módszerének segítségével kontinuumok számítására is alkalmazni lehet, legújabbán pedig képlékenységtani vizsgálatokra, illetve a posztkritikus állapotok vizsgálatára is kiterjednek.

1. Bevezetés

A rúdszerkezetek számítása a műszaki mechanikának olyan kérdése, amely a szerkezettervező mérnököket mindennapi gyakorlatuk szintjén foglalkoztatja. Kiinduló problémája a tökéletesen és ideálisan rugalmas rendszerek igénybevételeinek és elmozdulásainak számítása statikus teher esetében. Ennek megoldása nyomán esedékessé válik a dinamikai számítás is — különös tekintettel az önrezgésszámokra —, továbbá a képlékeny és a viszkózus hatások figyelembevétele és egyéb, bonyolultabb feladatok is, mint például az optimalálás.

A hagyományos statikai módszerek rövid megemlézése után az utóbbi évtizedek fejlődését a rúdszerkezetek mátrixszámítása szempontjából tekintjük át, mert a tudományág fejlődését metodikai és számítástechnikai tekintetben ez jellemzi leginkább.

2. A rúdszerkezetek számításának hagyományos módszerei

A rúdszerkezetek számításának alapjait a múlt század nyolcvanas éveitől a huszadik század közepéig terjedő periódusban fektették le; lényege a statikailag határozatlan tartók vizsgálatának kidolgozása volt.

* Az MTA Műszaki Mechanikai Bizottságához beterjesztett jelentés első részének rövidített szövege.

** Dr. Roller Béla 1027 Budapest, Mártírok útja 54

Az erőműdszerrel kapcsolatban mindenekelőtt CASTIGLIANO munkásságára kell hivatkoznunk [1879]. A csatlakozási egyenletek megoldását — különösen folytatólagos tartók esetén — egyszerűsítette a CULMANN által javasolt fixpontműdszer [COULMANN 1900; SUTER 1951] és hasonló egyszerűsítési törekvés az indítéka a befogott ívek és a zárt keretek megoldására vonatkozó o-ponti műdszerek is.

Az elmozdulásműdszer mérnöki alkalmazásának alapelvét MAXWELL-re lehet visszavezetni [1864]. Rendszeres kifejtése rácsos tartók mellékfeszültségével kapcsolatban MOHR-nak [1892], merev csomópontú keretszerkezeteken OSTENFELD-nek köszönhető [1926]. Az elmozdulásműdszer sokismeretlenes lineáris egyenletrendszerének megoldását kikerülő, legegyszerűbb, statikai megfontolásokkal értelmezett eljárás CROSS nyomatékostási módszere [1930], amelyet kiterjesztettek a legkülönbözőbb feladatokra, például rugalmas ágyazású rudakat tartalmazó rúdszerkezetek vizsgálatára, sőt stabilitási feladatokra is [BLASKOWIAK—KACZKOWSKI 1966]. Említésre méltó még a Southwell-féle relaxáció, amely fix csomópontú kereteken a Cross-műdszernek egy adekvát változata [SOUTHWELL 1940], továbbá Grinter szögosztás-műdszere [1936].

A fentiekén kívül még több speciális eljárás is kialakult, így például LEONHARDT tartórács-számítási módszere [LEONHARDT-ANDRA 1950] és KANI keretszámítási eljárása [1957].

Az 1945 előtti periódust, amelyre a számítási módszerek mérnöki alapelveinek lefektetése és a munkát a konstruktőrök szempontjából legegyszerűsítő eljárások jellemzők, számos monográfia foglalja össze [pl. RABINOVICS 1934; PALOTÁS 1951; GULDAN 1954].

3. A rúdszerkezetek számításának modern módszerei

A rúdszerkezetek számításának a második világháborútól kezdődően a repülőgépgyártásban és az űrhajózásban fellépett újabb szerkezeti kérdések, valamint az elektronikus számológépek elterjedése adtak komoly lendületet. A számítások egységesítését és az eddigiéknél sokkal nagyobb szabadságfokra való kiterjesztését ARGYRIS és munkatársai kezdeményezték [ARGYRIS 1957, 1960, 1964, 1965]. Eljárásaik korán magukban hordozták a véges elemek módszerének csíráit [WILLIAMS 1954; TURNER és szerzőtársai 1956]. Az általuk vizsgált alapvető kérdés azoknak a felületszerkezeteknek a számítása volt, amelyeket nyírt panelek, húzott, illetve nyomott bordaelemek és esetleg külpontosan igénybe vett merevítőgyűrűk, illetve diafragmák alkotnak.

A jelzett repülőgép-szilárdságtani probléma megköveteli, hogy a számítási eljárások magasfokúan szervezettek és egyöntetűek legyenek.

A statikai számítások korszerűsítésének első lépcsőfoka a sokismeretlenes csatlakozási egyenletek gépi úton történő megoldása volt, azonban nyilvánvaló, hogy ez önmagában nem eléggé hatékony eljárás. A számításokat úgy kell megszervezni, hogy lehetőség szerint minden olyan munkarész automatikus úton nyerjen kidolgozást, amely mechanikus számításokból vagy gépies logikai műveletekből felépíthető [KRON 1944; FALKENHEINER 1953]. A jelenlegi eljárások kidolgozásának tehát az a célja, hogy géppel minél kevesebb alapadatot kelljen közölni, és az eredmények részletesen kimunkált alakban, például táblázatok [KRON 1955] vagy a gép által készített rajzok formájában jelenjenek meg.

A korszerűen megoldott rúdszerkezeti feladatok egy adatfeldolgozási és egy műszaki részből állnak, a kettő szorosan összefonódik [SZMIRNOV és szerzőtársai 1965]. Az adatfeldolgozási rész lényege a szerkezet topológiai jellemzésének, a szerkezeti elemek térbeli kapcsolatainak automatikus regisztrálása, a geometriai és merevségi adatoknak, a teheradatoknak, valamint a kényszerek fajtáinak felsorolása, tárolása, ellenőrzése és visszajelzése, illetve az eredményközlés.

A műszaki rész lényege a feladat kulcsát jelentő ismeretlenek meghatározására szolgáló egyenletrendszer együtthatómátrixának minél egyszerűbb összeállítása és minél takarékosabb tárolása, az egyenletrendszer hatékony és pontos megoldása (az ismeretlenek száma több ezer is lehet), végül a másodlagos ismeretlenek kiszámítása, ami már csak transzformációsorozatokat kíván meg [LANGEFORS 1952].

Az adatfeldolgozási munkarész olyan — a gráfelmélet körébe tartozó — kérdéseket is felvet, amelyek megoldása a műszaki rész szempontjából fontos. Ilyen például egy-egy bonyolultabb szerkezet csomópont-sorszámozásának kérdése, amelynek helyes megoldásán múlik a feltételi egyenletrendszer együtthatómátrixának „szalagszerű” és „takarékos” volta, tehát a megoldás hatékonysága. Hasonló kérdés annak eldöntése, hogy melyek legyenek a kívülről közölt, s melyek az automatikusan generált szerkezeti adatok. Végül megemlítjük, hogy egyes számtömbök elemenként, soronként vagy blokkonként való előállítás, ismételt sorozatos kiszámítása vagy tárolása is ide tartozik és a módszerek tényleges használhatósága szempontjából igen lényeges [JENKINS 1969; MITROPOLSKIJ 1969].

A műszaki munkarészből az egyenletrendszerek korszerű megoldási módszereit emeljük ki, e gondolatkörbe tartozik a szalagmátrixok invertálása, a hasonlósági transzformáció alkalmazása, a Cholesky-féle és egyéb, olyan módszerek, amelyek kifejezetten óriás-egyenletrendszerek megoldására valók, s amelyek áttekintését például RALSTON művében [RALSTON 1969] találjuk meg. Utalunk még arra is, hogy ma már jó néhány, a rúdszerkezetek számításakor előforduló komplex numerikus matematikai feladat megoldására kész programokat lehet a számológéppontokban igénybe venni.

A rúdszerkezeti kérdések áttekintését szolgáló csoportosítások egyike a feladatokat a szerkezet egyensúlyi útjának, vagyis a fokozódó hatás és a fokozódó következmény összefüggési folyamatának szempontjából csoportosítja. Ennek alapján az elemzésben elsőrendű, másodrendű és harmadrendű elméletet különböztet meg [SZABÓ-ROLLER 1971]. A továbbiakban ezt a felosztást érvényesítjük elsősorban. A rendszerezés másik szempontja a feladatoknak a szerkezeti anyag viselkedése szempontjából lineáris vagy nemlineáris jellege. Erre csak röviden és az első osztályozással összefüggésben térünk ki.

4. Első-, másod- és harmadrendű elmélet

A számítás során adva van a rúdszerkezetnek egy olyan állapota, amelyet egy megadott geometriai elrendezés és egy ismert belső erőrendszer jellemez. A vizsgálat tárgya annak meghatározása, hogyan változik meg az elrendezés — a szerkezeti alak — és az igénybevételek eloszlása akkor, ha a rúdszerkezet erőterheit és kinematikai terheit megváltoztatják, fellépnek-e kritikus egyensúlyi állapotok, és ha igen, mekkora teherrel, végül hogyan viselkedik a szerkezet egy-egy kritikus állapot meghaladása után.

Az állapot- illetve állapotváltozási vizsgálatokban a feladatok jellegétől függően három fő vizsgálati szintet lehet megkülönböztetni:

a) *Az elsőrendű elmélet* feltételezi, hogy a vizsgálat kezdetén vagy fel sem lép a megadott belső erőrendszer, vagy ha igen, akkor e belső erőrendszernek az a hatása, amelyet a szerkezeti alak megváltozása során az egyensúlyra gyakorol — jelentéktelen és elhanyagolható.

Egyszersmind feltételezi, hogy a kinematikai egyenletekben szereplő elmozdulások és alakváltozások egyaránt differenciális méretűeknek tekinthetők.

b) *A másodrendű elmélet* e két feltevés közül az elsőt nem alkalmazza.

c) *A harmadrendű elmélet* egyik feltevést sem alkalmazza.

Kritikus állapotok vizsgálatára az elsőrendű elmélet alkalmatlan, a másodrendű pedig csak korlátozó feltevések nyomán alkalmas. Mindazonáltal valamennyi elmélet és módszer az elsőrendű elméleten nyugszik, mert az linearitása és megoldásainak egyértelmősége miatt minden egyébhez módszertani és numerikus matematikai indítást jelent.

5. A rúdszerkezetek mátrixszámításának alapelvei. Lineáris problémák

A rúdszerkezetek vizsgálatának korszerű és az elektronikus számítógépek szempontjából is legalkalmasabb módszere a mátrixszámítás, a mechanikai összefüggéseket mátrixegyenletek alakjában célszerű leírni.

A rúdszerkezetek statikájában adottak a véges szabadságfokúnak tekintett szerkezet csomóponti terhei és rúdmenti kinematikai terhei („terhelő mozgások”), keresendők a csomóponti elmozduláskomponensek és a rudak igénybevételét jellemző belső erőkomponensek, valamint a reakciók. A vizsgálathoz rendelkezésre állnak az egyes rudak meg a csomópontok egyensúlyi feltételei, a csomópontok és a rudak csatlakozásának kompatibilitási feltételei, végül az egyes rudak viselkedését jellemző fizikai feltételek. Az egyensúlyi feltételekben csomóponti külső és rúdmenti belső erők, a kompatibilitási feltételekben csomóponti abszolút elmozdulások és rúdmenti relatív elmozdulások, a fizikai feltételekben pedig rúdmenti belső erők és relatív elmozdulások szerepelnek.

A rúdszerkezetek elsőrendű elméletének alapján az egyensúlyi feltételeket a

$$\mathbf{G}^T \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

az összevont fizikai és kompatibilitási feltételeket pedig a

$$\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0}$$

hipermátrix-egyenletekkel lehet leírni, itt \mathbf{q} a megadott csomóponti terhek, \mathbf{t} a megadott rúd menti kinematikai terhek, \mathbf{u} az ismeretlen csomóponti elmozduláskomponensek, \mathbf{s} az ismeretlen belső erőkomponensek oszlopvektora. \mathbf{G} a merevtestszerű elmozdulást jellemző geometriai (hiper) mátrix, \mathbf{G}^T az egyensúlyi (hiper) mátrix. A T felső index a transzponálás jele. \mathbf{F} a szerkezetet alkotó rudak halmazának összefoglalt hajlékonysági (hiper) mátrixa. Az összefüggésektől a reakciószámítás egyenleteit már elválasztottuk [SZABÓ-RÓZSA 1971].

A szerkezeti állapotot — pontosabban a tehermentes kezdeti állapot megváltozását — a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

kvadratikusan hipermátrix jellemzi.

A másodrendű elmélet érvényessége esetében az állapotváltozás kezdetekor már jelen levő belső erőknek az egyensúlyra gyakorolt hatását az egyensúlyi feltételek

$$\mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{G}^T \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

alakú, módosított hipermátrix-egyenletével vesszük figyelembe, itt $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_0)$ egy olyan hipermátrix, amelynek elemei a kiindulási konfiguráció mértani- és

belső erőadataitól függenek. Meghatározása vagy a \mathbf{G}^T mátrix deriválttenzora segítségével történik (pl. egytengelyű feszültségállapotban levő szerkezeti elemek esetében), vagy a potenciális energia extrémum-tételéből kiszámítva, energetikai megfontolással [PRZEMIENIECKI 1968].

A harmadrendű elmélet az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

alakú állapotváltozási mátrixokat csak az egyensúlyi út pillanatnyi jellemzésére alkalmazza. A vele kapcsolatos további mondanivalót áttekinthetőség kedvéért a későbbiekre halasztjuk.

A rúdszerkezetek mátrixszámításának első periódusában nem az iménti, és a teljes automatizálást megalapozó egyenletek összeállításával és megoldásával foglalkoztak, hanem részben ad hoc, részben a klasszikus statikából kölcsönzött megfontolások segítségével közbelső szintű eljárásokat dolgoztak ki [LIVESLEY 1954; KLEIN 1957].

Az első ilyen eljárás az erőmódszer mátrix-megfogalmazására irányult. Lényege az, hogy a fölös kapcsolatokon esedékes csatlakozási egyenletek együtthatómátrixát három mátrixból kiindulva, mechanikai úton könnyen megindokolható transzformációk sorozatával állítják össze. E három mátrix közül

B egy olyan mátrix, amely a szerkezeti elemek jellemző relatív elmozdulásait a fölös kapcsolati helyek relatív elmozdulásaiba transzformálja,

F a rudak halmazának hajlékonysági mátrixa,

H egy olyan mátrix, amely a tartó terheit a törzstartó belső erőibe transzformálja.

Az s_s redundánsok meghatározására szolgáló csatlakozási egyenlet

$$\mathbf{BFB}^T \mathbf{s}_s + \mathbf{BFHq} = \mathbf{0}.$$

A \mathbf{B}^T és a \mathbf{H} mátrix elemeit eleinte közvetlen megfontolásokkal, hatásfüggvények helyettesítési értékeiként állapították meg.

Az elmozdulásmódszer mátrix-megfogalmazásában két alapvető mátrix szerepelt:

\mathbf{A}^T egy olyan mátrix, amely a rudak végeinek igénybevételeit egyensúlyi megfontolások alapján eredő dinámokba transzformálja;

\mathbf{K}_e a rudak, mint szerkezeti elemek merevségi mátrixa.

BETTI tétele értelmében \mathbf{A} egy olyan mátrix, amely a csomóponti elmozduláskomponenseket kinematikai megfontolással a rúdvégi elmozduláskomponensekbe transzformálja.

A mátrix-elmozdulásmódszer egyensúlyi egyenlete

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K}_e \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{q}.$$

Itt \mathbf{q} a csomóponti terhek vektora, amelyet a rúdmenti kinematikai terhek hatásával is ki kell egészíteni [FRAEIJIS de VEUBEKE 1963; FILIN 1966; MARTIN 1966; MASZLENNYIKOV 1970].

Ha a rúdszerkezetek

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

állapotegyenletét vesszük alapul, akkor mind az erőmódszer, mind az elmozdulásmódszer, sőt a vegyes módszerek is ennek a hipermátrix-egyenletnek blokkokra bontott alakjából kiindulva, ugyanazon egységes algebrai probléma más- és másképpen lebonyolított megoldási változataiként értelmezhetők [SZABÓ-RÓZSA 1971].

Az ún. egyszerű elmozdulásmódszer a nem szinguláris \mathbf{F} mátrixból indul ki, ebből kitűnik, hogy a \mathbf{G} és az \mathbf{A} mátrix azonos lehet.

Az erőmódszert, illetve az ún. általánosított elmozdulásmódszert rendre a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_k^T & \mathbf{G}_s^T \\ \mathbf{G}_k & \mathbf{F}_{kk} & \mathbf{F}_{ks} \\ \mathbf{G}_s & \mathbf{F}_{ks}^T & \mathbf{F}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_k \\ \mathbf{s}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t}_k \\ \mathbf{t}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^T & \mathbf{G}_k^T \\ \mathbf{G}_s & \mathbf{G}_k & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_k \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

alakú felbontások szolgáltatják, előbbi esetben a harmadik blokkegyenlet a megoldás kulcsa és \mathbf{s}_s a legfontosabb ismeretlen, utóbbi esetben viszont az első a döntő, és \mathbf{u}_s játssza a fő szerepet (\mathbf{u}_s a csomóponti, \mathbf{u}_k az egyéb kiemelt pontokban fellépő elmozdulások vektora).

Ha az erőmódszer alkalmazásakor \mathbf{G}_k^T nem szinguláris, akkor a törzstartó határozott. Ha igen, de teljes sorrangú, akkor a statikailag határozatlan törzstartó módszere van előttünk és a megoldás tovább bonyolódik.

Végül a

$$\begin{bmatrix} & & \mathbf{G}_{I,I}^T & \mathbf{G}_{II,I}^T \\ & & \mathbf{G}_{I,II}^T & \mathbf{G}_{II,II}^T \\ \mathbf{G}_{I,I} & \mathbf{G}_{I,II} & \mathbf{F}_{I,I} & \mathbf{F}_{I,II} \\ \mathbf{G}_{II,I} & \mathbf{G}_{II,II} & \mathbf{F}_{I,II}^T & \mathbf{F}_{II,II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_{II} \\ \mathbf{s}_I \\ \mathbf{s}_{II} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_{II} \\ \mathbf{t}_I \\ \mathbf{t}_{II} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

alakú felbontás a vegyes módszerekhez, különösképpen az alszerkezetek módszeréhez vezet.

Az állapotegyenletre vonatkozó munkatételeket SANDER foglalta össze [1971].

Az iménti algoritmusok a másodrendű elméletben is esedések, ott kitűnik, hogy az egyensúlyi összefüggésben szerepelt \mathbf{D} mátrix egy kiegészítő merevségi mátrix szerepét játssza. Az elsőrendű elméletben ugyanis

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G},$$

a másodrendűben pedig

$$\mathbf{K}' = \mathbf{G}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{D}$$

a teljes szerkezet merevségi mátrixa, amelyet érintő merevségi mátrixnak is neveznek.

A fentebb vázolt mátrix-összefüggések elvi jelentőségűek, annál is inkább, mert másaikat, illetve általánosításaikat az egyoldalú kapcsolatokkal rendelkező-, az elasztoplasztikus-, a fizikailag nemlineáris rúdszerkezetek számításakor, a szilárd véges elemekből álló rendszerek vizsgálatakor, sőt a kapcsolt hatásoknak alávetett rendszerek esetében is megtalálhatjuk.

Jellegzetes mátrix-módszer még a merevségi mátrix-, illetve az inverzeként jelentkező hajlékonysági mátrix redukciója, amelyek algebrailag a mátrixok diadikus felbontásán alapulnak. Az utóbbi redukciós eljárással ugyancsak felépíthető az erőmódszer.

Sorba kapcsolt rudakból álló, összetett rúdrendszerek számítására előnyösen alkalmazhatók az átviteli mátrixok és a dimenziócsökkentéssel előállított, nem teljes merevségi mátrixok is [PRZEMIENIECKI 1968]. Az előbbieket az erők és elmozdulások sorozatos redukálásával, az utóbbiak a fixpont-módszer általánosításaként adódó, hiperkontinuáns-együtthatófelépítésű mátrix-egyenletrendszerek formális megoldása révén írják le az összetett rúd állapotviszonyait. Az átviteli mátrixok fontos szerepet játszanak a rúdszerkezetek lengéstanában is [PESTEL 1954; MARGUERRE 1956].

Az utóbbi idők tapasztalatai szerint gyakorlatilag az elmozdulásmódszer a leginkább alkalmas eljárás a rúdszerkezetek számítására. A transzformációk mindenkor merev alkalmazását a megfelelő helyeken elemi szilárdságtani megfontolások, illetve topológiai vezérelt gépi adminisztráció helyettesíti [GALIJEV és szerzőtársai 1974]. A megtámasztási kényszereket (illetve a reakciókat) sokszor célszerű igen szilárd rugókkal (illetve ezek erőivel) utánozni; hasonló a helyzet az esetleg előforduló merev belső elemekkel is [REZNYIKOV 1971].

A szerkezetből kivágott nyílásokat gyakran érdemes olyan szerkezeti elemekkel utánozni, amelyeken a teher hatására keletkező belső erőket alkalmas nagyságú kinematikai terhek annullálják. Így a lyukas és az egyébként módosított merevségű rendszerek számítását is sikerül az alaprendszer számítására visszavezetni, anélkül, hogy annak merevségi mátrixát megváltoztatnák [ARGYRIS 1964].

Végül igen előnyösek és elegánsak azok az eljárások, amelyek egy-egy rúdszerkezet (derékszögű négyszög alaprajzú és egyenközü rúdháló, vagy tartórács) állapotváltozóit vektorok helyett az alaprajzi elrendezéssel affin mátrixok segítségével írják le és az elmozdulásmódszer elve alapján felírt

$$\mathbf{A}_x \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_y = \mathbf{B}$$

alakú mátrixegyenleteket az együtthatómátrixok spektrális transzformációja segítségével kezelik [SZABÓ 1961], kifejezetten kis teljesítményű számológépeken. A tartórácsok hasonló jellegű, sorozatos transzformációkat alkalmazó számítására az erőmódszer keretében is mód van [MICHELBERGER 1972].

6. A véges elemek módszere és a rúdszerkezetek

A véges elemek módszerét itt a rúdszerkezetek számításával való kapcsolatában tekintjük át [ZIENKIEWICZ—CHEUNG 1971; ROZIN], de hangsúlyozni kell, hogy a módszer általában alkalmazható a szerkezetek mechanikájában előforduló szinte valamennyi kérdés megoldására [CLOUGH 1960; ROZIN 1971, 1977] és a kontinuumok matematikai fizikájában előforduló feladatokra [ZIENKIEWICZ—CHEUNG 1965].

A módszer alapvető koncepciója az, hogy a folytonos szerkezetet véges elemeire bontva, az ismeretlen állapotmezőket minden egyes szerkezeti elemen olyan mezőkkel közelíti meg, amelyeket, meghatározott számú ismert bázisfüggvény terében, ismeretlen paraméterszámok definiálnak. A kiinduló feltevés e tekintetben a Ritz-féle eljárásával rokon, de míg ott a bázisfüggvénytér globálisan esedékes, itt minden egyes szerkezeti elemen helyi érvényű [PIAN-TONG 1969].

A véges elemek módszere az állapotváltozó függvények megkeresését azon az áron redukálja a véges számú paraméter numerikus meghatározására, hogy a vizsgálat során kielégítendő mechanikai feltételeket a szerkezetnek csak véges számú pontjában illetve vonalán elégíti ki szabatosan.

A módszer a rúdszerkezetek számítási módszere általánosításának is tekinthető. Ha ugyanis a rúdszerkezet elemeit tetszés szerinti szerkezeti elemekkel (például lemez-elemekkel vagy héj-elemekkel) pótoljuk illetve kombináljuk, továbbá megengedjük, hogy az így értelmezett „általánosított rúd” ne csak két kitüntetett — kezdő- és végpontnak minősített — ponton csatlakozzék a szerkezet többi részéhez, akkor máris a rúdszerkezetek és a véges elemek egy közös modelljéhez jutunk.

Az „általánosított rúdszerkezet”, illetve a véges elemek rendszere és a szorosabb értelemben vett rúdszerkezet fizikai szerepe közötti rokonság, vagyis az a tény, hogy mindegyik egyaránt kapcsolt mechanikai elemek véges sokasága, azonnal megmagyarázza azt, hogy az általánosabb rendszer állapot-

egyenleteit az előző pontban bemutatottakkal azonos módon lehet felépíteni [SZABÓ 1973 II; SZABÓ-SCHARLE 1974]. Mind a mátrix-erőműdszer, mind pedig a mátrix-elmozdulásműdszer és a vegyes műdszerek is gépiesen alkalmazhatók, legfőképpen pedig sikerül adaptálni azt az eljárást, amely az elmozdulásműdszer gépi programozása során a teljes szerkezetnek a közös koordinátarendszerben értelmezett merevségi mátrixa összeállítására szolgált.

Az általánosított rúdszerkezeti elemek hajlékonysági, illetve merevségi mátrixának összeállítására többféle lehetőség kínálkozik, például

a) Triviális feltevést lehet alkalmazni egy elem elmozdulási, illetve feszültségmezőjére nézve [ARGYRIS 1960].

b) Klasszikus és a leginkább elterjedt eljárás a merevségi mátrix összeállításakor az, hogy az elmozdulásműdszert a fentebb említett finit feltevéssel megközelítjük. Ebből szabatos geometriai összefüggésekkel megállapítjuk az alakváltozások közelítő eloszlását, majd az anyagtörvény segítségével a feszültségeket is. Végül az egyensúlyi feltételek kielégítésére a virtuális elmozdulások tételét alkalmazzuk.

c) Amennyiben az elem hajlékonysági mátrixára van szükségünk, akkor a finit feltevés a feszültségmezőre vonatkozik. Ebből az anyagtörvény segítségével megállapíthatjuk az alakváltozások eloszlását, majd a kompatibilitási feltételek kielégítésére a virtuális erők tételét alkalmazzuk.

d) A virtuális elmozdulások tétele helyett a potenciális energia minimum-tételét, a virtuális erők tétele helyett pedig a kiegészítő munka minimum-tételét is alkalmazni lehet.

e) Ha ismét finit közelítő feltevést alkalmazunk az elmozdulásműdszere nézve, és az elemen belül az elmozdulásműdszer összevont egyensúlyi differenciálegyenleteinek viszonylag jó kielégítésére törekszünk, akkor a merevségi mátrixot a súlyozott maradékok módszerével [CRANDALL 1956] állítjuk elő. Ilyenkor a hibavektort a súlyfüggvények alterére ortogonálisnak választjuk.

Speciális esetben a Galerkin-műdszerre jutunk [SZABÓ-LEE 1969], de a merevségi mátrix ilyenkor sem szimmetrikus. Ez hátrány az előbbi eljárásokhoz képest és figyelembe kell vennünk, hogy a súlyozott maradékok módszerének alkalmazásakor a differenciálegyenletek jobb oldala úgy transzformálódik, hogy az aszimmetriának végül is nincs hibás következménye.

f) A differenciálegyenletek kielégítettségi hibáit Gauss-féle értelemben is minimalizálhatjuk. A legkisebb négyzetek módszere ismét szimmetrikus merevségi mátrixokat szolgáltat.

Az általunk most áttekintett problémakörben tehát egy-egy véges elem a rúdszerkezet egy rúdjának szerepét játszhatja, vagy pedig a bonyolultabb alakú, illetve nem homogén anyagú rudak viselkedésének közelítő jellemzésére való.

Itt említjük meg, hogy a merevségi mátrixokat az elmozdulásműdszer egyensúlyi differenciálegyenleteinek a differenciaműdszer segítségével történő finitizálása alapján is össze lehet állítani.

7. A szerkezeti és anyagi nemlinearitás

A rúdszerkezeteknek az előbbieken tárgyalt vizsgálati módszereit aránylag egyszerűen ki lehet terjeszteni olyan feladatok esetére, amelyekben előjelkorlátozásokhoz kötött, vagylagosan fellépő állapotváltozók szerepelnek. Ilyen probléma az egyoldalú — csak húzást, vagy csak nyomást elviselő — megtámasztási kényszerek, illetve belső kapcsolatok esete [DUPUIS—PROBST 1967; FRIDMAN—CSERNINA 1967; PÁCZELT 1976; ROLLER—SZENTIVÁNYI 1975], de tágabb értelemben a szakaszonként lineáris anyagtörvénnyel megközelíthető, nem lineárisan rugalmas szerkezetek vizsgálata [CORRADI DELL'A'QUA-MAIER 1969], sőt az elasztoplasztikus, illetve merev-képlékeny szerkezeteké is [MAIER 1968/II].

A probléma lényegét a legegyszerűbb eseten vázoljuk. Ha azt kell feltételeznünk, hogy a szerkezet támaszai nem viselik el a húzóerőt, mert ilyenkor elválnak az aljazattól, akkor a számításba be kell vezetni az elválás során esetleg fellépő elmozdulásjellemzőket is. Ilyen módon a rúdszerkezet állapot-egyenletét az általánosított elmozdulásmódszer ismertetésekor felírt blokkokra bontva lehet elképzelni, éspedig úgy, hogy

u_k és q_k az előjelkorlátozásnak alávetett,
 u_s és q_s a korlátozás nélküli

elmozdulásjellemzők, illetve csomóponti erőjellemzők vektorát jelenti. A q_k vektor csak nyomóerőket, az u_k vektor csak elválásokat jellemezhet és ugyanazon ponton nem léphet fel egyszerre reakció is, meg elválás is. Így

$$u_k \geq 0, \quad q_k \leq 0, \quad u_k^T q_k = 0.$$

A kompatibilitási blokkegyenletből kifejezett belső erőket az egyensúlyi blokkegyenletekbe helyettesítve, majd ez utóbbiakat redukálva a

$$K_{red} u_k - q_k = q$$

összefüggést kapjuk, amely az előjelkorlátozásokkal és a skalárszorozattal együtt egy ún. lineáris komplementer feladatot képez.

Nemlineárisan rugalmas anyagú szerkezet esetén, ha a fizikai összefüggést multilineárisnak tekintjük, a lineáris komplementer-feladatot a

$$\begin{bmatrix} G^T & & & \\ G & F & L^T & \\ & L & M & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ s \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ t \\ r \end{bmatrix} = 0$$

alakú szinguláris állapotegyenletből kiindulva lehet felírni, ahol λ a másodlagos alakváltozások, φ a kiegészítő belső erők vektora. Az egyértelműséget biztosító, egyben a feladat nemlinearitását burkoltan jellemző mellékfeltételek

$$\lambda \geq 0, \quad \varphi \leq 0, \quad \lambda^T \varphi = 0.$$

Hasonló a helyzet az elasztoplasztikus anyagú szerkezeten is, ha a plasztikus potenciál elméletéből [KALISZKY 1975] indulunk ki. Az együtttható-mátrix blokkjai közül L^T a konvex lineáris hiperfelülettel megközelített plasztikus potenciál gradiensrendszerét, M pedig a keményedési mátrixot jelenti. r állandó vektor.

L jelenléte a harmadik blokkegyenletben megfelel a képlékenységi feltételnek.

A lineáris komplementerfeladatot a kvadratikus programozás különböző ismert módszereivel oldhatjuk meg. A szimplex módszer ez irányú alkalmazását LEMKE dolgozta ki [1970] és EAVES fejlesztette tovább [1971].

Ha a szerkezeti feladatot a gradiens-módszerrel, a metsző síkok módszerével, vagy más olyan eljárások segítségével kívánjuk kezelni, amely közvetlenül felírt célkifejezés optimalizálásán alapul [KÜNZI—KRELLE 1966; BEALE 1968], akkor valamelyik variációs elvnek az adott mellékfeltételekhez csatolt diszkrét megfelelőjét kell érvényesíteni [MAIER 1968/I].

8. Nagy elmozdulást végző szerkezetek

A nagy elmozdulásokat végző rúdszerkezetek számítását vagy nemlineáris egyenletrendszerek megoldásával, vagy pedig lineáris, de implicit differenciálegyenletrendszerek kezdeti értékfeladatainak megoldásával lehet lebonyolítani [MARTIN 1969; SZABÓ 1973/II; CSERNYICH 1975; TURGUNOV 1973]. A nemlineáris feladatokat legcélszerűbben a Newton-Raphson módszer különböző változataival, például a „módosított Newton-Raphson eljárással” kezelhetjük [ODEN 1969; THURSTON 1969; HAISLER 1971] ezek konvergenciája úgy gyorsítható, hogy az eljárást a teher lépcsőkre osztása révén kombinálják az ún. növekményi módszerrel. Legcélszerűbbnek egy olyan algoritmus látszik, amelynek során egy-egy teherlépcsőben egy előrebecslő („prediktor”) és egy ellenőrző-javító („korrektor”) műveletből áll [BENEDETTI és munkatársai 1972; BACKLUND 1973]. A prediktor-lépés lényege, hogy az állapot esedékes változását lineárisnak tételezzük fel, és minthogy a terheletlen állapot pillanatától eltekintve minden más pillanatban feszültség alatt áll a rendszer, a másodrendű elméletet alkalmazzuk. A másodrendű elmélet D kiegészítő merevségi mátrixának a geometriai mátrix deriválttenzora alapján, esetleg numerikus deriválással, illetve a potenciális energia extrémum tétele alapján való meg-

határozásával az irodalom részletesen foglalkozik [WISSMAN 1965; ODEN 1966; PRZEMIENIECKI 1968; GÁSPÁR—ROLLER 1973].

Az egyensúlyi hibát az újabb állapot koordinátaival jellemzett egyensúlyi egyenletekbe való behelyettesítés révén aránylag könnyű ellenőrizni, akár egytengelyű feszültségállapotban vannak a rudak, akár nem. A kompatibilitási hibát rúdról-rúdra egy olyan eljárással célszerű megállapítani, amely a rúd kezdőpontján kialakult belső erőt és az ottani helyi koordinátarendszert átmenetileg helyesnek tekintve, egy kezdeti értékeladat numerikus integrálásával — s közben a rúd elemi szakaszain minden mechanikai feltételt közelítőleg kielégítve — megadja a rúd végéhez tartozó belső erőrendszert és a helyi koordinátarendszer állását is. Fokozza a pontosságot, ha a rudakkal kapcsolatos iménti számítások eredményeit az egyensúlyi kontrolloknál figyelembe vesszük.

Az ellenőrzés után a korrektor-művelet befejezéseként meghatározzuk az eltérésvektorokat, és a számítást ennek alkalmazásával megismételjük, a kívánt pontossági igénynek megfelelően.

Egytengelyű feszültségállapotnak alávetett szerkezeteken a rudak kompatibilitási hibáit az előbbinél sokkal egyszerűbb ellenőrizni, hiszen a rudak nemcsak az eredeti, de a megváltozott állapotban is egyenes tengelyűek maradnak. Rúd- illetve kötélhálók esetében viszont egyéb olyan nehézségek jelentkeznek, amelyek keretvázakon nem lépnek fel. A hálók ugyanis statikailag túlhatározott, elmozduló rendszerek, így kezdeti alakjuk nem lehet tetszőleges. Ezt az alakot feszítéssel kell megadni és geometriai adatainak meghatározása külön feladat [SZABÓ 1973/I; SZABÓ—KOLLÁR 1974]. Derékszögű négyszög alaprajzú és ugyanilyen szemelrendezésű hálókön ezt célszerű spektrálanálízissel megoldani [SZABÓ—BERÉNYI 1972, 1973]. Az eljárás a szinguláris terhek módszerével együtt alkalmazható olyan esetekre is, midőn az alaprajz már nem derékszögű négyszög, a háló pedig árbócokon, vagy szabad peremkábeleken nyugszik, sőt esetleg peremkábelrel szegélyezett belső nyílással is rendelkezik [SZABÓ—GÁSPÁR 1974].

A kezdeti alak megállapítása egy nemlineáris egyenletrendszer iterációs megoldásával [KULBACH—ÖIGER 1969], vagy egy sík háló fokozatos alakváltoztatásával [ARGYRIS—ANGELOPOULOS 1972] is történhetik.

A nagy elmozdulások vizsgálata általában a rúdszerkezetek stabilitási- és posztkritikus állapotvizsgálatával együttesen merül fel [GALLAGHER—PADLOG 1963]. A stabilitási vizsgálatnak konzervatív, egyparaméteres teher esetén érvényes egyensúlyi módszere alapján a kritikus paramétert egy

$$(K + \lambda A) du = 0$$

alakú általánosított sajátértékfeladathól lehet meghatározni. A sajátértékfeladat felírásakor abból a megfontolásból indulnak ki, hogy az állapotváltozást jellemző ún. egyensúlyi út extrémum-pontján vagy elágazási helyén ugyan-

ahhoz a teherhez két különböző, de egymástól csak differenciális mértékben eltérő egyensúlyi helyzet is található.

Ha a szerkezetnek a stabilitás elvesztését közvetlenül megelőző alakjához belső erők (előfeszültségek) tartoztak ugyan, de előzetes elmozdulások nem, és maguk az elmozdulások kicsik, akkor \mathbf{K} az elsőrendű elméletben előforduló merevségi mátrix, $-\mathbf{A} = \mathbf{D}$ pedig az alapterher segítségével meghatározható kiegészítő merevségi mátrix. Ha ellenben a prekritikus alak általános jellegű és nagy elmozdulások révén jött létre, akkor a \mathbf{K} illetve \mathbf{A} mátrixok a prekritikus alakban esedékes merevségi- és kiegészítő merevségi mátrixon kívül még az alapterher által determinált elmozdulásoktól és belső erőktől is függnék [SZABÓ—ROLLER 1971; ROLLER—GÁSPÁR 1974].

Mivel a prekritikus alak és a valóságos kritikus alak λ paramétere között elvileg nem lehet véges különbség, viszont az erre vonatkozó számítási feltevések kielégítettségét nem lehet előre megállapítani, a gyakorlati eljárás λ kiszámítása érdekében egy iterációt kíván [GÁSPÁR 1972].

A posztkritikus alak vizsgálata további megfontolásokat követel.

Ha a stabilitásvesztés az egyensúlyi út elágazásával következik be, akkor az elágazási ponton áthaladva, a vizsgált sajátértékfeladat legkisebb abszolút értékű sajátértéke előjelet vált. Ekkor a sajátvektor alapján megállapított saját alakkülönbség segítségével rekonstruálható egy olyan szerkezeti alak és a belső erőknek ehhez tartozó olyan változása, amely már az elágazott egyensúlyi úton való továbbjutást biztosítja [SZABÓ—GÁSPÁR 1972].

Ha a stabilitásvesztés az egyensúlyi út extrémumpontjának elérésével következik be (például átpattanás esetén, vagy akkor, amikor az elágazást egy zavaró erő lehetetlenné teszi), úgy az egyensúlyi úton a prediktorlépésben mutatkozó jelentős hibát a kapott eredmény normájának csökkentésével lehet korlátozni, a konvergenciát pedig úgy lehet biztosítani, hogy a teher paraméterének az extrémum utáni változását a kontroll-teherből a Galerkin-elv segítségével határozzuk meg.

Ügyelni kell arra, hogy az egyensúlyi út leszálló ágán a teherparamétert csökkentjük, mert a növelés visszajuttat a stabil tartomány felé és fiktív eredményt szolgáltat. Ezen a szakaszon úgy is tovább juthatunk, ha egy-egy lépésben a teherparaméter változása helyett az egyik elmozdulásjellemzőt tekintjük ismertnek, és az így képezhető fiktív elmozdulásvektor segítségével, iteratív úton keressük meg a tényleges ismeretleneket [BENEDETTI és munkatársai 1973; RIKS 1974].

IRODALOM

1. ARGYRIS, J. H.: Die Matrizen-theorie der Statik *Ingenieur Archiv*. **25** (1957), N^o. 3
2. ARGYRIS, J. H.: Energy Theorems and Structural Analysis. Butterworth, London 1960
3. ARGYRIS, J. H.: Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis. Pergamon Press 1964

4. ARGYRIS, J. H.: Continua and Discontinua. *Proc. of Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wright-Patterson AFB. Ohio 1965
5. ARGYRIS, J. H.—ANGELOPOULOS, T.: Ein Verfahren für die Formfindung von beliebigen, vorgespannten Netzwerkstrukturen. I. V. B. H. *Neunter Kongress*. Vorbericht. Zürich (1972) 69—72
6. BACKLUND, J.: Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. Doktorsavhandlingar vid Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg 1973
7. BEALE, E. M. L.: Mathematical Programming in Practice Pitmans, London 1968
8. BENEDETTI, D.—BREBBIA, C.—CEDOLIN, L.: Geometrical Non-Linear Analysis of Structures by Finite Elements. *Ist. Di Scienza e Tecn. delle Costr. del. Politec. di Milano*. Pubbl. N 543, 1972
9. BLASZKOWIAK, S.—KACZKOWSKI, Z.: Iterative Methods in Structural Analysis. Pergamon Press, Oxford 1966
10. CASTIGLIANO, A.: Théorie de l'équilibre des systemes élastiques. Turin 1879
11. CLOUGH, R. W.: The Finite Element in Plane Stress Analysis. *Proc. of the 2nd ASCE Conf. on Electronic Comp.* Pittsburgh 1960
12. CORRADI DELL'AQUA, L.—MAIER, G.: A Matrix Theory of Elastic Locking Structures. *Ist. Di Scienza e Techn. delle Costr. del Politec. di Milano*. Pubbl. N 452, 1969
13. CRANDALL, S. H.: Engineering Analysis. McGraw—Hill. New York 1956
14. CROSS, H.: Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moments *Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.* 1930
15. Черных, К. Ф.: Большие деформации твердого тела. Механика деформируемых тел и конструкции. Машиностроение, Москва 1975
16. CILMANN, C.: Anwendungen der Graphischen Statik, III. Zürich 1900
17. DUPUIS, G.—PROBST, A.: Etude d'une structure elastique soumise a des conditions unilaterales. *Journal de Mécanique*, 6 (1967), N°. 1
18. EAVES, B. C.: The Linear Complementarity Problem. *Management Science*, 17, (1971), N°. 7
19. FALKENHEIMER, H.: Systematic Analysis of Redundant Elastic Structures by Means of Matrix Calculus. *Journal of Aeronautical Sci.* 20 (1953), N°. 4
20. Филин, А. П.: Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы использования ЭЦВМ. Изд. Лит. по Строит, Ленинград—Москва 1966
21. FRAEIJIS DE VEUBEKE, B.: Matrix Methods of Structural Analysis Pergamon Press, Oxford 1963
22. Фридман, В. М.—Чернина, В. С.: Решения задачи о контракте упругих тел итерационным методом. Ж. В. М—М Ф (1967)
23. HAISLER, W. E.—STRUCKLIN, J. A.—STEBBINS, F. J.: Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Non-Linear Structural Analysis by the Direct Stiffness Method. *Proc. of AIAA/ASME 12th Structures, Structural Dyn. and Materials Conf.*, Anaheim, Calif 1971
24. JENKINS, W. M.: Matrix and Digital Computer Methods in Structural Analysis. McGraw-Hill, New York 1969
25. KALISZKY S.: Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest 1975
26. KANI, G.: Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen. Wittwer, Stuttgart 1957
27. KLEIN, B.: A Simple Method of Structural Analysis. *Journal of Aeronautical Sci.* 24, (1957), N°. 1
28. KRON, G.: Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures. *Journal of the Franklin Inst.*, 238 (1944), N°. 6
29. KRON, G.: Solving Highly Complex Elastic Structures in Easy Stages. *Journal of Appl. Mech.* 22 (1955), N°. 2
30. Кульбах, В. Р.: О начальной геометрии предварительно напряженной вантовой сети. Труды Таллинского политехнического института. Серия А. Я. 278. стр. 105—118, 1969
31. KÜNZI, M. P.—KRELLE, W.: Nonlinear Programming. Blaisdell, Waltham Massachusetts 1966
32. LANGEFORS, B.: Analysis of Elastic Structures by Matrix Transformation with Special Regard to Semimonocoque Structures. *Journal of Aeronautical Sci.* 19. (1952), N°. 7
33. LEMKE, C. E.: Recent Results on Complementarity Problems. Nonlinear Programming (cikkyűjt.), Academic Press, New York 1970
34. LEONHARDT, F.—ANDRA, W.: Die vereinfachte Trägerrostberechnung Hoffmann, Stuttgart 1950
35. LIVESLEY, R. K.: Analysis of Rigid Frames by an Electronic Digital Computer. *Engineering* (1954)

36. MAIER, G.: 1968/I A Quadratic Programming Approach for Certain Classes of Nonlinear Structural Problems. *Meccanica* **3** (1968) N°. 2
37. MAIER, G.: Quadratic Programming and Theory of Elastic Perfectly Plastic Structures. *Meccanica*. **3** (1968/II), N°. 4
38. MARGUERRE, K.: Vibrations and Stability Problems of Beams Treated by Matrices. *Journal of Math. Phys.* **35** (1956), N°. 1
39. MARTIN, H. C.: Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis. McGraw-Hill, New York 1966
40. MARTIN, H. C.: Finite Element Formulation of Geometrically Nonlinear Problems. *Proc. Japan US Seminar on Matrix Method in Struct. Anal. and Design*. Tokio 1969
42. Масленников, А. М.: Расчет статическом неопределимых систем в матричной форме. Изд. Наука, Ленинград, 1970
42. MAXWELL, J. CL.: On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames. *Phil. Mag.* (1865)
43. MICHELBERGER P.: Kocsiszekrények és alvázkeretek méretezése. Gépjárműszerkezetek méretezése (szerkesztette TERNAI Z.) 4.3 fejezet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972
44. Митропольский, М. Н.: Применение теории матриц к решению задач строительной механики. Изд. Наука, Москва 1969
45. MOHR, O.: Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen. *Der Civilingenieur* (1892)
46. ODEN, J. T.: Calculation of Geometric Stiffness Matrices for Complex Structures *AIAA Journal* **4** (1966), N°. 8
47. ODEN, J. T.: Finite Element Applications in Nonlinear Structural Analysis. *Proc. of the Conf. on Finite Element Methods*, Vanderbilt Univ., Tennessee 1969
48. OSTENFELD, A.: Die Deformationsmethode. Berlin 1926
49. PÁCZELT, I.: Some Remarks on the Approximate Solution of Frictionless Elastic Contact Problems. *Acta Techn. Hung.* **83** (1976), 337—344
51. PALOTÁS L.: Keretek elmélete és számítása. Közlekedési Kiadó, Budapest 1951
52. PESTEL, E.: Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen Stabwerken. *Abh. Braunsch. Wissenschaft. Gesellschaft* **6** (1954)
52. PIAN, T. H. H.—TONG, P.: Basis of Finite Element Methods for Solid Continua. *Int. Journ. Num. Methods in Eng.* **1** (1969)
53. PRZEMIENIECKI, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis McGraw-Hill, New York 1968
54. Рабинович и М. Методы расчемф ран. Гостегиздал. Москва
55. RALTSO, A.: Bevezetés a numerikus analízisbe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969
56. Резников, Р. Ф.: Решение задач строительной механики на ЭЦВМ. Гостехиздат, Москва 1971
57. RIKS, E.: The Incremental Solution of Some Basic Problems in Elastic Stability. *Techn. Report NLR TR 74005 U* National Aerospace Laboratory, The Netherlands 1974
58. ROLLER, B.—GÁSPÁR, Zs.: Generalization of the Stability Analysis of Elastic Systems. *Periodica Polytechnica*. (Civ. Eng. 1974), 109—119
59. ROLLER, B.—SZENTIVÁNYI, B.: Die Berechnung von Tragwerken mit bedingten Stützen und Verbindungen durch quadratische Programmierung. *Periodica Polytechnica*. (Civ. Eng.) (1975), 239—254.
60. Розин, Л. А.: Расчет гидротехнических сооружений на ИЦВМ. Метод конечных элементов. Изд. Ленингр. Унив. Ленинград 1971
61. Розин, Л. А.: Стержневые системы как системы конечных элементов. Изд. Ленингр. Унив. Ленинград 1976
62. Розин, Л. А.: Метод конечных элементов в применении к упругим системам. Стройиздат, Москва 1977
63. SANDER, G.: Application of the Dual Analysis Principle — High Speed Computing of Elastic Structures. *Proc. of the Symp. of IUTAM. Université de Liège*, 1971
64. SUTER, E.: Die Methode der Festpunkte. Berlin 1951
65. SOUTHWELL, R. V.: Relaxation Methods in Engineering Science. Oxford 1940
66. SZABÓ, J.: Mit Hilfe der kanonischen Form der Matrixfunktionen vorteilhaft zu behandelnde Aufgaben auf dem Gebiet der Statik und Festigkeitslehre. *Wiss. Zeitschrift der Techn. Univ. Dresden*. **10** (1961)
67. SZABÓ, J.: Bemerkungen zur Berechnung von seilverspannten Konstruktionen. *Acta Techn. Hung.* **75** (1973), 357—370
68. SZABÓ, J.: The Equation of State-Change of Structures. *Periodica Polytechnica* (Civ. Eng.) (1973)
69. SZABÓ, J.—BERÉNYI, M.: Numerical Analysis of Rectangular Cable Nets. *Acta Techn. Hung.* **72** (1972), 257—271

70. SZABÓ, J.—BERÉNYI, M.: Theorie und Praxis der Berechnung von Seilkonstruktionen. *IVBH Abh.* **33**—II. (1973), 193—208
71. SZABÓ, J.—GÁSPÁR, Zs.: Überkritisches Verhalten der Stabkonstruktionen. *IVBH. Neunter Kongress Vorbericht*. Zürich (1972), 69—77
72. SZABÓ, J.—GÁSPÁR, Zs.: Berechnung des auf Randkabel gespannten rechtwinkligen Seilnetzes. *Acta Tech. Hung.* **77** (1974), 365—384
73. SZABÓ, J.—KOLLÁR, L.: Függötetők számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974
74. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
75. SZABÓ, J.: Die Matrizengleichung von Stabkonstruktionen. *Acta Tech. Hung.* **71** (1971), 133—148
76. SZABÓ, J.—SCHARLE, P.: Über die Beziehung zwischen der Theorie der Stabkonstruktionen und der Kontinuumaufgabe. *Acta Techn. Hung.* **79** (1974), 51—62
77. SZABÓ, B. A.—LEE, G. C.: Derivation of Stiffness Matrices for Problems on Plane Elasticity by Galerkin Method. *Int. Journal Num. Methods in Eng.* **1** (1969)
78. Смирнов, А. Ф.—Александров, А. В.—Шапошников, Н. Н.: Расчет сооружений с применением вычислительных машин. Гостехиздат. Москва 1965
79. TURNER, M. J.—CLOUGH, R. W.—MARTIN, H. C.—TOPP, J. L.: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of Aeronautical Sci.* **23** (1956), N° 8
80. THURSTON, G. A.: Continuation of Newton's Method through Bifurcation Points. *Journal of Appl. Mech.* **36** N 3. *Trans. ASME*, **87** Series E (1969)
81. Тургунов, Н. В.: Нелинейные интегродифференциальные уравнения продольнопоперечного изгиба стержня. Нелин. Краевые задачи Мат-Физ. Киев 1973
82. WILLIAMS, D.: A General Method (Depending on the Aid of a Digital Computer) for Deriving the Structural Influence Coefficients of Aeroplane Wings. RAC Establishment, Structures 1954, N° 168.
83. WISSMAN, J. W.: Nonlinear Structural Analysis; Tensor Formation. *Proc. of Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wright Patterson AFB. Ohio 1965
84. ZIENKIEWICZ, O. C.—CHEUNG, Y. K.: Finite Elements in the Solution of Field problems. *Engineer.* **200** (1965), N° 5
85. ZIENKIEWICZ, O. C.—CHEUNG, Y. K.: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill, London 1971

Survey on the Statics of Space Latticeworks with Particular Consideration of the Up-to-date Numerical Methods. — The calculation methods of space latticeworks developed out of the two fundamental methods of the theory of mathematical elasticity: from the energy theorem and from the method of displacements in the form of their engineering application. After the extension of the application of the electronic computers, some traditional methods, as, for example, the fixed-point method, have been pushed into the background and replaced with such which depended ever more upon linear algebra. The algorithm of the programmed calculations which may be systematized on the basis of the first, second and third order theory may be built up by starting out from the state equations of the latticeworks. These algorithms with the aid of the calculation of the continua of the method of finite elements and, recently, they are also extended to the investigations of the theory of plasticity and to that of the post-critical states.

Statik der räumlichen Gitterwerke mit besonderer Rücksicht auf die modernen numerischen Methoden. — Die Rechnungsmethoden der räumlichen Gitterwerke sind aus zwei grundlegenden Methoden der mathematischen Elastizitätslehre entwickelt geworden: aus der Kraftmethode, und aus der Verschiebungsmethode als deren technische Anwendungen. Nach der Verbreitung der elektronischen Rechenanlagen wurden einige herkömmliche Verfahren, wie z.B. die Fixpunktmethode verdrängt und an deren Stelle Verfahren eingesetzt, die sich immer mehr auf die lineare Algebra stützen. Die Algorithmen der programmierten Berechnungen, die aufgrund der Theorien erster, zweiter, dritter Ordnung systematisiert werden können, können aus den Zustandsgleichungen ausgegangen aufgebaut werden. Diese Algorithmen können auch zur Berechnung der Continua mit Hilfe der Methode der endlichen Größen angewandt werden, und neuerlich wurden sie auch auf Plastizitätsuntersuchungen und auf Untersuchungen von postkritischen Zuständen ausgedehnt.

TROMP-FÜGGVÉNYEK ÚJ MÉRŐSZÁMAI

ORTUTAY MIKLÓS*

és

PETHŐ SZILVESZTER**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1977. szept. 3.]

A tanulmány a szétválasztási műveletek jellemzésére szolgáló Tromp-függvények ismeretében meghatározható új mérőszámokat — kiegyenlítő paraméter, hibaterületek, hibaterületek súlypontjainak abszcisszái, hibamomentum — ismerteti. Az új mérőszámok különböző Tromp-függvényekre — normális és lognormális eloszlásra, rezgőszitákra, LYNCH és PLITT egyenletére — le vannak vezetve. A szétválasztási művelet értékelését lehetővé tevő új mérőszámok a hagyományosokkal összehasonlításra kerültek.

1. A Tromp-függvények új mérőszámai

A szétválasztási műveletek Tromp-görbéinek függvényekkel való kezelése a szakirodalomban egyre gyakoribbá vált [3, 4, 5]. A függvényekkel kapcsolatban a szétválasztás mérőszámának a mediánt tekintik, a szétválasztás élességét az E_p és K mérőszámokkal, ill. az imperfekcióval jellemzik.

A szétválasztás helyének és élességének elméleti vizsgálata érdekében a következőkben az 1. ábra segítségével gyakorlatban elterjedt néhány Tromp-függvény új szétválasztási mérőszámait vezetjük le [1, 2, 6, 7, 8]. Az ábrán egy Tromp-függvény $1-T(x)$ komplementere van feltüntetve. z a szétválasztás terjedelme, amelynek x_a az alsó és x_f a felső határa, így a függvény a $z = x_f - x_a$ intervallumban van értelmezve.

A kiegyenlítő paraméter várható értéke a Tromp-függvény komplementere alatti területtel egyenlő

$$M(\bar{X}) = x_a + \int_{x_a}^{x_f} [1 - T(x)] dx. \quad (1)$$

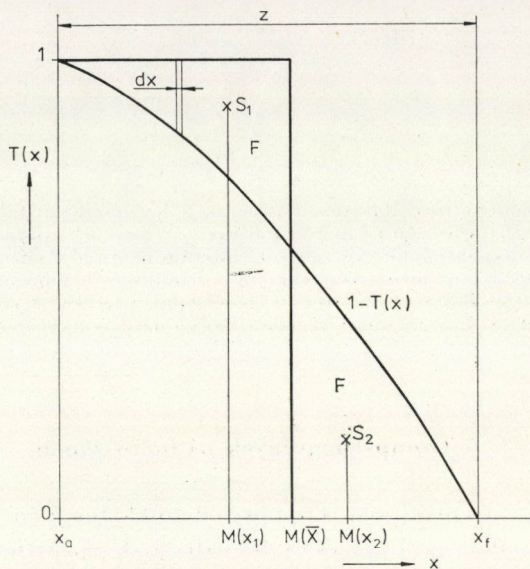
Az adott komplementer függvényt olyan éles elválasztásával lehet helyettesíteni, amely a függvénnyel azonos területet határoz meg. Alakja olyan négy-szög, amelynek magassága 1, alapja pedig $M(\bar{X})$. Ezen tulajdonságok miatt a kiegyenlítő paraméter várható értéke a szétválasztás mérőszáma.

* Dr. Ortutay Miklós, 3515. Miskolc-Egyetemváros, Vegyipari Gépek Tanszék

** Prof Dr. Pethő Szilveszter, 3515. Miskolc-Egyetemváros Ásványelőkészítési Tanszék

Az éles elválasztású Tromp-függvény az adott függvénnyel két azonos területű síkrészt, az F hibaterületeket határozza meg:

$$F = \int_{x_a}^{M(\bar{X})} T(x) dx = \int_{M(\bar{X})}^{x_f} [1 - T(x)] dx. \quad (2)$$



1. ábra. Tromp-függvény és mérőszámai

F a szétválasztás élességének mennyiségi mérőszáma, mivel segítségével a konkrét szétválasztási művelet hibás anyaghányadának nagyságára lehet következtetni.

A hibaterületek súlypontjainak $M(x_1)$ és $M(x_2)$ abszcisszái a szétválasztás élességének minőségi mérőszámai, mivel segítségükkel a konkrét szétválasztási művelet hibás anyaghányadainak minőségét lehet becsülni:

$$M(x_1) = M(\bar{X}) - \frac{1}{F} \int_{x_a}^{M(\bar{X})} T(x) [x - M(\bar{X})] dx \quad (3)$$

és

$$M(x_2) = M(\bar{X}) - \frac{1}{F} \int_{M(\bar{X})}^{x_f} [1 - T(x)] [M(\bar{X}) - x] dx. \quad (4)$$

Az $M(\bar{X})$ -re vonatkozó $M(M)$ elsőrendű nyomatékösszeg, amelyet a szakirodalomban hibamomentumnak is neveznek [6] a következő:

$$M(M) = \int_{x_a}^{M(\bar{X})} T(x) [x - M(\bar{X})] dx + \int_{M(\bar{X})}^{x_f} [1 - T(x)] [M(\bar{X}) - x] dx. \quad (5)$$

Ez utóbbi három egyenlet összehasonlítása után az elsőrendű nyomaték-összeget a hibaterületek és súlypontjainak abszcisszái segítségével a következőképpen lehet megadni:

$$M(M) = F[M(x_2) - M(x_1)]. \quad (6)$$

Az egyenlet értelmében az elsőrendű nyomatékösszeg a szétválasztás élességének mennyiségi-minőségi mérőszáma.

Az eddigiek alapján már megállapítható, hogy az új mérőszámok mindegyike a Tromp-görbe teljes lefutását az egyenletekkel megadott módon figyelembe veszik. Technológiailag értelmezhetők. A hagyományos mérőszámok ezzel szemben a Tromp-görbének csak néhány jellemző pontját, a mediánt és kvartiliszeket veszik figyelembe.

A következőkben a normális és lognormális eloszlásból, a rezgősziták Tromp-függvényéből, továbbá LYNCH és PLITT egyenletéből levezethető új mérőszámokat vizsgáljuk meg.

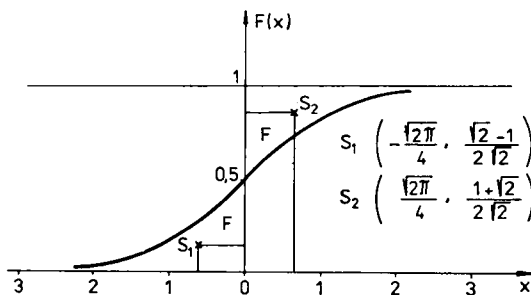
2. Normális eloszlás

A szakirodalom szerint a nehézsuszpenziós eljárások Tromp-görbéje a normális eloszlás eloszlásfüggvényét követik. A 2. ábrán m és σ paraméterű eloszlásfüggvényt látunk. A függvény szimmetrikus, ezért a medián az m várható értékkel, tehát az elválasztás paraméterével egyenlő.

Az elsőrendű nyomatékösszeg a (6) egyenlettel megadott formában

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(m + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \sigma \right) - \left(m - \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \sigma \right) \right]. \quad (7)$$

Ez az egyenlet azt jelzi, hogy az elsőrendű nyomatékösszeg ($\sigma^2/2$) független az elválasztás paraméterétől és a szórásnégyzet felével egyenlő. A hibaterület nagysága ($\sigma/\sqrt{2\pi}$) és a súlypontoknak az elválasztás paraméterétől való távolságai ($\sqrt{2\pi} \sigma/4$) m -től szintén függetlenek.



2. ábra. Normális eloszlásfüggvény és mérőszámai

3. Lognormális eloszlás

Az m és σ paraméterű lognormális eloszlás eloszlásfüggvénye (3. ábra) a gravitációs dúsítási műveletek (ülepítés, légszérelés) Tromp-görbéjének felel meg. A kiegyenlítő paraméter várható értéke itt is az eloszlás várható értékével egyenlő:

$$M(\bar{X}) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}. \quad (8)$$

A medián

$$x_{1/2} = e^m \quad (9)$$

a kiegyenlítő paraméter várható értékével ellentétben a σ paramétertől független. A két utóbbi egyenlet összehasonlításából következik, hogy

$$x_{1/2} < M(\bar{X}).$$

Az egyenlőtlenség minden esetben fennáll, ezért szisztematikus hibát követünk el, ha a szétválasztás paraméteréül $x_{1/2}$ -et választjuk.

Az elsőrendű nyomatékösszeg

$$M(M) = \frac{1}{2} e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (10)$$

itt is az eloszlás szórásnégyzetének felével egyenlő. A hibaterületek nagysága és ezek súlypontjainak abszcisszái a következők:

$$F = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \left[2\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) - 1 \right] \quad (11)$$

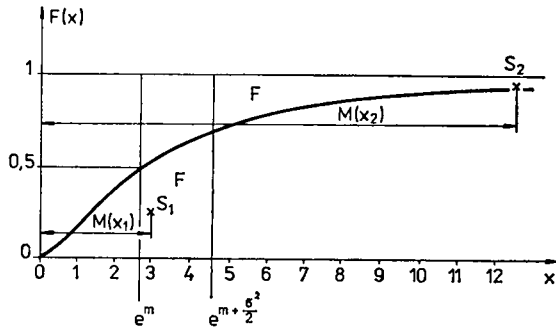
és

$$M(x_1) = \frac{1}{2} e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) + e^{\sigma^2} \Phi\left(\frac{3\sigma}{2}\right) - 1}{2\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) - 1}, \quad (12)$$

illetve

$$M(x_2) = \frac{1}{2} e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) - e^{\sigma^2} \Phi\left(-\frac{3\sigma}{2}\right)}{2\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) - 1}. \quad (13)$$

Az utóbbi három egyenletben $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvény értékét jelenti.



3. ábra. Lognormális eloszlásfüggvény és mérőszámai

4. Rezgősziták Tromp-görbéi

Az ütközés nélküli átjutás valószínűségéből a különböző nyílású rezgősziták Tromp-görbéi levezethetők. Rácssziták esetében a Tromp-függvény

$$T(x) = \left(1 - \frac{a-x}{a+b}\right)^n, \quad (14)$$

négyzetes szitanyílás esetében

$$T(x) = \left[1 - \left(\frac{a-x}{a+b}\right)^2\right]^n. \quad (15)$$

Ezekben a függvényekben a a nyílás, b a drót vagy a lemez vastagsága, tehát pozitív számok. Így az f_s szabad szitafelület rácsnyílás, ill. négyzetes nyílás esetén

$$f_s = \frac{a}{a+b} \text{ ill. } f_s = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2. \quad (16)$$

n az anyagnak a szitára való visszaeséseinek számát jelenti, tehát pozitív egész szám.

A kiegyenlítő paraméter várható értéke rácsnyílás esetében

$$M(\bar{X}) = \frac{1}{n+1} \{na - b[1 - (1 - f_s)^n]\}, \quad (17)$$

négyzetes nyílás esetében

$$M(\bar{X}) = a \left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} f_s^k\right]. \quad (18)$$

A hibafelületek nagysága

$$F = \frac{1}{n+1} \{z_1^n M(\bar{X}) + b [z_1^n - (1-f_s)^n]\}, \quad (19)$$

illetve

$$F = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \{af_s^k - [a - M(\bar{X})] z_2^k\}. \quad (20)$$

A két utóbbi egyenletben z_1 , ill. z_2 állandókat vezettük be, amelyek a szabad szítafelülettel vannak kapcsolatban:

$$z_1 = \frac{M(\bar{X}) + b}{a + b}, \quad \text{illetve} \quad z_2 = \left(\frac{a - M(\bar{X})}{a + b} \right)^2. \quad (21)$$

Rácsnyílás esetében a hibafelületek súlypontjainak abszcisszái a következők:

$$M(x_1) = \frac{(n+1) M(\bar{X})}{(n+2) \left[1 - \left(\frac{1-f_s}{z_1} \right)^{n+1} \right]} - \frac{b}{n+2}, \quad (22)$$

és

$$\begin{aligned} M(x_2) = & \frac{a^2 - M^2(\bar{X})}{2F} - \frac{a - M(\bar{X}) z_1^{n+1}}{z_1^{n+1} - (1-f_s)^{n+1}} + \\ & + \frac{(a+b)(1-z_1^{n+2})}{(n+2)[z_1^{n+1} - (1-f_s)^{n+1}]}. \end{aligned} \quad (23)$$

Négyzetes szitanyílás esetében a súlypontok abszcisszái:

$$M(x_1) = a - \frac{(a+b)^2}{2(n+1)F} [(1-z_2)^{n+1} - (1-f_s)^{n+1}] \quad (24)$$

és

$$M(x_2) = a - \frac{a - M(\bar{X})}{2F} + \frac{(a+b)^2}{2(n+1)F} [1 - (1-z_2)^{n+1}]. \quad (25)$$

Négyzetes szitanyílás esetében az elsőrendű nyomatékösszeg a következő egyszerűbb alakban adható meg:

$$M(M) = \frac{(a+b)^2}{2(n+1)} [1 - (1-f_s)^{n+1}] - \frac{a - M(\bar{X})}{2}. \quad (26)$$

A szétválasztási paraméterek számszerű értékei az 1. táblázatban rácsnyílás, a 2.-ban négyzetes nyílás esetében vannak kiszámítva. $a = 6$ mm,

1. Táblázat

Szétválasztási paraméterek rácsnyílás esetében

Szétválasztási paraméterek	Rácsések száma (n)		
	1	2	4
$M(\bar{X})$	1,0000	1,7778	2,8741
F	0,6944	0,9130	0,9130
$M(x_1)$	0,5067	0,9297	1,6387
$M(x_2)$	2,6667	3,2150	3,9627
$M(M)$	1,5000	2,0864	2,1217
$x^{1/4}$	1,5000	3,5885	4,7509
$x^{1/2}$	—	0,7279	3,1361
$x^{3/4}$	—	—	0,7279
E_p	—	—	2,0115
I	—	—	0,6414

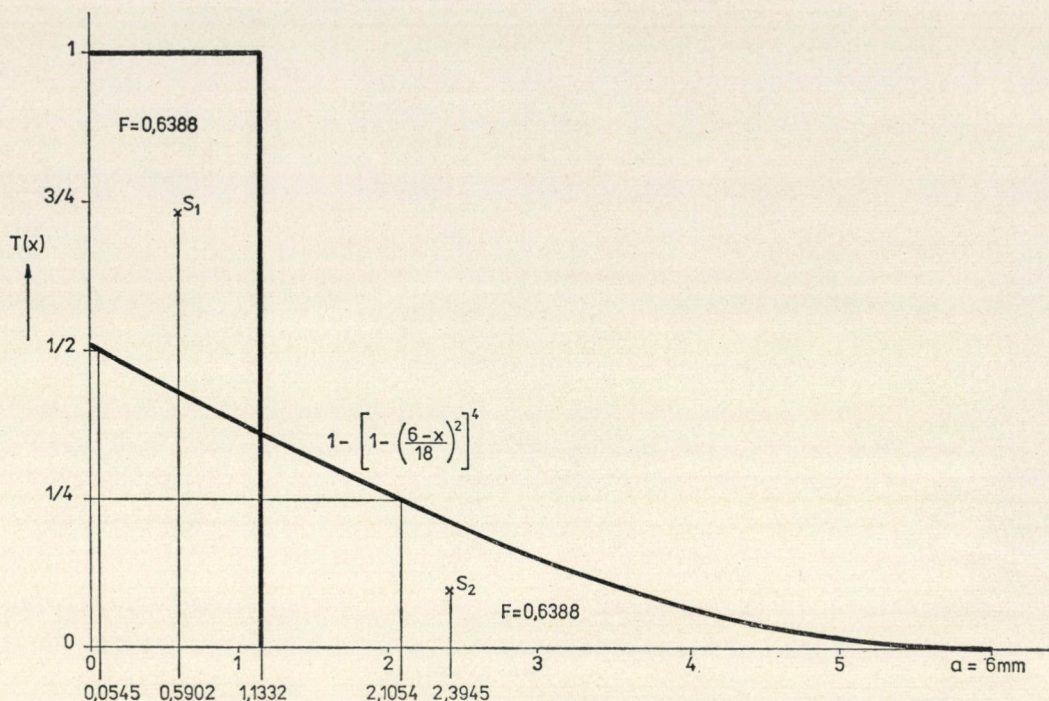
2. Táblázat

Szétválasztási paraméterek négyzetes nyílású szitalap esetében

Szétválasztási paraméterek	Rácsések száma (n)		
	3	6	12
$M(\bar{X})$	0,6234	1,1332	1,9038
F	0,4546	0,6388	0,7199
$M(x_1)$	0,3155	0,5902	1,0722
$M(x_2)$	1,9131	2,3945	2,9852
$M(M)$	0,7262	1,1525	1,3771
$x^{1/4}$	0,5570	2,1054	3,2296
$x^{1/2}$	—	0,0545	1,7356
$x^{3/4}$	—	—	0,0545
E_p	—	—	1,5876
I	—	—	0,9147

$b = 12$ mm. Rácsnyílás esetében a rácsések száma $n = 1, 2$ és 4 , négyzetes nyílás esetében pedig $n = 3, 6$ és 12 . A táblázatokban az új mérőszámok mellett a hagyományosak is megtalálhatók. Jól megállapítható, hogy aránylag kevés rácsés esetében a medián és az egyik kvartiliszt a Tromp-függvényről nem határozható meg és így a hagyományos mérőszámok nem is értelmezhetők. Ha a rácsések száma nagyobb, akkor ezek a függvényről ugyan leolvashatók, de a medián és a kiegyenlítő paraméter várható értéke között a különbség elég jelentős. (A kvartiliszek és a medián kiszámítása a (14) és (15) egyenletek segítségével úgy történik, hogy $T(x)$ helyére $1/4$ -et, illetve $3/4$ -et és $1/2$ -et helyettesítünk.)

A 4. ábrán a négyzetes nyílású rezgőszita Tromp-függvénye látható. Mivel $n = 6$, ezért az egyik kvartiliszt a függvényről nem lehet leolvasni.



4. ábra. Négyzetes nyílású rezgőszita Tromp-függvénye és mérőszámai

5. Lynch egyenlete

LYNCH (27) alatti egyenletének tulajdonságai [3]-ban részletesen elemezve vannak [4]:

$$T(x) = \frac{e^{\alpha x} - 1}{e^{\alpha x} + e^{\alpha} - 2}. \quad (27)$$

Ebben az egyenletben α állandó pozitív számot jelent. A medián minden esetben $x = 1$ -nél jelentkezik, tehát α -tól független.

A kiegyenlítő paraméter várható értéke viszont α -nak függvénye:

$$M(\bar{X}) = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha(2 - e^{\alpha})} \ln \frac{1}{e^{\alpha} - 1}. \quad (28)$$

A hibafelület nagysága α -tól és $M(\bar{X})$ -tól függ:

$$F = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha(2 - e^{\alpha})} \ln \frac{e^{M(\bar{X})}}{e^{\alpha M(\bar{X})} + e^{\alpha} - 2}. \quad (29)$$

Az elsőrendű nyomatékösszeg zárt formában nem fejezhető ki.

6. Plitt egyenlete

PLITT (30) alatti egyenletének részletes elemzését [3]-ban szintén meg lehet találni [5]:

$$T(x) = 1 - 2^{-x^\beta} \quad (30)$$

LYNCH egyenletéhez hasonlóan ez is egy paraméteres (β) függvény.

Az új mérőszámok zárt formában β függvényében nem adhatók meg. A 3. táblázatban viszont $\beta = 1, 2$ és 3 esetében az új mérőszámok számszerű értékei megtalálhatók. $\beta = 1$ és 2 esetében zárt megoldások adódtak, $\beta = 3$ esetében az új mérőszámok numerikusan lettek meghatározva. Ugyanebben a táblázatban a hagyományos mérőszámok közül a mediánt és az imperfekciót ([3]) is megtaláljuk. Mivel PLITT egyenletének mediánja β bármilyen értékénél 1, ezért az imperfekció az E_p mérőszámmal egyenlő.

3. Táblázat

Az új mérőszámok számszerű értékei PLITT egyenlete alapján

Paraméter	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$
$M(\bar{X})$	$\frac{1}{\ln 2} = 1,4427$	$\frac{1}{\ln 2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,0645$	1,0090
F	$\frac{1}{e \ln 2} = 0,5307$	$\frac{1}{\ln 2} \int_{\sqrt{\pi}/2}^{\infty} e^{-x^2} dx = 0,2236$	0,1484
$M(x_1)$	$\frac{1}{\ln 2} \left(2 - \frac{e}{2} \right) = 0,9246$	$\frac{1}{F} \left[\frac{1}{2} M^2(\bar{X}) + \frac{1}{\ln 4} (2^{-M^2(\bar{X})} - 1) \right] = 0,7784$	—
$M(x_2)$	$\frac{e}{\ln 2} = 3,9217$	$\frac{1}{F \ln 4} 2^{-M^2(\bar{X})} = 1,4706$	—
$M(M)$	$\frac{1}{e(\ln 2)^2} \left(\frac{3}{2} e - 2 \right) = 1,5906$	$\frac{2 - \ln 4 M^2(\bar{X})}{2F \ln 4 \ln 2} \int_{\sqrt{\pi}/2}^{\infty} e^{-x^2} dx = 0,1548$	—
Medián	1	1	1
$I = E_p = \frac{1}{2} \left(\beta \sqrt{2} - \sqrt{2 - \frac{\ln 3}{\ln 2}} \right)$	0,7825	0,3850	0,2560

A kiegyenlítő paraméter várható értéke 1-nél lényegesen nagyobb, ha β értéke kicsi; nagy β esetében ($\beta = 3$) jól megközelíti az 1-et. A hibafelületek súlypontjainak $M(x_2) - M(x_1)$ különbségének fele értékét az E_p mérőszámmal érdemes összehasonlítani. A súlypont távolság fele $\beta = 1$ -nél 1,4986, $\beta = 2$ -nél 0,3461; az E_p értékek pedig 0,7825 és 0,3850. Az összehasonlítás

arról győz meg, hogy az E_p mérőszám, így az I mérőszám is téves értékeléshez vezethet, mert ezek a Tromp-függvénynek a kvartiliszeken kívüli alakulásáról, amely pedig a termékek minőségét a leginkább befolyásolja, nem nyújtanak felvilágosítást.

7. Néhány következtetés

A Tromp-függvényt a terület azonosság szem előtt tartásával éles elválasztására átalakítva, a szétválasztás paraméterére és élességére vonatkozóan objektív mérőszámokat lehet levezetni.

Az éles elválasztású Tromp-függvény a kiegyenlítő paraméter várható értékét határozza meg. Az éles elválasztású és a tényleges Tromp-függvény között a két azonos nagyságú hibaterület jelentkezik, amely a szétválasztás élességének mennyiségi mérőszáma. A hibaterületek súlypontjainak abszcisszái a szétválasztás élességének minőségi mérőszámai. A két hibaterületnek a kiegyenlítő paraméter várható értékére vonatkozó elsőrendű nyomatékösszege azért mennyiségi-minőségi mérőszám, mivel ezt a hibaterület és a két súlypont abszcisszája határozza meg.

A kiegyenlítő paraméter várható értéke egy adott Tromp-görbénél egyértelműen értelmezhető, még akkor is, ha a függvénynek nincsen vagy éppen több szétválasztási mediánja van. A szétválasztás élességével kapcsolatos hagyományos mérőszámokat (E_p , κ , I) az egyik vagy esetleg mindkét kvartilisz hiányában sokszor meg sem lehet határozni, máskor problémát okoz meghatározásuk, mivel a függvény több kvartilisszel rendelkezik. Szabálytalan lefutású Tromp-görbék esetében a hagyományos mérőszámok téves értékeléshez vezetnek.

IRODALOM

1. PETHŐ, S.—TOMPOS E.: Über die statistische Auswertung der Tromp-Kurven. *Bergakademie* 21 (1969), 430—433
2. PETHŐ, S.—SMIRNOW, S.: Übergangsfunktionen und Kennwerte aufbereitungstechnischer Trennvorgänge. *Glückauf-Forschungshefte* 37 (1976), H. 5, S. 216—224
3. TRAWINSKI, H. F.: Die mathematische Formulierung der Tromp-Kurve, 1. und 2. Teil *Aufbereitungs-Technik* Nr. 5 (1976), 248—254 und Nr. 9 (1976), 449—459
4. LYNCH, A. J.: Lecture Notes on Communiton and Classification. University of Queensland, Australia 1970, 110
5. PLITT, L. R.: The Analysis of Solid-solid Separations in Classifiers. *The Canadian Mining and Metallurgical Bulletin*, April 1971, 42—47
6. MAYER, F. W.: Berechnung des neuen Trennschärfe-Kennwertes (Trennfehlermoment) aus den Teilungszahlen. T. 1. *Aufbereitungs-Technik* Nr. 12 (1971), 82—90
7. PETHŐ, S.—ORTUTAY, M.: Über die Beurteilungsmöglichkeiten einer Zweiproduktentrennung. II. Vegyipari Gépészeti Konferencia, Budapest 1975
8. PETHŐ, S.—TOMPOS, E.: About the New Index Numbers of Separation. *Acta Techn. Hung.* 78 (1974), 237—256

New Characteristics for TROMP Functions. — The paper discusses new characteristics — equilibrating parameter, error areas, abscissae of the centres of gravity of error areas, error momentum — which can be determined when knowing the Tromp functions for characterizing separation operations. The new characteristics have been calculated for various Tromp functions — normal and lognormal distributions, oscillating sieves, LYNCH and PLITT equations. The new characteristics for evaluating separation operations have been compared with the traditional ones.

Neue Maßzahlen für TROMP-Funktionen. — Die Arbeit bespricht neue Maßzahlen für die Charakterisierung von Trennoperationen — Ausgleichsparameter, Fehlerflächen, Abszissen des Schwerpunktes der Fehlerflächen, Fehlermoment — welche in Kenntnis der die Trennoperationen charakterisierenden Tromp-Funktionen bestimmt werden können. Die neuen Maßzahlen wurden für verschiedene Tromp-Funktionen — Normal- und Lognormalverteilungen, Schwingsiebe, LYNCH- und PLITT-Gleichungen — abgeleitet. Die neuen Maßzahlen, welche die Auswertung einer Trennoperation ermöglichen, wurden mit den traditionellen Maßzahlen verglichen.

AZ ELASZTOSZTATIKA EGY EGYENLŐTLENSÉGI RELÁCIÓJÁRÓL

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett: 1978. április 14-én]

E tanulmány linearisan rugalmas anyagú kontinuum két különböző elasztosztatikai peremértékfeladatához rendelt alakváltozási energiákkal kapcsolatos egyenlőtlenségi relációt bizonyít. A dolgozat tömör keresztmetszetű, homogén, izotróp anyagú prizmatikus rúd csavarási merevségére is megad egy felső korlátot. A felső korlát levezetése a bizonyított egyenlőtlenségi reláció alkalmazásával történik.

Jelölések

x, y, z	derékszögű koordináták;
e_x, e_y, e_z	egységvektorok;
$r = xe_x + ye_y + ze_z$	helyvektor;
$u = u(r) = u(r)e_x + v(r)e_y + w(r)e_z$	elmozdulásvektor;
$\varepsilon = \varepsilon(r)$	alakváltozási tenzor;
$T = T(r)$	feszültségi tenzor;
V	térbeli tartomány;
A	a V tartomány határoló felülete;
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y + \frac{\partial}{\partial z} e_z$	Hamilton-féle differenciáloperátor;
$\tilde{q} = \tilde{q}_x e_x + \tilde{q}_y e_y + \tilde{q}_z e_z$	térfogati terhelés;
$\tilde{p} = \tilde{p}_x e_x + \tilde{p}_y e_y + \tilde{p}_z e_z$	felületi terhelés;
$\tilde{u} = \tilde{u}(r)$	adott elmozdulás;
„ . ”	skaláris szorzás jele;
„ . . ”	két másodrendű tenzor kétszeres skaláris szorzatának a jele;
$(\nabla u), (u \nabla)$	az u és ∇ vektorok diadikus szorzatai;
G	csúsztató rugalmassági modulus;
m	Poisson-szám;
A_u, A_p	komplementer felületszakaszok, $A_u + A_p = A$;
n	normális egységvektor;
I	egységtenzor;
ε	az alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa;
U	alakváltozási energia;
U_{12}, U_{21}	belső idegen munkák;
W_{12}, W_{21}	külső idegen munkák;
W_1, W_2	külső saját munkák;
M_1, M_2, M	csavarónyomatékok;
L	a prizmatikus rúd hossza;
f	a prizmatikus rúd keresztmetszete által meghatározott x, y síkbeli tartomány;
g	az f tartomány határgörbéje;
A_3	a rúd palásfelülete;
A_1, A_2	a rúd $z = 0$, illetve a $z = l$ koordinátákkal kijelölt véglapjainak jele;
θ	relatív elcsavaródás szöge;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	normálfeszültségek;
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	csúsztató feszültségek;

* Dr. Ecsedi István, 3531. Miskolc, Vászonfehéritő u. 24. IV/1

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ fajlagos nyúlások;
 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ szögváltozások;
 S csavarási merevség;
 $\Phi = \Phi(x, y)$ segédfüggvény;
 C zérustól különböző állandó;
 s ívkoordináta;
 $\partial/\partial s$ a g görbe, illetve a $\widehat{P_0P}$ görbe mentén számolt derivált jele;
 $\partial/\partial v$ v normális egységvektor által kijelölt irányban számolt derivált jele;
 Egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmez.

1. Bevezetés

Jelen tanulmány az 1. ábrán vázolt, homogén, izotróp, lineárisan rugalmas anyagú kontinuum két különböző elasztostatikai peremérték-feladatának megoldásaihoz rendelt alakváltozási energiákkal kapcsolatos egyenlőtlenségi relációt bizonyít.

A dolgozat az elasztostatika szokásos feltevéseit használja (az alakváltozások és elmozdulások kicsik, érvényes a Hooke-törvény, hőhatások elhanyagolhatók, kezdeti feszültségek nincsenek stb.).

Tekintsük az 1. ábrán vázolt kontinuumot. Legyen a vizsgált kontinuum két különböző elasztostatikai peremérték-feladatának megoldása

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{r}), \quad \epsilon_1 = \epsilon_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1(\mathbf{r}),$$

illetve

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(\mathbf{r}), \quad \epsilon_2 = \epsilon_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2(\mathbf{r}),$$

ahol

$$\mathbf{T}_i \cdot \nabla + \tilde{q}_i = 0 \quad \mathbf{r} \in V, \quad (1)$$

$$\mathbf{T}_i = 2G \left(\epsilon_i + \frac{\epsilon_i}{m-2} \mathbf{I} \right) \quad \mathbf{r} \in V, \quad (2)$$

$$(\epsilon_i = \epsilon_i \dots \mathbf{I}),$$

$$\epsilon_i = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u}_i) + (\mathbf{u}_i \nabla)] \quad \mathbf{r} \in V, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_i = \tilde{\mathbf{u}}_i \quad \mathbf{r} \in A_{ui}, \quad (4)$$

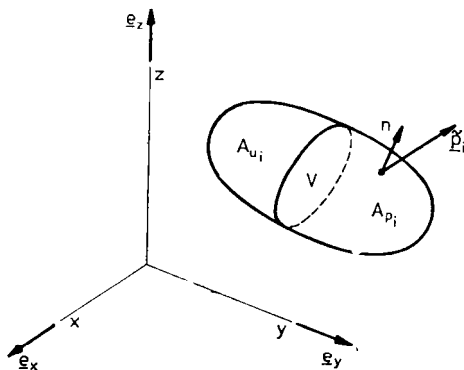
$$\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n} = \tilde{p}_i \quad \mathbf{r} \in A_{pi}, \quad (5)$$

$$(A_{ui} + A_{pi} = A; \quad i = 1, 2).$$

A test alakváltozási energiáját az

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{T}_i \dots \epsilon_i) dV \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

formulával értelmezzük [1, 2, 4].



1. ábra. Lineárisan rugalmas anyagú test

Az elasztostatikában még az alábbi energia, illetve munka jellegű mennyiségek használatosak [1, 2, 4]:

$$U_{12} = \int_V \mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 dV, \quad U_{21} = \int_V \mathbf{T}_2 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 dV \quad (7)-(8)$$

$$\begin{aligned} W_i = \int_V \tilde{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{u}_i dV + \int_A (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_i dA = \int_V \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_i dV + \\ + \int_{A_{p_i}} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{u}_i dA + \int_{A_{u_i}} (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i dA \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (9)$$

$$W_{12} = \int_V \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dV + \int_A (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_2 dA, \quad (10)$$

$$W_{21} = \int_V \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_1 dV + \int_A (\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_1 dA. \quad (11)$$

A Betti-féle tételek szerint fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$U_{12} = U_{21} = W_{12} = W_{21}. \quad (12)$$

A Claperyon-féle „saját munkaegyenlet” szerint pedig

$$2U_i = W_i \quad (i = 1, 2). \quad (13)$$

2. Egyenlőtlenségi reláció

Az alakváltozási energiára vonatkozó egyenlőtlenségi relációt az alábbi tétel rögzíti.

Tétel: Ha fennáll a

$$W_{12} \geq W_2 \quad (14)$$

egyenlőtlenségi reláció, akkor

$$U_1 \geq U_2. \quad (15)$$

Bizonyítás. Bizonyítás alapja az alakváltozási energia nem negatív volta. Tekintsük az

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (16)$$

formulát, ahol

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_2. \quad (18)$$

Fenti formulában U az

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

elmozdulásvektor mezővel,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_2$$

alakváltozási tenzormezővel,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2$$

feszültségi tenzormezővel rendelkező test alakváltozási energiáját jelenti, amelyről tudvalevő, hogy *nem negatív*.

A (16) egyenlőtlenség részletesen kifejtve az alábbi adja:

$$U_1 + U_2 - U_{12} \geq 0. \quad (19)$$

Minthogy azonban

$$U_{12} = W_{12} \quad (20)$$

és

$$2U_2 = W_2 \quad (21)$$

a (14) egyenlőtlenség szerint az

$$U_{12} \geq 2U_2 \quad (22)$$

egyenlőtlenségi relációnak fenn kell állnia.

A (19)-ből következő

$$U_1 \geq U_{12} - U_2 \quad (23)$$

egyenlőtlenségi relációt kombinálva a (22)-ből következő

$$U_{12} - U_2 \geq U_2 \quad (24)$$

egyenlőtlenséggel kapjuk a bizonyítandó

$$U_1 \geq U_2 \quad (25)$$

egyenlőtlenségi relációt.

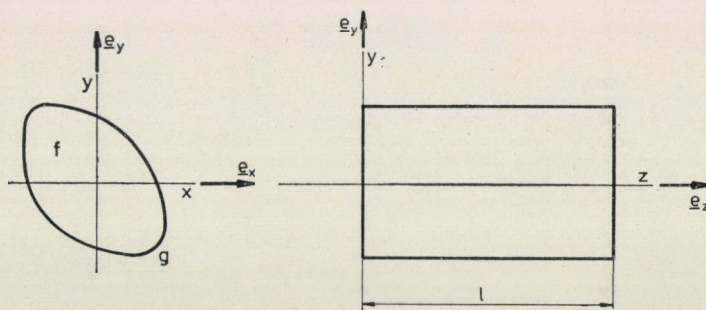
A fenti bizonyítás rövid kiegészítésével belátható, hogy az igazolt tételben szereplő *feltétel* és *állítás* megcserélhető, azaz igaz az alábbi tétel is:

Ha a (15) egyenlőtlenségi reláció fennáll, akkor biztosan igaz a (14) egyenlőtlenségi reláció is.

3. Egy alkalmazás

Tekintsük a 2. ábrán vázolt homogén, izotrop, lineárisan rugalmas anyagú tömör keresztmetszetű prizmatikus rudat. Jelölje

- f a prizmatikus rúd keresztmetszete által meghatározott tartományt;
- g az f tartomány határgörbéjét;
- ν a g határgörbe normális egységvektorát;
- $\partial/\partial\nu$ a ν irányban számolt deriváltat;
- S a csavarási merevséget;
- G a rúd anyagának csúsztató rugalmassági modulusát.



2. ábra. Prizmatikus rúd

Legyen továbbá

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y.$$

Az előzőekben bizonyított egyenlőtlenségi reláció alkalmazásával kapjuk az alábbi tételt:

Az f tartományban a

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = C \quad (26)$$

parciális differenciálegyenletet és a

$$\int_g \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{C}{2} \mathbf{R} \cdot \nu \right) ds \leq 0 \quad (27)$$

feltételt kielégítő kétváltozós $\Phi = \Phi(x, y)$ függvény segítségével az S csavarási merevség számára az

$$S \leq G \frac{\left(2 \int_f \Phi df - \int_g \Phi \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} ds \right)^2}{\int_f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 df} \quad (28)$$

felső korlát adható, ahol C tetszőleges zérustól különböző állandót jelöl.

Bizonyítás. Jelen feladatban legyen az

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{r}) \quad \boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{r}) \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1(\mathbf{r})$$

mező hármass a prizmatikus rúd Saint-Venant-féle csavarási feladatának a megoldása. Így, ha a rúd csavarási merevsége S , hossza l és a relatív elcsavarodás szöge ϑ , továbbá a véglapokat M_1 nyomatékú erőpár terheli, akkor

$$U_1 = \frac{M_1 \vartheta l}{2} = \frac{M_1^2}{2S} l. \quad (29)$$

Az $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(\mathbf{r})$, $\boldsymbol{\epsilon}_2 = \boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{r})$, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2(\mathbf{r})$ mezőhármashoz tartozó elasztostatikai peremértékfeladatot a következő előírások határozzák meg. Legyen

$$\sigma_{x2} = \sigma_{y2} = \sigma_{z2} = \tau_{xy2} = 0, \quad (30)$$

$$\tau_{xz2} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (31), (32)$$

ahol $\Phi = \Phi(x, y)$ a prizmatikus rúd keresztmetszete által meghatározott f tartományban a

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = C \quad (33)$$

parciális differenciálegyenletet elégíti ki. Ezen egyenletben C zérustól különböző, egyébként tetszőleges állandót jelöl.

A (30), (31), (32), (33) előírások következménye, hogy

$$\varepsilon_{x2} = \varepsilon_{y2} = \varepsilon_{z2} = \gamma_{xy2} = 0, \quad (34)$$

$$\gamma_{xz2} = \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \gamma_{yz2} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (35), (36)$$

$$\ddot{q}_2 = 0, \quad (37)$$

és, hogy a rúd $z = 0$, $z = l$ koordinátákkal kijelölt keresztmetszeteit

$$\tilde{p}_{x2} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tilde{p}_{y2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tilde{p}_{z2} = 0 \quad (38), (39), (40)$$

sűrűségű, míg a rúd palástját pedig a

$$\tilde{p}_{x2} = 0, \tilde{p}_{y2} = 0, \tilde{p}_{z2} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (41), (42), (43)$$

sűrűségű megoszló erőrendszer terheli. Az elmozdulás vektormezőt pedig az

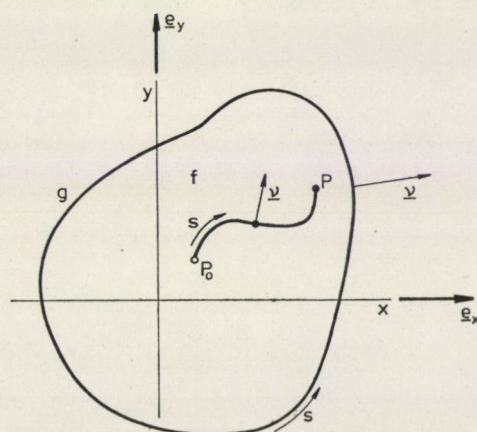
$$u_2 = \frac{C}{2G} yz, \quad (44)$$

$$v_2 = -\frac{C}{2G} xz, \quad (45)$$

$$w_2 = \frac{1}{G} \int_{\widehat{P_0 P}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{C}{2} \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) ds \quad (46)$$

formulák alapján tudjuk felépíteni. A fenti egyenletekben

- $\boldsymbol{\nu}$ a $\widehat{P_0 P}$ szimbólummal jelölt P_0 kezdőpontú P végpontú szakaszonként sima nyitott görbe normális egységvektorát,
- s az az f tartomány g határgörbéjén, illetve a $\widehat{P_0 P}$ görbén értelmezett ívkoordinátát jelöli (3. ábra).



3. ábra. A prizmatikus rúd keresztmetszete

Az eddigiek következménye, hogy

$$U_2 = \frac{l}{2G} \int_f \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] df, \quad (47)$$

$$W_2 = \frac{l}{G} \int_f \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] df. \quad (48)$$

Elementáris számolással kimutatható, hogy a rúd akármelyik keresztmetszetét

$$M_2 = 2 \int_f \Phi df - \int_g \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \Phi ds \quad (49)$$

nagyságú csavarónyomaték terheli.

A Gauss-féle integrálátalakítási tétel és a szorzat függvény deriválási szabályának az együttes alkalmazásával vezethető le W_2 alábbi kifejezése:

$$W_2 = \frac{l}{G} \left(\int_g \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial v} ds - C \int_f \Phi df \right). \quad (50)$$

Felhasználva, hogy a Saint-Venant-féle csavarási problémánál a rúd A_3 palástja terheletlen, továbbá, hogy az A_1 , A_2 véglapokon (4. ábra) működő τ_{xz1} , τ_{yz1} csúsztató feszültségek nyomatéka a z tengelyre M_1 , a következő eredményt írhatjuk fel W_{12} számára:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{A_1} (\tau_{xz1} u_2 + \tau_{yz1} v_2) d \cdot A = \\ &= \frac{Cl}{2G} \int_f (\tau_{xz1} y - \tau_{yz1} x) df = - \frac{Cl}{2G} M_1. \end{aligned} \quad (51)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy

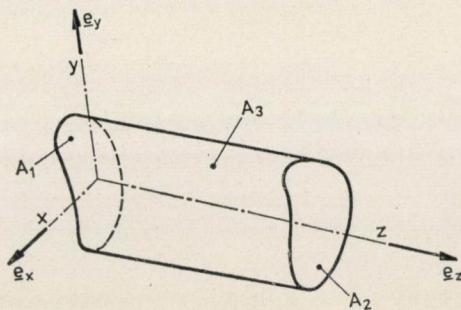
$$M_1 = M_2 = M. \quad (52)$$

Jelen példában a (14) egyenlőtlenségi reláció akkor teljesül, [tekintettel az (50), (51) egyenletekre], ha

$$- \frac{Cl}{2G} M \geq \frac{l}{G} \left(\int_g \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial v} ds - C \int_f \Phi df \right), \quad (53)$$

ahol

$$M = 2 \int_f \Phi df - \int_g \Phi \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} ds. \quad (54)$$


 4. ábra. Prizmatikus rúd A_1 , A_2 , A_3 határoló felülete

Az (53), (54) formulák kombinálásával kapjuk a

$$\int_g \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{C}{2} \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) ds \leq 0 \quad (55)$$

egyenlőtlenséget (mellékfeltételt).

A (29) és a (47) formulák eredményeinek a (15) egyenlőtlenségi relációba való helyettesítésével jutunk az alábbi eredményre:

$$\frac{M^2}{2s} l \geq \frac{l}{2G} \int_f \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] df. \quad (56)$$

Az (56) egyenlőtlenségi relációból az (54) formula alkalmazásával a bizonyítandó (28) egyenlőtlenségi relációt kapjuk.

Megjegyzés: Könnyen verifikálható, ha $\Phi = \Phi(x, y)$ a

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2, \quad (57)$$

$$\int_g \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) ds = 0 \quad (58)$$

feltételeket kielégíti, akkor a (28) egyenlőtlenségi reláció alapján az

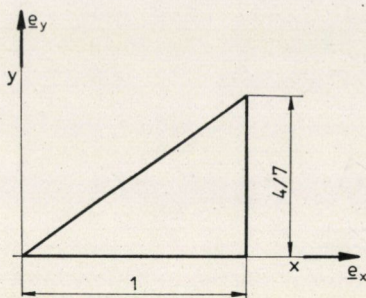
$$S \leq 2G \int_f \Phi df - G \int_g \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\nu} \Phi ds \quad (59)$$

felső korlát adható az S csavarási merevség számára.

Tekintsük az 5. ábrán vázolt tömör derékszögű háromszög alakú keresztmetszetet.

Legyen

$$\Phi = \Phi(x, y) = \frac{4}{7} xy - y^2.$$



5. ábra. Derékszögű háromszög alakú tömör keresztmetszet

Elemi számolással meggyőződhetünk arról, hogy a fenti függvény a szükséges feltételeket — (26) parciális differenciálegyenletet és a (27) egyenlőtlenségi relációt — kielégíti:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2, \quad \int_g \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} + R \cdot \gamma \right) ds = 0.$$

A (28) egyenlőtlenségi relációból [illetve az (59) egyenlőtlenségi relációból] $G = 1$ csúsztató rugalmassági modulust feltételezve az

$$S \leq 0,606$$

felső korlátot kapjuk a csavarási merevség számára. Ezen eredmény igen közel esik a GALERKIN által levezetett formulából megkapható $S = 0,595$ értékhez [3].

IRODALOM

1. TIMOSHENKO, S.—GOODIER, J. N.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill. New York—London—Toronto, Sec. Ed. 1951. pp. 146—178
2. LURJE, A. I.: Theory of Elasticity (In Russian), Izd. Nauka, Moscow, 1970, pp. 148—173, pp. 412—416
3. GALERKIN, B. L.: Torsion of Triangular Cross-sections, Izvesztija Rossz. A. N. szerija 6. 13 No. 1. (1919), pp. 118—118
4. Mechanik der Elastischen Körper. Handbuch der Physik. Band VI., s. 66—77. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1928

On an Inequality Relation of the Elasto-statics. — An inequality relation associated with the deformation energies coordinated to the elasto-static boundary-value problems of a continuum of linearly elastic material is verified. A top limiting value is also given for the torsional stiffness of a prismatic bar with full cross section made of homogeneous, isotropic material. The derivation of the top value is carried out with the aid of the verified inequality relation.

Über eine Ungleichheitsrelation der Elastostatik. — Eine mit den Verformungsenergien verbundene Ungleichheitsrelation wird behandelt, die zwei verschiedenen Randwertproblemen eines linearelastischen Kontinuums zugeordnet ist. Auch für die Torsionssteifheit eines prismatischen Stabes mit vollem Querschnitt aus homogenem isotropem Material wird eine Höchstgrenze angegeben. Die Ableitung der Höchstgrenze erfolgt mit Hilfe der nachgewiesenen Ungleichheitsrelation.

AZ EVAPOTRANSPIRÁCIÓVAL KAPCSOLATOS MAGYARORSZÁGI VIZSGÁLATOK ÁTTEKINTÉSE ÉS JAVASLAT FOLYTATÁSUK MEGSZERVEZÉSÉRE¹

DOMOKOS MIKLÓS²

E tanulmány célja: az evapotranspirációra vonatkozó ismeretek vázlatos összefoglalása, a vele kapcsolatban Magyarországon folyó észlelési és kutatási tevékenység áttekintése, valamint javaslat adása a tevékenységek jövőbeli megszervezésére, különös tekintettel az evapotranspiráció *hidrológiai* vonatkozásaira.

1. Az evapotranspiráció (ET) mibenléte

1.1 Az ET mint a vízháztartási mérleg egyik eleme

Ebben a tanulmányban az ET-t a „területi párolgás” szinonimájaként értelmezzük. Laza fogalmazásban tehát az ET valamely meghatározott — kisebb vagy nagyobb — földfelszíndarabon adott időszak alatt a talaj-, víz-, hó-, jég-, növény-, út-, tető- stb. felületekről elpárolgó és a növényzet által elpárologtatott (transpirált) vízmennyiség összege. (A gyakorlati vízgazdálkodás elsősorban általában *nagyobb* — km²-t meghaladó nagyságrendű — területek ET-jának meghatározásában érdekelt.)

Az így értelmezett ET fogalmilag pontosabban a *vízháztartási mérleg* egyik elemeként határozható meg, ezért ebben a bevezető fejezetben ezzel foglalkozunk.

A vízháztartási mérleg adott hidrológiai egységre és adott tárgyidőszakra vonatkozik.

¹ A tanulmány 1977-ben készült első változatát az evapotranspirációval kapcsolatos magyarországi vizsgálatok mintegy 20 kiváló szakembere kézhez kapta, többségük írásban véleményezte és 1977 novemberében kerekasztal-beszélgetésen is megvitatta. Szerző a tanulmány jelen, második változatának összeállításához igyekezett az írásos vélemények és a kerekasztal-beszélgetés minél több megállapítását hasznosítani. Az első változat különösen mélyreható elemzéséért, helyesbítéséért és kiegészítéséért ezúton is köszönetét fejezi ki Kovács Györgynek, a műszaki tudományok doktorának, az Országos Vízügyi Hivatal főosztályvezetőjének, Szász Gábornak, a mezőgazdasági tudományok kandidátusának, a Debreceni Agrártudományi Egyetem professzorának és SZESZTAY Károlynak, a műszaki tudományok doktorának, a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Központ tud. tanácsadójának.

² Domokos Miklós, Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Központ (VITUKI) Vizrajzi Intézete, 1095 Budapest, Kvassay Jenő út 1.

1.11 A hidrológiai egység

A vizsgált hidrológiai egység gyakran a földfelszín meghatározott darabjához (pl. egy vízgyűjtőterülethez) tartozó, általános henger alakú (vagy hasáb alakú) térrész, amelynek palástját a terület határvonalát metsző függőleges alkotók, alap- és fedőlapját pedig a felszín alatt és fölött meghatározott távolságban levő felületek képezik (TÄUMER, 1955).

A hidrológiai egységet tehát általában alul (hézagaiban levegőt és vizet tartalmazó) talaj, felül (vízpárát is tartalmazó) levegő, továbbá a mindkét részbe benyúló növényállomány tölti ki.

A hengerpalástot felül és alul elmetesző határfelületeket általában a palást által kimetszett földfelszíndarabot kiegyenlítő („sima”) felülettel nagyjából párhuzamosaknak képzeljük. A vizsgált földfelszíndarab (pl. vízgyűjtőterület) viszonylag kismértékű szintkülönbségei esetében tehát az egység alsó és felső (képzelt) határoló felületei síklapok vagy akár vízszintes síklapok is lehetnek. (Esésben levő alsó záróréteg esetében természetesen nem vízszintes, hanem a záróréteggel kb. párhuzamos határlapokat képzelünk.)

Az alsó és felső határoló felületnek (fedősíknak) a talajfelszíntől mért távolságára nem adhatók általános irányelvek; e távolságot mindig a vizsgált hidrológiai egység sajátosságainak és főképpen a vízháztartási mérleg céljának a figyelembevételével kell felvenni. Előfordulhat az is, hogy e távolság értékét célszerű tárgyidőszakról tárgyidőszakra (sőt, esetleg térbelileg is) változóznak venni.

A hidrológiai egység alsó és felső határoló felülete általános esetben a földfelszín alatt és fölött kellő távolságban (célszerűen a gyökérzóna alatt és a növényállomány fölött) helyezkedik el. (Alsó határfelületnek esetleg a talajvízszint is tekinthető.) Bizonyos különleges hidrológiai vizsgálatok esetében azonban az is előfordul, hogy a felső vagy alsó, vagy akár mindkét határoló lapot a földfelszíndarabbal majdnem-azonosnak (az utóbb említett esetben tehát majdnem-zérus vastagságúnak) tekintik. Ezekben a különleges esetekben tehát az — általánosabban értelmezett — hidrológiai egység egy-egy *szeletét* vizsgálják. Ez lehet például:

a) valamely terület fölötti, adott vastagságú légtér (alsó felület: terepfelület, felső felület: a tereppel kb. párhuzamos, adott magasságban levő képzelt felület),

b) valamely terület alatti, adott vastagságú — általában három- és kétfázisú zónát is tartalmazó — talajréteg (felső felület: terepfelület, alsó felület: a tereppel kb. párhuzamos, adott mélységben levő képzelt felület),

c) valamely terület alatti háromfázisú — vagyis levegőt és vizet is tartalmazó — talajréteg (felső felület: terepfelület, alsó felület: a legmagasabb talajvízszin),

d) valamely (vízgyűjtő) terület (felső és alsó felület: a terepfelület), mint elhanyagolható vastagságú hengerszelet, a felület mélyedéseit — vízfolyás- és állóvíz-medreket — kitöltő víztestekkel együtt.

A vizsgált hidrológiai egység kiterjedése nagyon tág határok között változhat. A befoglaló henger palástját meghatározó földfelszíndarab néhány dm²-től (liziméter) a hektár, ill. km² nagyságrenden keresztül (parcella, kis-vízgyűjtő) több ezer km²-ig (nagy folyó vízgyűjtője), sőt, akár a kontinens-méretig terjedhet. A henger magassága is tág határok közt változhatik kontinens-méretű vizsgálatnál — amikor a légtér páratömegmozgása is szerepet játszik — akár km nagyságrendű is lehet.

1.12 A tárgyidőszak

A vízháztartási mérleg tárgyidőszaka meghatározott naptári időszak (pl. év, hónap, dekád). Hossza — a vizsgálat céljától és a lehetőségektől függően — ugyancsak tág határok között változhat: elvileg másodperc vagy nap nagyságrendű is lehet (folyamatos vízmérleg, ill. részletes modellvizsgálatok esetében), de a gyakorlatban inkább dekád (mint. pl. az Országos Vízügyi Hivatal belvízi helyzetjelentései esetében), vagy akár nap, ill. év terjedelmű.

1.13 Az általános vízháztartási mérleg

A vízháztartási mérleg olyan egyenlet, amely a tárgyidőszak alatt a vizsgált hidrológiai egység határoló felületén keresztül az egységbe belépő és onnan távozó, valamint az egységben tárolódó vízmennyiség változásának mennyiségi egyensúlyát fejezi ki. Adott henger alakú hidrológiai egység adott T tárgyidőszakra vonatkozó vízháztartási mérlegének legáltalánosabb alakja tehát a következő:

$$\begin{aligned} \int_T [Q_{1,be}(t) - Q_{1,ki}(t) + Q_{2,be}(t) - Q_{2,ki}(t) + \\ + Q_{3,be}^{(l)}(t) - Q_{3,ki}^{(l)}(t) + Q_{3,be}^{(f)}(t) - Q_{3,ki}^{(f)}(t) + \\ + Q_{3,be}^{(t)}(t) - Q_{3,ki}^{(t)}(t)] dt = V_{veg}^{(l)} - V_{kez}^{(l)} + \\ + V_{veg}^{(f)} - V_{kez}^{(f)} + V_{veg}^{(t)} - V_{kez}^{(t)}, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol az egyes mérlegelemek értelmezése a következő:

- $Q_{1,be}$ és $Q_{1,ki}$ — a hidrológiai egységet határoló henger fedőfelületén át a tárgyidőszakban érkező és távozó vízmennyiség,
- $Q_{2,be}$ és $Q_{2,ki}$ — a henger alapfelületén át érkező és távozó vízmennyiség,
- $Q_{3,be}^{(l)}$ és $Q_{3,ki}^{(l)}$ — a hengerpalást felszín feletti részén át érkező és távozó vízmennyiség,
- $Q_{3,be}^{(f)}$ és $Q_{3,ki}^{(f)}$ — a hengerpalást és a földfelszín metszésvonalát tartalmazó keskeny sávot³ keressztevve érkező és távozó vízmennyiség,
- $Q_{3,be}^{(t)}$ és $Q_{3,ki}^{(t)}$ — a hengerpalást felszín alatti részén át érkező és távozó vízmennyiség,
- $V_{veg}^{(l)}$ és $V_{kez}^{(l)}$ — a hengertest felszín feletti részében — a légtérben és a növényállomány felszín feletti részében — tárolódott vízmennyiség a tárgyidőszak végén és kezdetén,

³ Ebben az értelmezésben a „keskeny sáv” tartalmazza pl. az egységbe be- és onnan kilépő vízfolyások határkeresztjelvényeit.

- $V_{\text{vég}}^{(t)}$ és $V_{\text{kezd}}^{(t)}$ — a hengerben levő földfelszín-darabot tartalmazó keskeny övben (tavakban, mocsarakban, vízfolyásmedrekben, hó- és jégtakaróban stb.), továbbá a növények felületein tározódott vízmennyiség a tárgyidőszak végén és kezdetén,
- $V_{\text{vég}}^{(t)}$ és $V_{\text{kezd}}^{(t)}$ — a hengertest felszín alatti részében — a talaj rézagaiban és a gyökérállományban — tározódott vízmennyiség a tárgyidőszak végén és kezdetén, végül,
- t — az idő.

A Q jelű elemek mértékegysége vízhozam (pl. m^3/s), a V jelűeké pedig vízmennyiség (pl. m^3).

Az (1) egyenletben szereplő vízmennyiségek közül $Q_{1,ki}$, $Q_{3,be}^{(l)}$, $Q_{3,ki}^{(l)}$, $V_{\text{vég}}^{(l)}$ és $V_{\text{kezd}}^{(l)}$, $V_{\text{vég}}^{(t)}$ és $V_{\text{kezd}}^{(t)}$ általában részben légnemű (pára), részben cseppfolyós, vagy szilárd, a többi mennyiség pedig általában cseppfolyós (esetleg részben szilárd: jég és hó alakú) vízmennyiséget jelöl.

Az (1) típusú vízháztartási mérleg — meghatározásából következően — nem veszi figyelembe a hidrológiai egységen (hengeren) belül lezajló vízmozgást (pl. a felszíni beszívargást, a növények vízemelő tevékenységét, a kondenzációt), hanem csupán ezeknek a henger felületén keresztül jelentkező eredőivel számol. Az egységen belüli vízmozgás nyomon követésének módja: az egyiséget alkotó hengertérnek szeletekre bontása kb. párhuzamos felületekkel (pl. az 1.1 szakaszban említett a)—d) típusú szeletekre) s ezek mindegyikére az ugyanazon tárgyidőszak-sorozatra vonatkozó (1) típusú vízháztartási mérlegek felírása, aminek során a két-két szelet elválasztó felületén áthaladó vízmennyiségek mindkét szelet mérlegében (ellenkező előjellel) szerepelnek (Kovács, 1977). Az a) típusú hidrológiai egység esetében például az (1) egyenlet (t) felső indexű — talajtérre vonatkozó — tagjai nemlétezőnek tekintendők, $Q_{2,be}$ a talajból történő párolgást, a felszínre törő talajvizet és a növények vízemelését, $Q_{2,ki}$ pedig a felszínről történő beszívargást jelenti.

1.14 A vízháztartási mérleg egyszerűsített változatai

Az (1) szerinti általános vízháztartási mérleget — a benne szereplő egyes mérlegelemek meghatározásának nehézségei miatt — a gyakorlatban még közelítően sem lehet felállítani. Helyette a vízháztartási mérlegnek különböző elhanyagolásokkal és összevonásokkal kapott egyszerűsített változatait alkalmazzák.

Az egyik gyakran alkalmazott egyszerűsített mérlegváltozat a következő megfontolásokon, ill. közelítő feltevéseken alapul ($\Delta Q = \int_T [Q_{be}(t) - Q_{ki}(t)] dt$, $[\text{m}^3]$, ill. $\Delta V = V_{\text{vég}} - V_{\text{kezd}}$ $[\text{m}^3]$ jelölésekkel):

- A henger alatti térből feljutó vízmennyiség elhanyagolható: $\Delta Q_{2,be} \simeq 0$.
- A légtérben lezajló vízszintes irányú páraáramlás hatása — eléggé kis hidrológiai egységek esetében — elhanyagolható: $\Delta Q_3^{(l)} \simeq 0$.
- A vízszintes irányú talajvízmozgás mérlegre gyakorolt hatása elhanyagolható: $\Delta Q_3^{(t)} \simeq 0$.
- A légtérben tározódott páramennyiség-változás hatása — eléggé kis hidrológiai egységek esetében — elhanyagolható: $\Delta V^{(l)} \simeq 0$.

e) A növényállományba beépült vízmennyiség megváltozásának hatása $\Delta V^{(f)}$ -re és $\Delta V^{(t)}$ -re elhanyagolható.

Elfogadva az a)–e) szerinti feltevéseket, továbbá bevezetve a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \int_T Q_{1,be}(t) dt &= P \text{ (csapadék)} \\ \int_T Q_{1,ki}(t) dt &= ET \text{ (evapotranspiráció vagy területi párolgás)} \\ \int_T Q_{2,ki}(t) dt &= S \text{ (az alsó határoló felületen keresztül távozó vízmennyiség, ill. általában a talajvízbe történő beszívargás),} \end{aligned}$$

továbbá *zárt vízgyűjtőterülethez* tartozó hidrológiai egységet vizsgálva, amelynek felszíni határvonalát egyetlen pontban metszi — éspedig kifelé irányulva — az

$$\int_T Q_{3,ki}^{(f)}(t) dt = R$$

lefolyás, az (1) egyenlet a következő egyszerűbb alakra hozható:

$$P - ET - S - R = \Delta V^{(f)} + \Delta V^{(t)}, \quad (2)$$

ahol tehát $\Delta V^{(f)}$ — a talajfelszínen és növényfelületen — víz, hó vagy jég alakjában — tározódott vízmennyiség megváltozása, $\Delta V^{(t)}$ pedig a talajban — részben talajnedvesség, részben talajvíz alakjában — tározódott vízmennyiség megváltozása.

$\Delta V^{(t)}$ -t sokszor célszerű összetevőire bontani:

$$\Delta V^{(t)} = \Delta V^{(t)'} + \Delta V^{(t)''}, \quad (3)$$

ahol $\Delta V^{(t)'}$ a talajnedvesség, $\Delta V^{(t)''}$ pedig a talajvíz alakjában tározódott vízmennyiség megváltozása. E jelöléssel a (2) egyszerűsített vízmérleg

$$P - ET - S - R = \Delta V^{(f)} + \Delta V^{(t)'} + \Delta V^{(t)''} \quad (4)$$

alakot ölt. További egyszerűsítési lehetőségekkel élve — vagy esetleg információhiány okozta kényszerűségből — a (2), ill. (4) szerinti mérleg esetenként még tovább is egyszerűsíthető.

Különleges körülmények és időtartományok esetében elhanyagolható lehet pl. az S beszívargás, vagy az R lefolyás, vagy a $\Delta V^{(t)'}$ talajnedvességtartalom-változás, vagy a $\Delta V^{(f)}$ felszíni tározódásváltozás értéke. Az is előfordul, hogy a (4) egyenlet egyes tagjait nem külön-külön, hanem egyeseket (pl. az S beszívargást és az ET evapotranspirációt) összevonva veszik figyelembe.

A (2) típusú — és egyéb — egyszerűsített vízmérlegek alkalmazásának elengedhetetlen feltétele, hogy meggyőződjünk az egyszerűsítések alapjául szolgáló elhanyagolások jogosságáról (Szász, 1968, 1977). Ismernünk kell az elhanyagolások okozta hibák mértékét is, mert csak így különíthetők el tőlük a mérési pontatlanságból eredő hibák. Különösen azok az esetek lehetnek kritikusak, amelyekben az elhanyagolt mérlegelemnek jelentős hatása van valamelyik figyelembe vett mérlegelem időbeli alakulására. (A (2) egyenlet felírásakor elhanyagolt $\Delta V^{(1)}$ mérlegelem — vagyis a légtérben és a növényállomány felszín feletti részében tározódott vízmennyiség megváltozása — pl. szoros kapcsolatban lehet a mérlegben figyelembe vett ET elemmel.) Az egyszerűsített mérlegek pontosságát esetenként az elhanyagolások hatását ellen-súlyozó korrekciós tagok figyelembevételével is fokozhatjuk.

Az, hogy a vízháztartási mérleg felállítása során mely elemek hanyagolhatók el gyakorlatilag elfogadható közelítéssel, a vizsgált hidrológiai egység természeti-földrajzi viszonyain kívül nagymértékben függ a választott tárgy-időszak T hosszától. Például a

$$\beta = \frac{\Sigma \Delta V}{\Sigma \int_T Q(t) dt}$$

viszony általában a tárgyidőszak hosszával fordítottan arányos; eléggé hosszú T esetében tehát az (1) vízháztartási mérleg jobb oldalán álló $\Sigma \Delta V$ mennyiség a bal oldalon álló $\Sigma \int_T Q(t) dt$ mennyiséghez képest gyakorlatilag elhanyagolhatóvá válik. A T tárgyidőszak hosszabbításának viszont határt szab a vízháztartási mérleg felállításának gyakorlati célja, amely általában a mérlegelemek lehetőleg minél rövidebb időtartamokra vonatkozó mennyiségeinek a meghatározásából áll. Ugyanakkor T rövidítésének is határt szab pl. a vízháztartási elemek észlelésének gyakorisága.

1.15 A vízháztartási mérleg felállításának célja

A vízháztartási mérleg felállításának leggyakoribb céljai:

- a) Jól mért, ill. becsült elemek ismeretében egy-egy nem, vagy csak pontatlanul mérhető vízháztartási elem (pl. ET , S vagy $\Delta V^{(t)}$) számítása.
- b) A vízháztartási folyamat — adatgenerálást, előrejelzést, vízgazdálkodási tervezést szolgáló — modellezésének előkészítése.

A vízháztartási mérleg ilyen gyakorlati hasznosításait jelentősen megnehezíti, hogy még az erős egyszerűsítéssel kapott (4) egyenletben szereplő mennyiségek közül is általában csak háromnak — P -nek, R -nek és $\Delta V^{(t)}$ -nek — az értékét ismerjük többé-kevésbé megbízhatóan, a többiekét alig. A többi elem vízháztartási mérleggel való meghatározása tehát rendkívül bizonytalan, mert

- az ismert elemek behelyettesítése után fennmaradó különbözetnek eléggé önkényes szétosztásán alapul,
- ily módon az „ismert” elemek meghatározásának összesített hibája a meghatározandó elemeket terheli (lásd még bővebben a 3.21 szakaszban).

1.16 A vízháztartási és a vízgazdálkodási mérleg kapcsolata

Az (1) egyenlet szerinti vízháztartási mérleg elemei lehetnek természetes mennyiségek, de függhetnek többé-kevésbé az emberi tevékenység hatásától is. Néhány példa az emberi tevékenység lehetséges mennyiségi hatásaira:

- $Q_{1,be}$ értékét növelheti a mezőgazdasági öntözés,
- $Q_{1,ki}$ értékét növelheti az erőművek hűtőtornyaiából történő párolgás, módosíthatja a növényállomány megváltozása,
- $Q_{2,be}$ értékét növelheti a felszínre szivattyúzott mélységi víz,
- $Q_{2,ki}$ értékét növelheti a mesterséges víztározás és az öntözés következtében fokozódó beszivárgás,
- $Q_{3,be}^{(f)}$ értékét módosíthatja a felszíni vízátvétel,
- $Q_{3,ki}^{(f)}$ értékét módosíthatják az (1) egyenlet bármely más elemét megváltoztató emberi tevékenységek, továbbá a felszíni lefolyás sebességét módosító beavatkozások (folyószabályozás, árvízi töltések stb.),
- $Q_{3,be}^{(t)}$ és $Q_{3,ki}^{(t)}$ értékét módosíthatják a hidrológiai egységben vagy annak környezetében történő felszín alatti vízkitermelések, továbbá a növényállomány változtatása,
- $\Delta V^{(f)}$ értékét módosíthatják a tározók, a lecsapolások, az ipartelepek hőki-bocsátásának hatására meggyorsuló hóolvadás stb.,
- $\Delta V^{(t)}$ értékét módosíthatja a talajvízdúsítás, az öntözés, a felszínalatti víz kitermelése.

Ha az emberi tevékenységnek az (1) szerinti vízmérlegre gyakorolt hatása összességében nem jelentős (elhanyagolható), akkor az (1) szerinti vízháztartási mérleget (természetes) *hidrológiai mérlegnek* is nevezik.

Ha viszont az emberi tevékenységnek az (1) szerinti vízmérlegre gyakorolt hatása összességében számottevő, és a vizsgálat fő célja az emberi tevékenység (meglevő vagy tervezett) vízigényei kielégíthetőségének a vizsgálata, akkor — az (1) egyenlet célszerű átfogalmazásával — *vízgazdálkodási mérleget* készítenek. Az átfogalmazás lényege, hogy a vízgazdálkodási mérleg az (1) egyenlet valamennyi természetes eredetű összetevőjét egyetlen eredő értékkel (éspedig a $Q = Q_{3,ki}^{(f)}$ kilépő vízhozammal), az emberi tevékenységtől függő összetevőket viszont részletezve, tagonként veszi figyelembe. Amíg tehát a vízháztartási mérleg lényegében fizikai jellegű számítás (az anyagmegmaradás elvének hidrológiai vetülete), addig a vízgazdálkodási mérleg inkább társadalmi-gazdasági jellegű számítás (a kereslet-kínálat összemérés vízgazdálkodási megfelelője) (UN, 1974). További jellegzetes eltérések a vízháztartási és a vízgazdálkodási mérleg között (DOMOKOS, 1972):

1. A vízháztartási mérleggel vizsgált terület nagysága — mint említettük — néhány dm^2 -től akár több millió km^2 -ig terjedhet. A vízgazdálkodási mérleg esetében ez a tartomány — gyakorlati okokból — jóval szűkebb: általában néhány km^2 -től néhány száz km^2 -ig terjed. Emellett a vízgazdálkodási mérleggel vizsgált egység a legtöbbször földfelszíndarab: légtérrel soha nem tartalmaz, és a legtöbbször a talajteret sem foglalja magában.

2. A vízháztartási mérleg tárgyidőszaka mindig valamilyen — adott hosszúságú — naptári, konkrét időszak. A vízgazdálkodási mérleg tárgyidőszaka viszont — célszerűségi okokból — többnyire eszei időszak: a valóságban össze nem függő, de összefüggőnek képzelt részidőszakok egyesítése (pl. igen sok év június hónapjainak egyesítése).

1.2 Az ET összetevői és tényezői

Az itt csupán az ET egyértelmű értelmezésének kedvéért felírt (4) vízháztartási mérleg szerint az ET a vizsgált hidrológiai egységet befoglaló henger fedőlapján át, adott tárgyidőszak alatt (pára alakjában) távozó vízmennyiség. ET-n tehát általában a hidrológiai egységben levő, levegővel érintkező mindenféle (víz-, talaj-, hó-, jég-, növényzeti-, út-, tető- stb.) felületről történő párolgásnak és a növények párologtatásának (transpirációjának) az összegét értik.

Magyarország területén az ET vízmérlegen belüli súlya jelentős. A sokévi átlagos 602 mm/év csapadékkal szemben 540 mm/év ET áll. A két érték különbsége 62 mm/év , az ország területén keletkező átlagos felszíni és felszín alatti lefolyás összegével egyenlő (KARDOS, 1975).

A hidrológiai egységen belül lezajló folyamatokat is figyelembe véve, az ET-nak általában a következő összetevői vannak:

- a) (Fizikai) párolgás
 - a talajnedvességből (amelyet részben a csapadék, részben a talajvíz táplálhat)
 - a hidrológiai egység szabad és burkolt térszínéről, továbbá a víz-, hó- és jégfelületekről,
 - a növényfelületekről (intercepciós párolgás).
- b) (Biológiai) transpiráció
 - a növényfelületekről (amelyet közvetlenül a talajnedvesség, tehát közvetve ugyancsak részben a csapadék, részben a talajvíz táplál).

Az ET tényleges (pillanatnyi) vagy akár hosszabb tárgyidőszakra vonatkozó értéke általában számos — az idő függvényében egyenként is különböző mértékben változó, részben a vizsgált hidrológiai egység belsejét, részben annak környezetét jellemző — tényezőtől függ. E tényezők két fő csoportra oszthatók:

a) A *páraleadó rendszer* tényezői: a gyökérzóna és az alatta levő talajtér fizikai és kémiai jellemzői (szemcseeloszlás, talajkolloidikai jellemzők, kultúr-állapot, tápanyagtartalom stb.), energetikai viszonyai, vízkészlete (talajvíz és talajnedvesség), a növényállomány fajtától és fejlettségétől függő sajátosságai (vízemelőképeség, a transpiráló felület mennyisége és minősége), a talajfelszín és a növényegyedek felületének nedvességállapota stb.

b) A *párafellevő rendszer* tényezői: a párolgáshoz rendelkezésre álló energia, a légtér páratartalma és a levegő mozgása (szél).

1.3 Az ET-fogalom változatai

1.3.1. Tényleges, potenciális és viszonyítási ET

Általános módszertani szempontból az ET következő értékeit szokták megkülönböztetni (PÉCZELY, 1977):

A *tényleges (aktuális) ET* a vizsgált hidrológiai egységet befoglaló henger fedőlapján, valamint palástjának talajfelszín feletti részén adott tárgyidőszak alatt távozó vízmennyiség.

A *potenciális ET* a tényleges ET-nak az a felső határértéke, amely akkor lenne mérhető, ha az ET csak a párafellevő rendszer tényezőitől függne (vagyis a páraleadó rendszer felől érkező vízutánpótlás korlátlan lenne), továbbá ha a talajfelszínt teljessé elborítaná a zöld növényzet.⁴

A potenciális ET fogalmának tudományos létjogosultsága és használatának célszerűsége erősen vitatható. SZÁSZ GÁBOR véleménye szerint (Szász, 1977): „A potenciális ET értékében sohasem választható ketté és nem ismerhető meg egyszerű módon az evaporáció és a transpiráció aránya. Fönnáll annak a lehetősége, hogy két azonos potenciális ET összegben teljesen eltérő ez az arány, vagyis azonos számértékkel két eltérő folyamatot jellemzünk. Potenciális ET-ről beszélünk akkor is, ha a talajfelszínt sűrű növényzet fedi, de abban az esetben is, ha csak elvétve található a felületen növény. Konklúzió: potenciális ET-t referencia-felület nélkül nem értelmezhetünk. Az értelmezés megköveteli a referencia-felület idő- és térbeli homogenitását. Ez utóbbi sohasem teljesül.” A potenciális ET fogalma helyett ezért a levegő párologtató képességének (más szóval az ún. tó párolgásnak vagy potenciális párolgásnak) a használatát javasolja, mivel az utóbbi a 3.1 szakaszban említett párafellevő rendszer azonos referencia-felületre vonatkoztatott sajátosságait egyértelműen tükrözi, s a gyakorlatban is könnyebben mérhető párolgásmérő kádakkal. Az

⁴ A potenciális ET THORNTWAITE-től származó eredeti definícióját PENMAN egészítette ki a talajfelszínt elborító zöld növényzet követelményével és a WMO (1974) hidrológiai útmutatója is ebben az alakban ajánlja. A kiegészített definíció nehézségei nyilvánvalók: a definíció a nagyobb földrajzi szélességek vidékén télen nem értelmezhető és általában hiányzik belőle a növénytakaró minőségének, állapotának a meghatározása.

utóbbiak mérési adatait viszont az advekciós hatások zavarják; ezektől az adatsorokat meg kell tisztítani.

A fentiekkel és az ICID evapotranspirációs konferenciájának ajánlásai-val (BALOGH, 1973) összhangban SZESZTAY (1978) bevezeti és a következőképpen definiálja a *viszonyítási ET* fogalmát: „Valamely célszerűen kiválasztott és a vegetációs időszakban meghatározott növényzettel (pl. meghatározott magasságú fűvel vagy lucernával) borított térszínelem ET-ja bőséges vízellátottság és oázis-hatástól mentes körülmények között.” A viszonyítási ET tehát fogalmilag és számértékben is különbözik a potenciális ET-től; az utóbbitól eltérő fontos tulajdonsága, hogy a tényleges ET számítással való meghatározásához gyakorlatilag bizonytalanságoktól mentes, megbízható kiindulási értéket ad.

1.3.2. Minimális, maximális és optimális ET

Növénytermesztési szempontból megkülönböztetik még a minimális, a maximális és az optimális ET-t, továbbá az öntözött növényállomány ET-ját (PETRASOVITS és BALOGH, 1974).

A *minimális ET* „olyan növényállományok pára alakú vízleadása, ahol a páraleadó rendszer vízellátottsága minimális, de a viszonylagos vízhiány még nem váltott ki a növényállományban irreverzibilis pusztulási folyamatokat” (letális állapotot).

A *maximális ET* „olyan növényállományok pára alakú vízleadása, ahol a páraleadó rendszer vízellátottsága maximális — vagyis csakis a növényállomány adottságai korlátozzák az ET-t — viszont a viszonylagos vízbőség még nem váltott ki a növényállományban irreverzibilis pusztulási folyamatokat” (letális állapotot).

Az *optimális ET* az ET-nak a minimális és a maximális ET közé eső azon értéke, amely a vizsgált növényállomány fejlődése, ill. az elérendő terméseredmény szempontjából a legkedvezőbb.

A mezőgazdasági vízgazdálkodás (lecsapolás, öntözés) célja a páraleadó rendszer vízellátottságának olyan szabályozása, hogy a tényleges ET az optimális ET-t minél jobban megközelítse. Hosszú száraz, meleg időszakban tehát az öntözés célja a tényleges ET értékének az optimális ET-hoz való közelítése.

Az optimális ET fogalmát nem a vízgazdálkodásban, ill. hidrológiában, hanem egyes növénytermesztési szakemberek használják, de közöttük sem teljes az egyetértés (SZÁSZ, 1977). Értelmezésével kapcsolatban felvetődik az a kérdés, hogy szerencsés dolog-e a növénytermesztés eredményességét elsősorban a növényállomány egyik anyageseretermékét (továbbá a párolgást) tartalmazó ET-val kapcsolatba hozni (lásd még a 4.32 szakaszban). Valószínű, hogy a terméseredmény és a biztosított vízfelvételi lehetőség — vagyis a talajnedvesség — között (a tápanyagellátottsághoz hasonlóan) szorosabb kapcsolat lenne megállapítható.

Hasonló példa: egy ipari üzem termelőképességét nem elsősorban az általa kibocsátott hulladékok (melléktermékek) mennyiségén mérik, hanem inkább a működéséhez rendelkezésre álló nyersanyag, energia, termelőeszközök és munkaerő mennyiségén. Nem azt mondják, hogy az üzemnek műszaki potenciálja optimális kihasználásához meghatározott mennyiségű hulladékot — pl. használt vizet (felmelegedett hűtővizet) — kell kibocsátania, hanem azt, hogy e célra meghatározott mennyiségű nyersanyagot, energiát és energiaszabályozót, — egyebek között hűtővizet — és munkaerőt kell az üzem számára biztosítani. Habár általában valószínű, hogy bizonyos tartományban a termék és a hulladék mennyisége arányos, az üzem ellátási szerkezetének, vagy belső működésének zavara esetében pl. az is előfordulhat, hogy a termelés csökkenésével a hulladék-kibocsátás növekedése jár együtt.

Az optimális ET-fogalom definíciójának egyértelműsége, s ezzel használatának jogossága az előbbinél általánosabb szempontból is erősen vitatható (Szász, 1977). Az ET ugyanis csak egyike az adott növényállomány terméseredményét meghatározó igen sokféle tényezőnek (talaj, időjárás, agrotechnika stb.). Az ET-n kívüli tényezők értékeinek különböző lehetséges kombinációihoz más és más „optimális” ET-érték tartozik. Adott növényállomány — egyéb tényezőktől független — optimális ET-járól mint eleve meghatározott, konstans értékről beszélni tehát nyilvánvalóan félrevezető.

2. Az ET-ra vonatkozó ismeretszerzés céljai

ET-n a tanulmány további részében — az 1. szakasz általános meghatározását némileg szűkítve — a felülről gyakorlatilag *csupán talaj- és növényfelületek* határolta hidrológiai egységekből felfelé távozó vízmennyiséget értjük. Feltesszük tehát, hogy a vizsgált egységen nincsenek hó-, jég-, út-, tetőstb. felületek, vagy ha vannak is, a terület egészének vízforgalmára gyakorolt hatásuk elhanyagolható. Az ET-fogalom ilyen egyszerűsített használatát az a tény indokolja, hogy a vízgazdálkodási gyakorlat többnyire nagy kiterjedésű, beépítetlen mezőgazdasági és erdőterületek ET-jának a meghatározásában érdekelt.

Az ET mértékére vonatkozó ismeretekre jelenleg három fő területen: a hidrológiában, a növénytermesztésben és a meteorológiában van szükség. A hidrológia inkább a hidrológiai mérleg (természetes) ET-értékét, a növénytermesztés viszont a vízgazdálkodási mérleg (emberi tevékenységgel manipulált) ET-értékét igényli (1.16. szakasz). A meteorológia — szerteágazó tevékenysége következtében — mindkét ET-változat meghatározásában érdekelt.

2.1 Hidrológiai célok

A hidrológia két fő célra igényli az ET-adatokat:

— egyrészt a vízkörforgás (elsősorban a fedőrétegben történő vízmozgás) alapvető fizikai és biológiai törvényszerűségeinek a feltárásához, kisméretű (elemi) talajtömbökre vonatkozóan,

— másrészt nagyobb hidrológiai egységek vízháztartási mérlegeinek felállításához, ill. pontosításához, részben segédváltóként (pl. a lefolyás pontosabb meghatározása vagy előrejelezhetősége érdekében), részben önálló vízgazdálkodási tervezési alapadatként (pl. a jövőben létesítendő tározó vízvesztésének becsléséhez, amely a tározó vízfelületének várható párolgása és az elárasztandó terület ET-ja közötti különbségként számítható).

2.2 *A növénytermesztéssel kapcsolatos célok*

A növénytermesztésnek, ill. mezőgazdasági vízgazdálkodásnak adott vetésszerkezet esetén elsősorban a bizonyos növényfaj termesztéséhez szükséges, leggazdaságosabb öntözővízmennyiség meghatározásához, ill. előrejelzéséhez lehet szüksége az „optimális ET” ismeretére. (Az adott jövőbeli időszakra előrejelzett „optimális ET”-ből a szükséges leggazdaságosabb öntözővízmennyiség a talaj vízkészletének és az adott időszakra előrejelzett csapadéknak az ismeretében számítható). Másrészt a mezőgazdasági távlati tervezéshez is minél pontosabban ismerni kell a növényfajtak vízigényét (HASHEMI, 1977).

2.3 *A meteorológiával kapcsolatos célok*

A meteorológia egyrészt az időjárás-előrejelzéshez (s ezen keresztül a hidrológiai előrejelzéshez), a légköri páracirkuláció egyik összetevőjeként igényli az ET ismeretét. Ugyanakkor az agrometeorológia célkitűzései összefonódnak a növénytermesztés igényeivel. A tanulmány további részében a meteorológiai célú ET-meghatározással ezért külön nem is foglalkozunk.

3. *Módszerek az evapotranspiráció becslésére*

Az ET következtében felszálló pára mennyisége *közvetlenül* (pl. pára-csapdával) a jelenleg ismeretes eszközökkel nem mérhető már csak azért sem, mert a mérőberendezésnek nem szabad észrevehetően megváltoztatnia a mérendő jelenséget. Az e célra korábban alkalmazott ún. atmometerek nem váltak be (KOVÁCS, 1977).

Közvetlen mérési lehetőség hiányában az ET meghatározására különböző közvetett mérési és számítási módszereket alkalmaznak.

A *közvetett mérési eljárások* közül a gyakorlatban elterjedt liziméteres mérés csakis kisméretű (legfeljebb néhány m² területű) elemi hidrológiai egységekre alkalmazható. A sugárzási és hőháztartási mérleg elemeinek távérzékeléses (repülőgépről, műholdról történő) területi fényképezése jelentős új távlatokat nyit ugyan nagy területek ET-ja közvetett meghatározásának

(WMO, 1974), de rutinszerű hazai alkalmazásáról még nem lehet szó. Az egyéb — részben az említett közvetett mérési eredményeket is felhasználó — *számítási módszerek* tetszőleges nagyságú (akár kontinensméretű) hidrológiai egységekre is alkalmazhatók. A közvetett mérések és számítások közös hátránya, hogy eredményeik rendkívül bizonytalanok.

3.1 Az ET mérése liziméterrel

A liziméter általában vízzáró lemezből készült, legfeljebb néhány m² alapterületű, felül nyitott, alul zárt, hasáb vagy henger alakú tartály, amelyet talajjal töltenek meg és növényvel ültetnek be, majd szabad területen a talajba süllyesztenek úgy, hogy a tartályban levő talaj szinelen a külső terepszinttel. A liziméter tehát voltaképpen egy, a terepszint alatt elhelyezkedő, fizikailag is körülhatárolt hidrológiai egység (Kovács, 1976). A körülhatárolás célja, hogy a liziméterben levő talajtömbben tározódott vízmennyiség-változások mérhetőek, s ezekből — a talajtömb felszínére hullott csapadék figyelembevételével — az alulról tartállyal körülhatárolt hidrológiai egység ET-ja számítható legyen.

3.1.1 Liziméter — típusok

A liziméternek két alapvető típusa van:

a) A *súlyliziméterrel* a víztartalomváltozás a liziméter súlyának mérése révén történik. A súlyliziméternek ismét három fajtája van:

— Az egyszerű, kettős falú, kiemelhető lizimétereket alkalmas berendezéssel *mechanikus mérleghez* szállítják, s itt határozzák meg a súlyukat. Mivel azonban a mérendő víztartalomváltozás súlya a talajjal telt liziméter súlyának elenyésző töredéke, továbbá a kezelhetőség érdekében többnyire alkalmazott kis felületű liziméterek esetében a mérési eredményeket torzító „*falhatás*” viszonylag nagy, a súlylizimétereknek ez a fajtája pontatlansága miatt Magyarországon nem vált be.

— A súlyliziméter másik fajtája esetében a lizimétertest egy folyadékkal töltött külső tartályban úszik, úgyhogy súlyváltozásai folyamatosan és *hidraulikus úton* kellő pontossággal észlelhetők, ill. regisztrálhatók. Ez a liziméter-fajta rendkívül drága; Magyarországon eddig nem is alkalmazták.

— A súlyliziméter harmadik fajtájának súlyváltozásait precíziós *erőmérő-cellák* segítségével mérik, ill. regisztrálják. Magyarország első ilyen berendezése 1978 óta működik a VITUKI Mirhó-Gyolcsi kísérleti vízgyűjtőjén.

b) A *volumetrikus (kompenzációs) liziméter* működésének elve, hogy a liziméter talajtömbjében egy automatikus szerkezet megadott (általában állandó) talajvízszintet tart. A vízszint szabályozásához szükséges vízutántöltés és leeresztés mennyiséget mérik, s ebből — a liziméter felszínére hullott csapadék figyelembevételével — számítják ET értékét. A volumetrikus lizi-

méter különleges, egyszerű változata a *Friedrich-féle liziméter*, amely csupán a talajba beszívargó vízmennyiséget méri, az ET-t nem.

Felépítés, működési elv, mérhető elemek tekintetében a lizimétereknek számtalan változata létezik; egységes (szabványosított vagy akár ajánlott) változat még nem alakult ki. A liziméterek fajtáinak hidrológiai használhatóság szempontjából való kitűnő elemzése és rendszerezése KOVÁCS (1976) tanulmányában olvasható.

Magyarország hidrológiai és növénytermesztési célú ET állomáshálózatát a tanulmány 4.1 szakasza részletesebben ismerteti.

Az NSZK 21 110 km² területű Hessen tartományában 79 liziméterállomásból álló hálózat működik (SALAY-TOUSSAINT, 1977).

3.12 A liziméteres észlelések értéke

A liziméteres észlelésnek a hidrológiában — a 2.1. szakaszban mondtaknak megfelelően — két fő célja lehet: (a) a háromfázisú zónában lejátszódó vízmozgás törvényszerűségeinek vizsgálata, (b) nagyobb területek tényleges ET-értékei becslésének megalapozása. A növénytermesztéssel kapcsolatos igény lényegében megegyezik a hidrológia (b) típusú igényével, azzal a kiegészítéssel, hogy a növénytermesztést a nagyobb területek mellett a mezőgazdasági táblák ET-jának meghatározása is érdekli. Azt kell tehát mérlegelnünk, hogy a liziméteres észlelés mennyire felel meg az (a) és (b) típusú igénynek.

Az (a) típusú igénynek a kellő körülménnyel végzett liziméter-észlelés — amint ezt magyar példa (MAJOR, 1974) is bizonyítja — kitűnően megfelel. Ezért is ajánlja KOVÁCS (1976), hogy a háromfázisú talajrétegben lejátszódó folyamatok tanulmányozására minden *hidrológiai kísérleti területet* el kell látni megfelelő liziméterrel.

Ha viszont a liziméter-észleléstől az — akár a hidrológia, akár a növénytermesztés részéről támasztott — (b) típusú igény kielégítését várjuk, kedvezőtlenebb a helyzet.

A liziméterrel történő ET-mérés célja ekkor ugyanis a pontbeli ET-értékekből nagyobb területek — pl. egy vízgyűjtő, vagy a liziméterbe ültetett növényt termesztő mezőgazdasági táblák összessége — ET-értékének a becslése.

A liziméterekkel — mégoly pontos és gondos észleléssel — meghatározott ET-értékek aligha alkalmasak erre a célra, főképpen a következő okok miatt:

1. A liziméterekkel kapott ET értékekről *kísérleti úton* sohasem dönthető el, hogy mennyire jellemzik egy-egy nagyobb terület ET értékét, mivel az utóbbi mennyiség nem mérhető és csak nagyon bizonytalanul számítható (3.2. szakasz). Ebből a szempontból a liziméter szolgáltatta ET-adatok információs értéke teljesen ismeretlen.

2. Tapasztalaton alapuló *logikai megfontolással* viszont arra kell következtetnünk, hogy a liziméteradatok általában nem jellemezhetik a liziméter

tágabb, vagy akár szűkebb környezetének *ET*-viszonyait. A liziméter fenéklapjának — mérés technikai okokból szükségszerűen — vízzáró volta miatt a benne lezajló vízmozgás általában jelentősen különbözik a környező természetes fedőrétegtől. Különösen érvényes ez az elterjedten alkalmazott állandó vízszintet tartó kompenzációs liziméterekre, amelyek rögzített talajvíztükre a természetes talajvízjárású, liziméteren kívüli területhez képest lényegesen eltérő talajnedvesség-viszonyokat teremtet. Ezért nem lehet kapcsolatban a szabad növénytermesztési tér tényleges *ET*-értékeivel, hanem valamilyen (feltételes) potenciális *ET*-t mér (MAJOR, 1974).

3. Még ha feltennénk is, hogy egy-egy liziméter kielégítő pontossággal méri a telepítési helyére vonatkozó *pontbeli ET*-értékeket, akkor sem lehetne semmilyen információnk arról, hogy ez a pontbeli érték milyen kapcsolatban van a *tágabb környezet* (pl. a vízgyűjtőterület, vagy az adott növényt termesztő táblák összessége) tényleges *ET*-értékeivel, amelyek nem mérhetők. Egy adott vízgyűjtőterület egészének *ET*-értékére a vízgyűjtőbe kellő sűrűséggel telepített liziméter-hálózat mérési adataiból, mint statisztikai mintából lehetne következtetni, ha ezek a — zavartalan állapotra vonatkozó — tényleges *ET*-értékeket szolgáltatnák. (A 2). megjegyzés szerint általában nem szolgáltatják.) Mivel a kellő sűrűségű liziméter-hálózat telepítése és észleltetése gyakorlatilag nem megvalósítható, helyette a vízgyűjtő egyetlen pontján telepített liziméterrel (vagy lizimétercsoporttal) észlelik az *ET*-t. Ezzel gyakorlatilag egy statisztikai minta egyetlen (ráadásul nem is reprezentatív) elemét állítják elő, amelynek az anyasokaságra — a vízgyűjtőterületen belül változó *ET*-adatokra — vonatkozóan gyakorlatilag nincs információs értéke.

3.2. Az *ET* számítása

A kisebb-nagyobb hidrológiai egységek (elsősorban vízgyűjtőterületek) *ET*-értékének számítására igen sokféle számítási eljárást ajánl a szakirodalom. A képletek sokfélesége és a velük kapható eredmények ellentmondásai éppen a feladat megoldásának bizonytalanságát jelzik. Egységes alkalmazásra ajánlható módszer nincs (WMO, 1977). Az utóbbi időben az *ET* közvetett meghatározására világszerte alkalmazott módszerek jellemző példagyűjteményét ismerteti és értékeli McCULLOUGH (1977) tanulmánya.

Az ajánlott közvetett módszerek öt fő csoportba sorolhatók: vízháztartási, energiaháztartási és aerodinamikai módszerek, tapasztalati képletek és modellek.

3.2.1 Vízháztartási módszerek

Valamely zárt vízgyűjtő (4) szerinti egyszerűsített vízháztartási mérlegének elemei közül viszonylag a legjobban az *R* lefolyás ragadható meg és határozható meg, hiszen ehhez egyetlen vízfolyásslvénnyel vízhozam-idősorát kell

meghatározni. Valamivel bizonytalanabbul, de általában még mindig viszonylag könnyen becsülhető a P csapadék és a $\Delta V^{(t)}$ talajvízkészlet-változás értéke. Ha ugyanis kellő sűrűségű csapadékmérő-hálózat működik a vizsgált vízgyűjtőn és közvetlen környékén, ezek tárgyidőszakbeli észlelési idősoraiból, azok területi általánosításával viszonylag pontosan becsülhető a mérleg P eleme. Hasonlóképpen kellő sűrűségű észlelő kút talajvízállás-adataiból a mérleggel vizsgált hidrológiai egységbe foglalt talajtömb fizikai paramétereinek ismeretében, $\Delta V^{(t)}$ értéke is eléggé megbízhatóan számítható. (A talajfizikai paraméterek, köztük elsősorban a hézagtürengző térbeli eloszlása azonban a gyakorlatban általában nem eléggé pontosan ismert. Ezért $\Delta V^{(t)}$ meghatározásának pontossága sem éri el P -ét). A $\Delta V^{(f)}$ felszínen tározódott vízkészlet-változás értéke gyakran elhanyagolható, s ha nem, többnyire szintén könnyen számítható.

A (4) egyszerűsített vízháztartási mérleg elemei közül általában a vizsgált hidrológiai egységet befoglaló henger fedőlapján keresztül távozó ET területi párolgás, az alaplapon keresztül S mélybe szivárgó vízmennyiség és a vizsgált talajtömb háromfázisú részében előállott $\Delta V^{(t)}$ talajnedvesség-készlet határozható meg a legnehezebben és a legpontatlanabbul.

Számítással való meghatározásuk általában azért igen nehéz, mert a (4) egyenletben egyszerre három „ismeretlen” mennyiség is szerepel. Az egyenletheől magából tehát — a többi többé-kevésbé „ismert” — mérleg-elem értékének behelyettesítésével legfeljebb e három „ismeretlen” (ET , S és $\Delta V^{(t)}$) *eredője* lenne meghatározható. (Előfordulhat, hogy bizonyos célokra — lefolyási modellvizsgálatok esetében — ez az eredő érték is hasznos adalék lehet, a felhasználóknak általában azonban ennél részletesebb információra: az egyes összetevők (elemek) ismeretére — a növénytermesztésnek pl. az ET ismeretére — van szükségük). ET , S és $\Delta V^{(t)}$ számítással való egyedi meghatározásának egyetlen módja tehát: a vizsgált hidrológiai egység, ill. a tárgyidőszak olyan megválasztása, hogy a három ismeretlen mennyiség közül kettő — gyakorlatilag elfogadható közelítéssel — elhanyagolható legyen, s a fennmaradó ismeretlennek (pl. ET -nak) a vízháztartási mérleg „záró tagja”-ként való számítása.

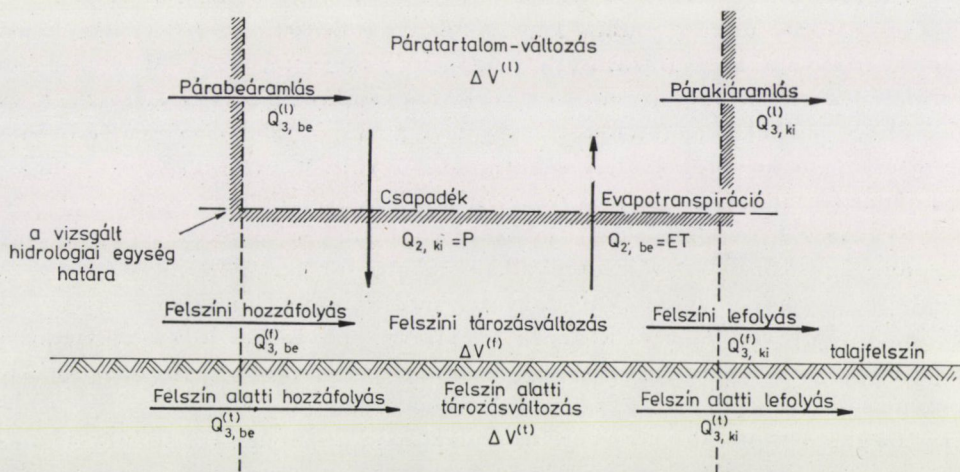
Méréssel $\Delta V^{(t)}$ értéke elvileg a háromfázisú talajtömb, mint térbeli alakzat kellő sűrűséggel elhelyezett pontjaiban, a tárgyidőszak végén és kezdetén mért talajnedvesség-értékekből lenne számítható. ET és S viszont a felső és az alsó határfelület kellő sűrűségű pontjaiban, a tárgyidőszak alatt folyamatosan észlelt pára- ill. folyadékáramlás időbeli és területi integrálásával lenne becsülhető. A vízháztartási mérleg ET , S és $\Delta V^{(t)}$ elemének méréssel való meghatározásához szükséges sűrű észlelési ponthálózat elvileg jól kiválasztott jellemző pontok ritkább halmazával is helyettesíthető lenne. Itt a fő nehézséget az jelenti, hogy a kiválasztott pontok jellemző, ill. elégséges voltának a megítéléséhez ismerni kellene az említett három vízmérleg-elem valódi értékét.

A $\Delta V^{(t)}$ talajnedvességekészlet-változásnak reprezentatív ponthálózatban rendszeresen végzett mérésekkel való becslésére CsOMA J.-né, MAJOR P. és

MOLNÁR Gy. (1976) tett eredményes kísérletet. Eljárásuk azonban igen alapos előkészítést és jelentős folyamatos észlelői ráfordítást igényelt, rutinszerű vizsgálatokra még nem ajánlható.

Végül az *ET* vízháztartási módszerrel való meghatározásának a vizsgált hidrológiai egység nagyságrendjétől függően elvileg három fő változata lehetséges.

a) Kontinens-méretű, de legalább néhány 100 000 km² kiterjedésű hidrológiai egység esetében az egység felszín feletti részére (légterére) felírt teljes



1. ábra. Az evapotranspiráció páracirkuláció figyelembevételével történő meghatározásának elvi vázlata (MAGYAR, 1973)

(1) vízháztartási mérlegnek $Q_{2,be} = ET$ -re való megoldása alkalmazható, ha a mérleg többi elemei — különösen a légköri páramozgást jellemző $Q_{3,be}^{(1)}$ és $Q_{3,ki}^{(1)}$, továbbá $\Delta V^{(1)}$ elemek — kellő pontossággal ismertek (MAGYAR, 1973); (1. ábra). Az ilyenfajta vizsgálatok feltételei ma még ritkán adóttak, eredményei — az észlelési lehetőségek jelenlegi szintjén — rendkívül bizonytalanok, s legfeljebb általános (kontinentális méretekben érvényesülő) törvényszerűségekre világítanak rá. (MAGYAR idézett vizsgálata pl. a THORNTHWAITÉ-féle tapasztalati képlettel számított *ET*-értékeket, főleg pedig ezek éven belüli megoszlását kérdőjelezi meg.)

b) Kisebb (gyakorlatilag legfeljebb néhány 1000 km² nagyságrendű) zárt vízgyűjtő meghatározott tárgyidőszakra vonatkozó *ET*-ja például a (4) egyszerűsített vízháztartási mérleg

$$ET = P - S - R - \Delta V^{(t)'} - \Delta V^{(t)''} - \Delta V^{(f)} \quad (5)$$

alakjából számítható, (amennyiben az egyszerűsített mérleg-változat alkalmazásának feltételei teljesülnek), ha a fenti egyenlet jobb oldalán álló valamennyi mennyiség kellő pontossággal ismert. Mivel ez a követelmény — amint e szakasz bevezetésében már említettük — legalábbis az S beszivárgásra és a $\Delta V^{(t)}$ talajnedvességekészlet-változásra a gyakorlatban általában nem teljesül, s ezért e mennyiségeket bizonytalanul becsülhető értékekkel kell helyettesíteni, az (5) egyenlet — eléggé munkaigényes — megoldásával kapott ET -értékeket is többnyire jelentős hiba terhelheti. Viszonylag kedvező a helyzet olyan hidrológiai egységek esetében, amelyeken S értéke elhanyagolható és ha olyan hosszú időszak (pl. egy teljes év) ET -értékét kell meghatározni, amelyben a ΔV értékek a többi mérlegelemhez képest elhanyagolhatók. Az ET vízháztartási módszerrel való meghatározására példaként említhető, hogy Magyarország területének eléggé kis vízgyűjtőkre való felosztásával, az évi mért P , R és becsült S értékek ismeretében, lényegében az (5) egyenlet vízgyűjtőről-vízgyűjtőre való megoldásával, meghatározható volt Magyarország évi átlagos ET -jének (területi párolgásának) izometrikus térképe (2. ábra), (KARDOS, 1975).

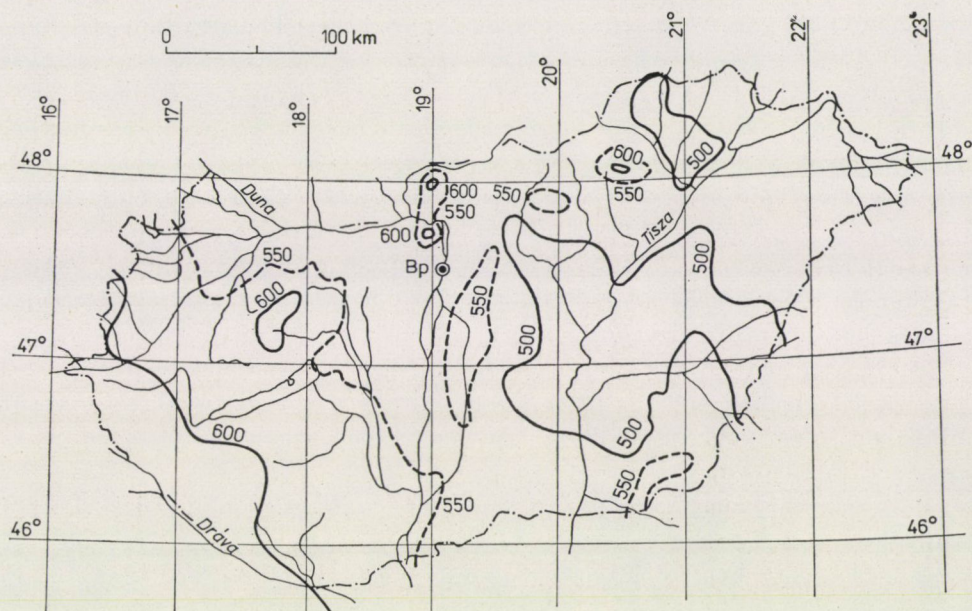
c) Az ET becslésének a vízháztartási mérlegen alapuló — ugyancsak kisebb vagy közepes területekre alkalmazható — harmadik fő módszere a fedőréteg egy-egy nagyobb (km^2 -nagyságrendű) tömbjének a vízforgalmát vizsgálja. A tömb területén és közepén telepített talajvíz-észlelő kutak vízállásadataiból, továbbá talajnedvesség- és tenzióészlelésekből, a Boussinesq-féle parciális differenciálegyenlet véges differenciákon alapuló megoldásával a módszer meghatározott időegységenként szolgáltatja a vizsgált talajtömb vízszintes és függőleges irányú vízforgalmának az értékeit. Az utóbbi a természetes (zavartalan) állapotot tükröző és — megfelelő feltételek teljesülése esetén — nagyobb régiót is jellemző tényleges ET -t is tartalmazza. A módszer koncepciója újkeletű (MAJOR, 1977/b), fokozatos gyakorlati bevezetésére Magyarországon várhatóan hamarosan sor kerül.

3.22. Energiaháztartási módszerek

Ezek a módszerek akkor alkalmazhatók az ET becslésére (BUDIKO, 1956; WMO, 1966), amikor a sugárzási egyenleg és a talajba jutó hőmennyiség jelentős, ill. meghaladja a mérési hibák nagyságrendjét. A módszert több kutató (pl. PERRIER, 1977) általános használatra ajánlja. A módszer alkalmazásához mérni kell az energiaháztartási egyenlet valamennyi elemét (a hidrológiai egységben felhalmozott energiát, a felszínre érkező és a visszavert napsugárzást, a légkörből érkező és a visszavert hosszúhullámú sugárzást, az érkező és távozó advekción energiákat stb.) Mindezeknek az elemeknek az észlelése — különösen nagyobb területekre vonatkozóan, pl. repülőgépről, műholdról — Magyarországon ma még általában nem lehetséges, legfeljebb kísérleti jelleggel, pontoszerűen alkalmazzák (pl. a VITUKI „Komlósi Imre” kísérleti telepén). A módszer gyakorlati alkalmazásáról egyelőre még nem lehet szó.

3.23. Aerodinamikai módszerek

E módszereknek az *ET* meghatározására való alkalmazását megnehezíti az a tény, hogy a turbulens kicserélődési tényező becslésére még nincs megbízható eljárás (WMO, 1966). Ezért e módszert a gyakorlatban alig használják.



2. ábra. Az évi evapotranspiráció 1941–1970. évi átlagértéke mm/év-ben (KARDOS, 1975)

3.24. Tapasztalati képletek

Kisebb-nagyobb hidrológiai egységek (vízgyűjtők) *ET*-jának az értékét a gyakorlatban a legtöbbször tapasztalati képletekkel becsülik.

Az *ET* számítására ajánlott tapasztalati képletek általában az *ET*, mint közvetlenül nem mérhető mennyiség és más, a gyakorlatban jobban észlelhető paraméterek (kádpárolgás, párányomás, globális sugárzás, talajnedvesség, szélsebesség stb.) között létesítenek kapcsolatot.

A legtöbb képlet voltaképpen a 3.21–3.23 szakaszokban tárgyalt víz- és energiaháztartási, valamint aerodinamikai módszer egyszerűsített kombinációjaként is felfogható.

A forgalomban levő számos képlet alkalmazásának közös bizonytalansága:

a) Amint ezt a 3.21 szakaszban is kifejtettük, nagyobb hidrológiai egységek *ET*-ja általában nem határozható meg megbízhatóan, hanem legfeljebb több-kevesebb (ismeretlen mértékű) bizonytalansággal becsülhető. Ezért a tapasztalati képletekkel számított *ET*-értékek megbízható ellenőrzésének nincs

meg a lehetősége. (A 3.12 szakaszban mondtak szerint a liziméteres mérések adataiból általában nem lehet következtetni nagyobb területek tényleges *ET*-jára.) Ezért az a kérdés is felmerülhet, hogy a képletek szerzői hogyan tudták ellenőrizni képleteik érvényességét.

b) A tapasztalati képletek általában egy-egy meghatározott földrajzi környezet *ET*-s törvényszerűségeit tükrözik. Az ismert Thornthwaite-féle képlet például az Egyesült Államok atlanti partvidékének középső részére érvényes. (WMO, 1974). A képletek átvételekor és mechanikus alkalmazásakor sokszor megfelelnek erről — részben azért, mert a képletek szerzői sem hangsúlyozzák kellőképpen képleteik érvényességi területét — s nem győződnék meg a más földrajzi környezetre való átvitel lehetőségeiről, ill. feltételeiről. Olyannyira, hogy pl. az ICID 1977. évi budapesti *ET*-konferenciájának egyik megállapítása szerint: „Kifejezetten ajánlható, hogy a potenciális *ET* számításakor az értékek jelölése mellett zárójelben a számítási módszer szerzőjét is meg kell nevezni” (BALOGH, 1977).

c) A tapasztalati képletek egy része túlegyszerűsíti a valóságot, pl. úgy, hogy az *ET* értékét csupán a párafelvevő rendszer tényezőinek függvényeként adják meg, nem véve figyelembe a páraleadó rendszer tényezőit (a talajnedvességet, talajtípust, növényfajt stb.).

A számos ismert tapasztalati képlet közül itt *példaként* csak néhányat említünk.

a) PENMAN képlete (PENMAN, 1956):

$$ET_{\text{ref}} = c \frac{R_n \Delta + F_a \gamma}{\Delta + \gamma}, \quad (6)$$

ahol
 ET_{ref} — a viszonyítási evapotranspiráció,
 Δ — a θ_a léghőmérsékletre tartozó párányomás-görbe meredeksége
 R_n — a nettó sugárzás
 E_a — származtatott paraméter, amely egyrészt a szélsőségtől, másrészt az $(e_s - e_a)$ különbségtől függ, ahol e_s a θ_a hőmérsékletre tartozó telítési párányomás, e_a pedig a tényleges (mért) párányomás
 γ — a pszichrométer-állandó ($^{\circ}\text{C}$ mértékegység és 1000 mb légnyomás esetében $\gamma = 0,61$)
 c — az ET_{ref} és a szabad-vízfelszín párolgás hányadosa; $0,6 \leq c \leq 0,8$; átlagosan $c = 0,75$

ET_{ref} -ből a tényleges *ET* értéke további redukcióval számítandó.

b) ANTAL Emánuel magyarországi viszonyokra kidolgozott, a Thornthwaite-képletet is hasznosító formulája (ANTAL, 1968):

$$ET_{\text{ref}} = 0,9 \cdot (E - e)^{0,7} \cdot (1 + at)^{4,8} \text{ [mm/nap]} \quad (7)$$

ahol E a t középhőmérsékletre tartozó telítési párányomás, e a levegő tényleges párányomása-nak napi középértéke és $a = \frac{1}{273}$, továbbá

$$ET_{\text{tényl.}} = \alpha ET_{\text{ref.}} \quad (8)$$

ahol

$$\alpha = \frac{\sigma + B}{1 + B} \sigma, \quad (9)$$

ahol B az ún. növény-állandó, amelynek mérésből származó értékei pl. ANTAL és PORZA (1966) tanulmányából vehetők, míg

$$\sigma = \frac{\frac{w}{n} - \frac{w_0}{n}}{1 - \frac{w_0}{n}} \quad (10)$$

Itt w , ill. w_0 a talaj fedőrétegének átlagos térfogat-százalékban kifejezett pillanatnyi, ill. minimális nedvességtartalma, n pedig a porozitása.

Antal képletpárjának kiváló előnye, hogy a párafellevő rendszer ((7) képlet) és a páraleadó rendszer ((8) képlet) hatásait egyaránt figyelembe veszi.

c) Francia nyelvterületen elterjedten alkalmazzák a potenciális *ET* becslésére szolgáló, ugyancsak empirikus Turc-féle képletet (TURC, 1963).

d) J. JAWORSKI—VAN BAVEL (1966) és BAC (1974) korábbi kutatási eredményeinek felhasználásával — a lengyelországi Wilga-folyó 165 km²-es vízgyűjtőjén észlelt adatokból a következő összefüggést vezette le (JAWORSKI, 1977):

$$ET = \frac{10 Q_c}{L} (1 - \alpha) - 0,86 E_0 - 19,6 \quad (11)$$

ahol

ET — a vízgyűjtőterület *tényleges* evapotranspirációja, mm/hónap

Q_c — a rövidhullámú globális sugárzás összege, cal/cm² · hónap

L — a víz látens párolgási hője, cal/g

α — a vízgyűjtőterület átlagos visszaverési tényezője (a visszavert és az érkező rövidhullámú sugárzás hányadosa)

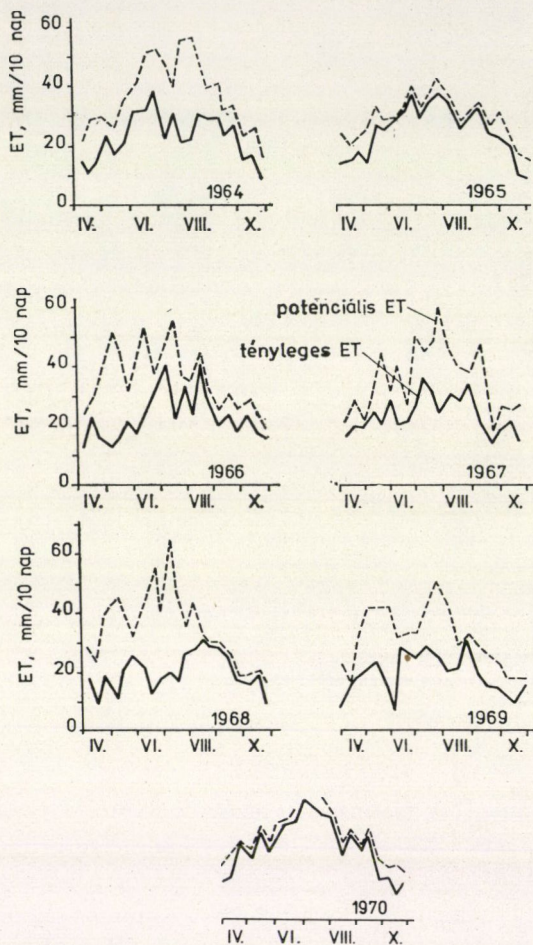
E_0 — a szabad vízfelszín párolgása (GGI—3000 típusú káddal mért, vagy BAC (1974) képletével számított adat), mm/hónap

A (11) képletbe E_0 -nak BAC szerinti kifejezését helyettesítve, az *ET* vízgyűjtő-evapotranspiráció Q_c , továbbá a havi átlagos párányomás-hiány és szélsőségség ismeretében számítható.

JAWORSKI a (11)-hez hasonló szerkezetű képletet ajánl az *ET* napi és óránkénti értékeinek számítására. A képletek állandóinak meghatározásához a Wilga-vízgyűjtő részletesen észlelt vízháztartási (csapadék, lefolyás, talajnedvesség- és talajvíz-) adatait használta fel. Vizsgálatai szerint a (11) képlet az Osownica folyó 233 km²-es vízgyűjtőjére — a képlet állandóinak kismértékű módosításával — szintén érvényesnek bizonyult.

e) Számos tapasztalati módszer a párolgásmérő káddal mért szabad vízfelszín-párolgás és az *ET* között tételez fel egyszerű — az a) alatti Penman-képlet c tényezőjéhez hasonló — szorzótényezős kapcsolatot (WMO, 1974; MAGYAR, 1974). Hogy ez a közelítés mennyire durva, azt jól érzékelteti a 3. ábra, amely a potenciális párolgás és a tényleges *ET* egyidejű idősorait mutatja

be (Szász, 1974). Az ábrán látható, hogy a két érték viszonya semmiesetre sem tekinthető konstansnak. Más, összetettebb (a páraleadó rendszer hatását is érvényesítő) képletek az ET és a — kádpárolgásból vagy más meteorológiai adatokból számítható, vagy pedig közvetlenül észlelt — E_{t0} potenciális párol-

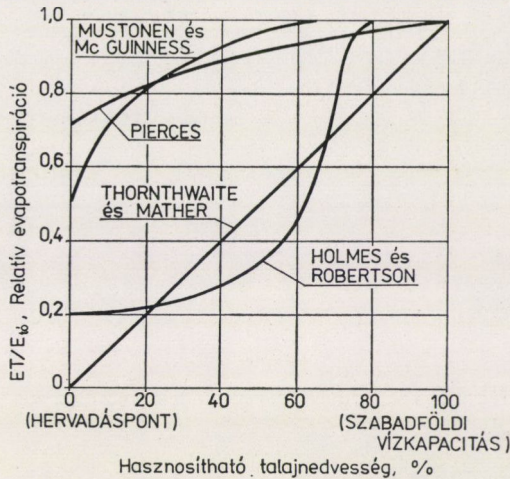


3. ábra. A potenciális párolgás és a tényleges evapotranspiráció 10 napos összegeinek évi változása a Debrecen-Kismacs-i mintaterületen (Szász, 1974)

gás viszonyát a talajnedvesség függvényében adják meg. E képletek közül MUSTONEN és MCGUINNESS, PIERCES, THORNTWHAITE és MATER, valamint HOLMES és ROBERTSON képletét, MUSTONEN és MCGUINNESS (1968) nyomán, a 4. ábrán mutatjuk be. Az ábra egymástól nagyonis távolieső görbéi jól érzékeltezik a tapasztalati képletekkel való ET -számítás bizonytalanságait: lát-

ható pl., hogy a 40%-os talajnedvességhez tartozó ET/E_{t0} viszony HOLMES és ROBERTSON képlete szerint 30%, MUSTONEN és MCGUINNESS szerint pedig 90%.

f) A Szovjetunióban az ET becslésére elterjedten alkalmazzák KONSZTANTYINOV (1966) módszerét, amely a talajfelszín fölött 2 m-rel észlelt hőmér-



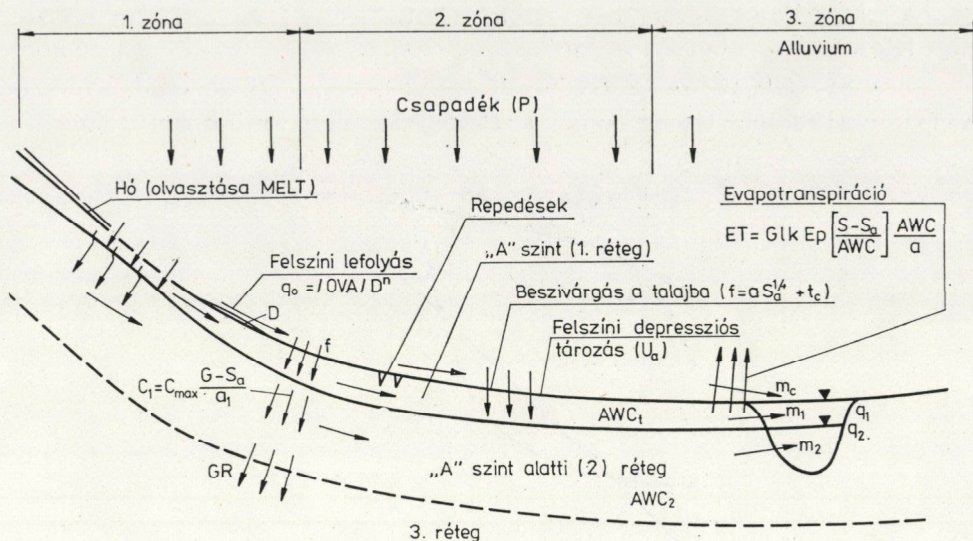
4. ábra. Az evapotranspiráció becslésére használt néhány tapasztalati képlet összehasonlítása (MUSTONEN és MCGUINNESS, 1968)

sékleti és légnedvesség-adatokon alapul, tehát csak a párafelvevő rendszer hatását veszi figyelembe. E módszer főleg a havi, évszakos és évi ET sokévi középértékének a becslésére ajánlható (WMO, 1974).

3.25 Modellek

Mivel a tapasztalati képletek sokszor — mint 3.24/c alatt említettük — szükségszerűen túlegyszerűsítik a valóságot, helyettük az ET folyamatát szimuláló modelleket is alkalmaznak, amelyek elvileg a jelenséget befolyásoló valamennyi fontosabb paraméter hatását figyelembe veszik. E modellek azonban méginkább a kezdeti kísérletezés stádiumában vannak. Alkalmazásuk egyik fő nehézsége: a számos modellparaméter pontos mérésének szükségessége, továbbá az e paraméterek térbeli átlagértékekkel való helyettesíthetőségének és időbeli állandóságának — a valóságot sokszor durván egyszerűsítő — feltevése.

A gyakorlatban a hidrológiai modellezés és az ET kapcsolata egyelőre inkább csak úgy jelentkezik, hogy a lefolyásidősorok előállítását célzó modellekbe — lehetőleg egyszerű — tapasztalati képletekkel számított, tehát ismertnek feltételezett ET -értékeket bemenő adatként használják (KIENTITZ, 1974, MAGYAR, 1974) (5. ábra).



5. ábra. Az USDAHL-74 szintetikus lefolyásmodell elvi felépítése (MAGYAR, 1974)

3.3 Összefoglalás

a) Az ET mérése jelenleg közvetlenül csak kisméretű, — legfeljebb néhány m^2 területű — talajtömbökre (liziméterekre) vonatkozóan lehetséges. Méréstechnikai okokból az így mért értékek (különösen állandó talajvízszintet tartó kompenzációs liziméterek esetében) általában a liziméter zavartalan természetes állapotú szűkebb környezetének ET -értékeivel sem azonosak. A liziméterekkel mért (pontbeli) ET -értékek területi általánosításának, ill. átviteli lehetőségének feltételei általában nem ismertek, és így nem teljesíthetők.

b) Nagyobb területek ET -értékeinek a becslésére elsősorban a vízháztartási mérlegben alapuló módszer és valamelyik (vagy több) megfelelő tapasztalati képlet egyidejű alkalmazása ajánlható. A vízháztartási mérlegben és tapasztalati képleten alapuló ET -becslést esetenként liziméter-észleléssel kapott értékekkel is célszerű összevetni. A vízháztartási mérleg alkalmazásához biztosítani kell a benne szereplő mennyiségek ismertségét, ill. meg kell győződni arról, hogy az ismeretlen mennyiségek együttes hatása valóban elhanyagolható-e. A tapasztalati képlet alkalmazása előtt meg kell győződni arról, hogy az alkalmazás helyére jellemző földrajzi viszonyokra is érvényes-e. Az ICID 1977. évi, ET -val foglalkozó kerekasztal-konferenciájára benyújtott francia nemzeti beszámoló, a tényleges ET közvetlen mérésének megbízhatatlansága miatt, gyakorlati ET -becslésre a Penman-féle (6) képletet ajánlja, a nettó sugárzás mért adatainak felhasználásával (BALOGH, 1977).

4. Az ET-ra vonatkozó ismeretek jelenlegi helyzete Magyarországon

4.1 Az ET mérése

Az ET pontbeli értékeinek mérését célzó liziméterek telepítése és működtetése meglehetősen függetlenül történt és történik a hidrológiai-vízháztartási és a növénytermesztési kutatás területén. Ennek okai a két kutatási terület eltérő céljaiban keresendők (2. fejezet).

4.1.1 A hidrológiai kutatásokhoz kapcsolódó liziméterek

Mechanikus mérlegelésű súlylizimétereket már az 1960-as években a VITUKI több kísérleti telepén (Fehértó-Majsai vízgyűjtő, Komlósi telep, Rakacai vízgyűjtő) létesítettek. Ez a liziméter-típus, mint említettük, a kelően pontos mérés lehetetlensége miatt egyáltalán nem vált be (3.1. szakasz), nem szolgáltatott valamire is használható adatokat. A kísérleti telepek súlylizimétereit tudománytörténeti érdekességgként megőrizték, de természetesen nem észlelik.

Hidrológiai törvényszerűségek vizsgálatát célzó *kompensációs* lizimétereket a VITUKI Vízháztartási Intézetének (ill. jogelődjeinek) három kísérleti telepén létesítettek: kettőt a Fehértó-Majsai vízgyűjtőn (1975-ben), ötöt a Komlósi telepen (1959-ben) és négyet az Agárdi kutatóállomáson (1974-ben). A Fehértó-Majsai és a Komlósi telepi liziméterek terepszintje csupasz, nem tartalmaznak növényeket, tehát voltaképpen nem az 1.2 szakaszban meghatározott teljes ET-t, hanem a csupasz talaj ET-ját észlelik, amely a teljes ET (fizikai) párolgási összetevőjével sem azonos. Az Agárdi kutatóállomás lizimétereibe nádat és füves-zsombékos növényzetet telepítettek. A liziméterekben tetszőleges meghatározott szinten tartható a talajvízállás; a Fehértó-Majsai telepen — a természetes talajvíztükör kis mélységei miatt — elvileg még az is biztosítható lenne, hogy a liziméter talajvíztükre állandóan szinljen a külső (változó) talajvízállással. A Fehértó-Majsai telep lizimétereinek eddig mindössze 1 éves észlelési idősorát még nem használták fel kutatási célra. A Komlósi-telepi liziméterek hosszú adatsorainak felhasználásával értékes kutatási eredmények születtek a fedőréteg vízháztartásáról és az erdő talajvízre gyakorolt hatásáról (MAJOR, 1974). Ezek az eredmények nagymértékben hozzájárultak az ország területét várhatóan regionálisan jellemző ET-értékeket is szolgáltató kútsoportos talajvízészlelő hálózat koncepciójának kialakulásához (MAJOR, 1977/b).

A Fehértó-Majsai és a Komlósi-telepen a kompensációs liziméter-csoportok mellett egy-egy Friedrich-féle (csak a beszivárgás mérésére alkalmas) liziméter-csoport is működik.

Megemlítendő az ország 26 hidrológiai kísérleti- és tájjellemző területén (közülük 6 VITUKI Vízháztartási Intézete kezelésében) működő I. osztályú *meteoro-*

lógiai műszerkertek (KIENITZ, 1971), valamint a *párolgásmérő kádhálózat* 25 állomása (VANCsó, 1971), amelyeknek észlelési adatai — a 3.24 szakaszban tárgyalt tapasztalati képletekbe helyettesítve — szintén felhasználhatók az ET becslésére.

4.12 A növénytermesztési kutatásokhoz kapcsolódó liziméterek

E hálózat kialakulását és 1974. évi helyzetét kitűnően összefoglalja PETRASOVITS és BALOGH (1974) munkája. Megállapítható belőle, hogy 1974-ben az országban — különböző intézmények kezelésében — 18 növénytermesztéshez kapcsolódó ET állomás működött (6. ábra). Közülük a legrégibbet 1964-ben, a legújabbat 1973-ban létesítették. Egy-egy ET-állomás általában kompenzációs lizimétercsoportot és I. osztályú meteorológiai műszerkertet tartalmaz. Minden állomás meghatározott növények — többnyire szántóföldi öntözött kultúrák — ET-ját méri.

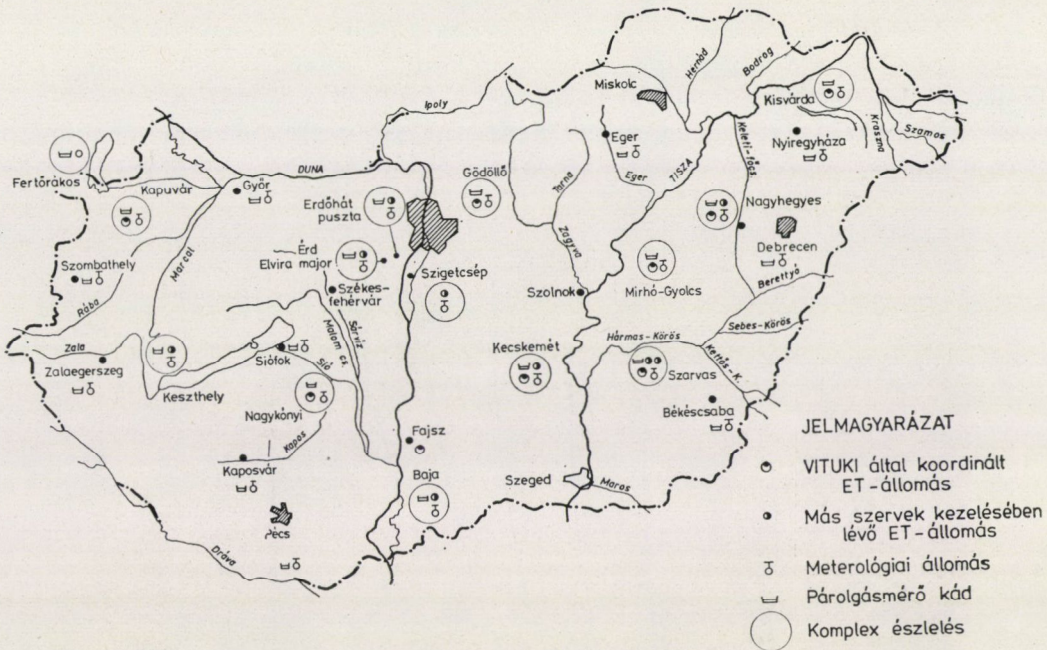
A 18 ET állomás közül 10 — különböző intézmények, köztük a VITUKI kezelésében levő — állomás tevékenységét a VITUKI Műszaki Fejlesztési Intézete, ill. annak jogelődje, a Vízépítési Kutatási Főosztály koordinálta és koordinálja. Ezeken az állomásokon egységes elvek és módszerek alkalmazásával, központi előírásoknak megfelelően történik a kompenzációs liziméterek és környezetük növényzetének telepítése és gondozása, valamint a növényzeti jellemzők, az ET és az egyéb meteorológiai elemek észlelése. Az egységes elvek szerint gyűjtött, összehasonlító adatok a koordináló kutatóközpontban a növények (öntözési) vízigényének előrejelzésére szolgáló segédletek kidolgozása, maguknak az előrejelzéseknek a kiadására, valamint egyéb növény-víz-háztartási kutatásokra használták és használják fel.

Az említett ET-hálózat egyik legjobban kiépített állomása 1971-ben a VITUKI Vízrajzi Intézete Mirhó-Gyolcsi kísérleti belvízöblözetének központi telepe mellett létesült. A Mirhó-Gyolcsi ET állomás működése a kísérleti belvízöblözetétől szervezetileg is, céljában is teljesen elkülönült: kizárólag a szántóföldi növények víz-háztartási folyamatait észlelte. A Mirhó-Gyolcsi ET-állomáson egyébként 1977-ben beépítették az ország első korszerű erőmérőcellás súlyliziméterét is.

4.2 Az ET-ra vonatkozó kutatások

4.21 Hidrológiai kutatások

A *víz-készletgazdálkodásra* irányuló hidrológiai vizsgálatok elsősorban a hasznosítható felszíni és felszín alatti vízkészlet meghatározásával kapcsolatosak. (A vízigények — pl. az öntözővízigények — meghatározását a vízgazdálkodási tervezés nem elsősorban a hidrológiától, hanem a vízigényt támasztó népgazdasági ágazattól, pl. a mezőgazdaságtól várja.) A vízkészlet — különösen a felszín alatti vízkészlet — meghatározásában az ET többnyire segéd-



6. ábra. Magyarország növénytermesztéshez kapcsolódó liziméter-állomásai 1974-ben (PETRASOVITS és BALOGH, 1974)

változóként szerepel,⁵ amelyet általában még bizonytalanabban is lehet meghatározni, mint magát a vízkészletet (3.21 szakasz). Az ET vizsgálata ezért általában sohasem állt előtérben a hazai hidrológiai kutatásnak, mégis van néhány szép eredménye, amelyek közül a következőket emeljük ki:

a) SZESZTAY (1961, 1964) ismertette és kritikailag értékelte THORNTHWAITE képletét, majd BUDIKO (1956) vízháztartási módszerének alkalmazásával megszerkesztette Magyarország évi átlagos ET-jának (területi párolgásának) és párolgási hiányának (öntözővízigényének) térképét, továbbá segédleteket adott a tengerszint feletti magasságot jellemző hőösszeg figyelembevételére (7. ábra). SZESZTAY eredményei nemzetközi tájékoztató anyagokba is beépültek (DOMOKOS, 1973).

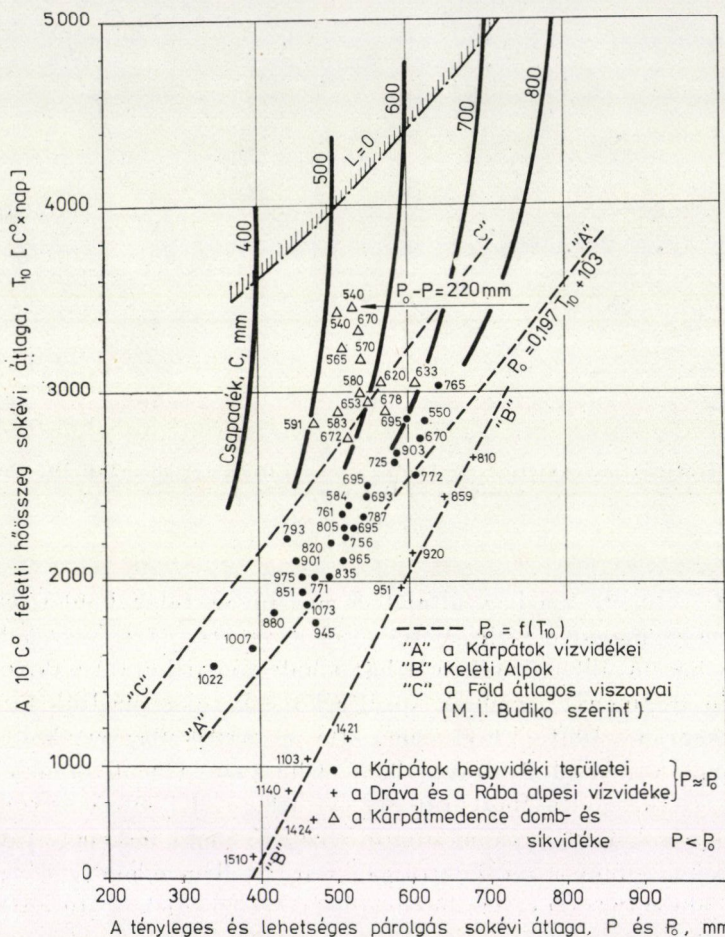
b) KARDOS (1975) újabb adatok figyelembevételével korszerűsítette SZESZTAY térképét (2. ábra).

c) ANTAL (1968) a magyarországi viszonyokra jól alkalmazható, korszerű tapasztalati képletet dolgozott ki a potenciális és a tényleges ET számítására (3.24 szakasz).

⁵ Az egyetlen számottevő kivétel a tározók várható vízkészletének a számítása a tervezés stádiumában. A várható vízkészlet egyik veszteség-összetevője ugyanis a vízfelület-párolgás és az elmaradó ET (területi párolgás) különbsége.

A hidrológiai körfolyamat részjelenségeinek fizikai törvényszerűségeire vonatkozó, ET-val kapcsolatos vizsgálatok közül elsősorban Szász Gábor és MAJOR Pál eredményeit kell kiemelnünk.

a) Szász (1974) a hajdúsági löszháton kialakított 2 ha nagyságú mintaterületén 7 éven keresztül precíziósan észlelte a felső 1 m-es talajréteg (2) típusú

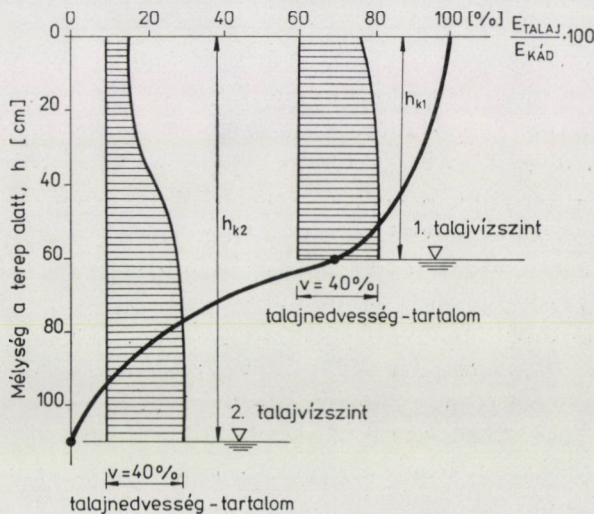


7. ábra. A tényleges és potenciális evapotranspiráció kapcsolata a 10 °C feletti hősszeggel a Kárpát-medence vízvidékein (SZESZTAY, 1964)

vízháztartási mérlegének összetevőit és energetikai viszonyait. Vizsgálati eredményei és következtetései mind az ET törvényszerűségeinek tudományos megismerése, mind a növénytermesztés vízigény-kielégítésének megtervezése szempontjából alapvető jelentőségűek. Hidrológiai szempontból a kádpárolgás számítására alkalmas tapasztalati képletet, az oázis-hatás kiszűrésének módsze-

rét, valamint a természetes felszín és különböző növénykultúrák ET-jának arányára meghatározott számértékeket emeljük ki.

b) MAJOR (1974) a vízháztartási mérleg-elemek a VITUKI „Komlósi Imre” kísérleti telepén észlelt 18 éves adatsorainak elemzése alapján megállapította, hogy a tényleges ET-nak és a klimatikus tényezőknek a kapcsolata jóval bonyolultabb, mint ahogy az a különböző empirikus képletek (3.24 szakasz) alapján várható lenne. A Boussinesq-egyenlet segítségével végzett vízháztartási vizsgálatokkal feltárta a talajvíztér, a kapilláris zóna és a gyökérzóna relatív helyzetének hatását a talajtér függőleges vízforgalmának alakulására (8. ábra). Itt szerzett tapasztalatainak és következtetéseinek általánosításával alakította ki a jövőbeli korszerű, kútsoportos talajvíz-észlelés koncepcióját (MAJOR, 1977/b.).



8. ábra. A különböző mélységű talajvíz párolgása csupasz talaj esetén. Liziméteres vizsgálatok a Komlósi-telepen (MAJOR, 1974)

4.22 A növénytermesztéssel kapcsolatos kutatások

A termesztett növények ET-jára vonatkozó igen széles körű, hazai kutatások eredményeit PETRASOVITS és BALOGH (1974) munkája részletesen összefoglalja.

Az ismertetett kutatások zöme (pl. PETRASOVITS, 1970) a termesztett növények vízigényére, a vízigény-alakulás törvényszerűségeire vonatkozó eredményeket ad. BALOGH (1974) lineáris regressziós kapcsolatokat állított elő a növénytermesztési tér páraleadó és párafeltevő rendszerének különböző tényező-csoportjai, valamint az öntözött és tápanyagokkal jól ellátott növények vízfogyasztása között.

4.3 A kutatási eredmények gyakorlati hasznosítása

4.31 Hidrológiai kutatások

A 4.21 szakaszban említett hidrológiai jellegű ET-kutatások eredményei közül SZESZTAY K. ill. KARDOS M. ET-térképe, továbbá ANTAL E. tapasztalati képlete a gyakorlati vízkészlet-számításokhoz, ill. a vízgazdálkodási tervezéshez — így az Országos Vízgazdálkodási Keretterszámítások különböző változatainak a kidolgozásához — hasznos információkat szolgáltat. MAJOR eredményei elsősorban a korszerű, kútszoportos talajvízészlelés országos bevezetésére vonatkozó elhatározás megalapozása terén hasznosulnak; a kútszoportos talajvízészlelés megvalósulásától — egyebek között — a tényleges ET nagyobb területeket jellemző valóságos értékeinek az eddiginél jóval megbízhatóbb becslése is várható (3.21 szakasz).

4.32 A növénytermesztéshez kapcsolódó kutatások

A növénytermesztéshez kapcsolódó ET-kutatások eredményei (4.22 szakasz) értelemszerűen a különböző termesztett növények gazdaságilag optimális vízellátásának a megtervezhetősége, ill. üzemi megvalósíthatósága révén hasznosulnak. E téren külön említést érdemel BALOGH növényi vízigény-előrejelzési módszere (PETRASOVITS és BALOGH 1974).

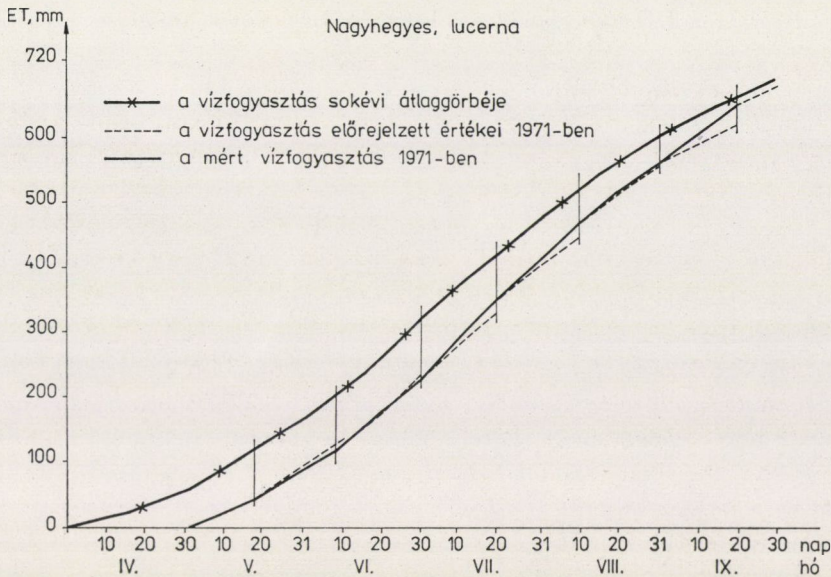
Az előrejelzés alapelve a következő. Rendelkezésre áll az adott növény vízfogyasztásának — észlelési adatokból meghatározott — sokévi átlagos összességörbéje, továbbá a tárgyévi összegző-görbének az előrejelzés kiadásának időpontjáig terjedő, észlelt adatokból szerkesztett szakasza (9. ábra). Az utóbbi végpontjához olyan egyenest húzunk, amely párhuzamos az átlagos görbének a 20 napos előrejelzési időszakba eső szakaszát kiegyenlítő egyenessel. Az előrejelzési időszakban az adott növénytípus várható vízfogyasztását ez az egyenes szakasz adja meg.

A módszerrel kapcsolatban felvetődnek a következő kérdések:

a) A természetes környezettől éppen vízháztartási szempontból elszigetelt, szórványosan települt liziméterek adatain alapuló előrejelzés ilyen mértékű területi általánosításának lehetősége, ill. jogosultsága nem bizonyított.

b) Az előrejelzési módszer azon a feltevésen alapul, hogy adott típusú növényállomány adott (pl. 20 napos) naptári időszak (optimális) ET-ja egyenlő ugyanezen időszak ET-jának sokévi átlagértékével. Az előrejelzéshez a módszer szerint tehát *nincs szükség a tárgyévi tényleges ET összegzőgörbe ismeretére*, ill. annak észlelésére, hanem elégséges a sokévi átlagos összegzőgörbeismereteis.

c) A növényállomány „optimális” ET-jának értékét a módszer a terméseredményt meghatározó többi tényezőtől (talajadottságok, időjárás, agro-technika stb.) függetlenül kezeli. Ez a feltevés, amint ezt az 1.3 szakaszban is kifejtettük, elfogadhatatlan (SZÁSZ, 1977).



9. ábra. Példa a növényállomány vízfogyasztásának előrejelzésére (PETRASOVITS és BALOGH, 1974)

d) A növények vízfogyasztását azonban valójában nem is az ET, hanem a transpiráció jellemzi, amelynek az ET-ban való részesedése számos tényezővel (pl. talajadottságokkal, a talajvíz pillanatnyi mélységével) van kapcsolatban, a helytől és időtől függ, és többnyire ismeretlen. Az ET várható értékének mégoly pontos ismerete sem lehet tehát elég a növények tényleges vízfogyasztásának az előrejelzéséhez.

e) Az előrejelzett ET-értékből az öntözővízigény az előrejelzési időszakban csapadékból és talajnedvességből rendelkezésre álló (előrejelzett) víztáplálás figyelembevételével határozható meg. A vízfogyasztás és az utóbbi két tényező előrejelzési hibája összesítve valószínűleg eléri az előrejelzett öntözővízigény nagyságrendjét. Mivel továbbá adott (naptári) előrejelzési időszak vízfogyasztása az előrejelzési módszer a) feltevése szerint minden évben ugyanakkora, véleményünk szerint nem a vízfogyasztást, mint anyagcsereterméket tartalmazó ET-t, hanem sokkal inkább a talajnedvességekészletet kellene folyamatosan észlelni és előrejelezni (CSOMA J.-né—MAJOR—MOLNÁR, 1976).

f) Az öntözési vízigény előrejelzésének magyarországi gyakorlati értékét általában is kérdésessé teszi az a mindinkább általánossá váló helyzet, hogy a kiadagolt öntözővíz mennyiségét nem a vízigény, hanem a rendelkezésre álló vízkészlet korlátozza (SZIGYÁRTÓ, 1975).

A növényfajonként, 20 naponként előrejelzett és közzétett vízfogyasztás-értékek gyakorlati felhasználásáról, ill. a velük szerzett tapasztalatokról nincs értesülésünk.

5. Javaslat az ET-val kapcsolatos jövőbeli vizsgálatok megszervezésére

Az eddigiekben — különösen a 4. fejezetben — előadtak alapján az ET-ra irányuló jövőbeli vizsgálatok megszervezésére, elsősorban a *hidrológiai* kutatás iránti igények figyelembevételével, a következő javaslatok tehetők.

5.1 Észlelés

Az észlelésekre vonatkozó javaslat megfogalmazásakor a következő alapelvekből indulhatunk ki (KOVÁCS, 1978).

A mezőgazdasági termelési rendszerek működésének optimális irányítása, valamint a hidrológiai körfolyamat minden elemére kiterjedő tudományos megismerés igénye megköveteli, hogy a következő években Magyarországon kiépüljön egy olyan észlelőrendszer, amelynek feladata a mindenkor talajvízszint és a növénytakarót felülről burkoló felület közötti térben lejátszódó vízmozgás fontosabb elemei — köztük az intercepció, a felszíni lefolyás, az ET, a talajnedvesség — időben változó, nagyobb régiókat jellemző értékeinek folyamatos becsléséhez szükséges és e célra valóban használható alapinformációk szolgáltatása.

Az említett hidrológiai elemek — köztük az ET — területi értékeinek folyamatos becslését szolgáló észlelőhálózatnak a mérőhelyek két, különböző célra irányuló csoportját kell tartalmaznia:

— olyan mérőhelyeket, amelyek folyamatosan szolgáltatják az adott hidrológiai elem (pl. az ET) adott pontra, ill. kisebb területfoltra vonatkozó értékét, vagy pedig olyan *segédváltozók* (pl. sugárzás, egyéb meteorológiai elemek) értékeit, amelyeknek ismeretében a szóban forgó hidrológiai elem pontbeli értéke megbízhatóan számítható;

— olyan mérőhelyeket, amelyeken *kísérleti körülmények* között végezhetők mérések olyan törvényszerűségek meghatározására, amelyeknek hirtokában egyrészt a szóban forgó hidrológiai elem pontbeli értéke — rá vonatkozó, közvetlen észlelés hiányában — más segédváltozók észlelt értékeiből számítható, másrészt a pontbeli (közvetlenül észlelt, vagy számított) értékekből a nagyobb területeket (régiókat) jellemző (átlag)értékek becslése elvégezhető.

Természetesen lehetséges, hogy egy-egy mérőhely egyszerre mindkét feladatot ellássa. A gyakori eset az, hogy a *b)* csoportba tartozó — tehát jóval műszerezettebb — kísérleti mérőhelyek egyúttal *a)* típusú folyamatos adat-szolgáltatást is végeznek.

A fenti alapelvekből a következő gyakorlati javaslatok szűrhetők le:

a) A meglevő — eredetileg növénytermesztéshez kapcsolódó — ET állomások hidrológiai jellegű üzemre való átállításának, valamint a VITUKI kísérleti területein működő liziméterek jövőbeli észlelési programjának egységes fő célkitűzései így összegezhetők: (SZESZTAY, 1978):

— Minden állomás mérje folyamatosan az országosan egységesen értelmezendő ET_{ref} viszonyítási ET -t. E célra kompenzációs liziméterek — amint azt a 3.12 szakaszban kifejtettük — eddigi (viszonylag magas állandó talajvízszintet tartó) üzemmódjukkal általában nem alkalmasak, de könnyen alkalmassá tehetőek a liziméterbeni talajvízszint süllyesztésével, vagy megszüntetésével, vagy pedig — viszonylag magas külső (természetes) talajvízszin esetében — a külső talajvízszínnel együttjáró liziméter-vízállás biztosításával.

— Az időjárási elemek (köztük a napsugárzási paraméterek) egyidejű mérésével törekedni kell az utóbbiak és az ET_{ref} közötti — pl. (6) vagy (7) típusú — kapcsolatok előállítására.

— Kísérletsorozatokat kell végezni a viszonyítási és a potenciális, továbbá a potenciális és a tényleges ET viszonzyszámainak, ill. az e viszonzyszámok és más, könnyen mérhető változók közötti függvénykapcsolatoknak a meghatározása érdekében (PERRIER, 1977).

b) Területileg is jellemző, tényleges mért ET -értékek a jövőben (remélhetőleg hamarosan) kiépülő *kútsoportos talajvízészlelő-rendszertől* várhatók. Mivel ugyanis a tervek szerint a hálózatot alkotó egy-egy kútsoport közrefogta talajtömbben a talajnedvesség- és tenzióértékeket is méri (MAJOR, 1977/b), a hálózat egyben a nagyobb területekre általánosítható ET értékek pontos alapadatait is szolgáltatja (KOVÁCS, 1977).

c) Természetesen továbbra is biztosítani kell, hogy a VITUKI által működtetett liziméterek, valamint a mezőgazdasági és egyéb kutatóhelyek — koordinált vagy nem koordinált — lizimétereinek észlelési adatai a jövőben is bármely érdekelt kutatóhely számára hozzáférhetők legyenek. Emellett célszerű lenne, ha a VITUKI Vízháztartási Intézete — a kezelésében megtartott hidrológiai célú liziméterek üzemeltetésén túlmenően — ajánlásokat adna ki a többi lizimétert észlelő intézményeknek annak érdekében, hogy rutinszerűen észlelt liziméter-adataik a hidrológiai kutatásban is felhasználhatók legyenek.

5.2 Hidrológiai kutatás

Nagyobb hidrológiai egységek — vízgyűjtők, régiók — tényleges, összeített ET -értékeinek meghatározására a forgalomban levő külföldi és hazai tapasztalati képletek érvényességének ellenőrzésére, finomítására feltétlenül szükség lenne, már csak azért is, mert az ilyen irányú kutatások hosszabb ideje szünetelnek. Ezért javasoljuk, hogy kezdjenek el olyan *vízháztartási és lefolyás-modellezési vizsgálatokat*, amelynek fő célja a domb- és síkvidéki kísérleti vízgyűjtőkön felhalmozott észlelési anyag hasznosítása, s ennek keretében — egyebek között — az ET -mértékére vonatkozó információk kimunkálása, területi általánosítása és a tapasztalati képletekkel való összevetése.

Folytatni kell — legalább a szinttartás mértékéig — az ET -val kapcsolatos *fizikai hidrológiai vizsgálatokat* is a kísérleti területek lizimétereivel és

keresni kell annak lehetőségét, hogy e mérési eredmények felhasználásával a tapasztalati képletek és egyéb ET-becslési módszerek tovább legyenek javíthatók. A Fehértó-Majsai (és esetleg a Mirhó-Gyolcsi) liziméter-méréseket a talajcsövezéssel kapcsolatos agrohidrológiai kutatások megalapozására is fel kell használni.

Megfontolandó, hogy — Kovács (1976) ajánlását követve — a VITUKI liziméterrel el nem látott 2 kísérleti területén (Rakaca-völgyi és Péli-vízgyűjtő) ne telepítsenek-e lizimétereket, a felszíni hidrológiai jelenségek tanulmányozásának kiegészítése céljából.

A fizikai-hidrológiai vizsgálatok során törekedni kell — MAJOR (1974) eddigi vizsgálatai szellemében — az ET három fő összetevőjének: az intercepciónak, a talajnedvesség-fogyasztásnak és a talajvízkészlet-fogyasztásnak — külön-külön való mérésére, ill. meghatározására (STAROSOLSKY, 1973). Az intercepció értékét nemcsak erdőkben, hanem szántóföldi növényállományban is vizsgálni kell (Kovács, 1977). Ugyanakkor az ET mérését az eddigi zömmel szántóföldi vizsgálatokról az erdőre is ki kell terjeszteni.

IRODALOM

1. ANTAL E.—PORZA I.: A különböző növényállományok növénykonstansai és változásuk a tenyészidő folyamán. Az Országos Meteorológiai Intézet hiv. kiadványa, 1966
2. ANTAL E.: Az öntözés előrejelzése meteorológiai adatok alapján. Kandidátusi értekezés. Budapest, 1968
3. BAC, S.: Evaporation from a Catchment Area. Collective Elaboration. Mathematical Models of Catchments. Zaklad Narod. im. Ossolinskich, Wyd. PAN, Wroclaw; Warszawa, 1974
4. BALOGH J.: Öntözött növények vízfogyasztása és az evapotranspiráció. VITUKI Beszámoló, 1974
5. BALOGH J.: A Nemzetközi Öntözési és Vízrendészeti Szövetség (ICID) evapotranspirációs kerekasztal konferenciája. *Vízügyi Közlemények*, 1977, 3
6. BUDIKO, M. J.: Tyeplovoj balans zemnoj poverhnosztyi. Gidromeoizdat, Leningrád, 1956
7. CSOMA J.-né—MAJOR P.—MOLNÁR GY.: Regionális nedvességmérő hálózat adatainak felhasználása a várható nedvességtartalom előrejelzésére. *Hidrológiai Közöny*, 1976/6
8. DOMOKOS M.: A vízgazdálkodási mérleg. *VITUKI Tanulmányok és kutatási eredmények*, 37 Budapest, 1972
9. DOMOKOS M.: The Water Balance of Hungary. UNESCO-WMO Meeting on Hydrological Problems in Europe, Bern, August 1973
10. HASHEMI, F.: Needs for Estimation of Areal Actual Evapotranspiration for the Practical Purposes of Different Types of Users. *WMO Technical Conference on Assessment of Areal Evaporation*. Budapest, May 1977
11. JAWORSKI, J.: A Simple Mathematical Model to Determine the Catchment Evaporation. *ICID International Round Table Conference on Evapotranspiration*. Paper Nr. 3/17. Budapest, May 1977
12. KARDOS M.: A Duna-medence magyarországi részének vízmérlege. Beszámoló a VITUKI 1972. évi munkájáról. Budapest, 1975
13. KIENTITZ G. (szerk.): A magyarországi táj jellemző és kísérleti vízgyűjtők katalógusa. VITUKI, Budapest, 1973
14. KONSTANTINOV, A. R.: Evaporation in Nature. Translated for the U. S. Dept. of Commerce and National Science Foundation by the Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, 1966
15. KOVÁCS GY.: The use of Lysimeters in the Hydrological Investigation of the Unsaturated Zone. *Hydrological Sciences Bulletin*, 21 1976

16. KOVÁCS GY.: Interrelation between Point Evapotranspiration Measurements and Assessment of Areal Evapotranspiration. *WMO Technical Conference on Assessment of Areal Evaporation*. Budapest, May 1977
17. KOVÁCS GY.: A Vízügyi Szolgálat céljait szolgáló evapotranspiráció-becslés koncepciója (Szóbeli közlés alapján készített feljegyzés) Budapest, 1978
18. MAGYAR P.: A hidrológiai ciklus szimulációja légköri páracirkulációs adatok felhasználásával. VITUKI témajelentés, kézirat. Témaszám: III. 2.2.3/1973
19. MAGYAR P.: Szabad összegyülekezésű vízgyűjtők lefolyásának meghatározása a hidrológiai rendszer-szintézis módszereivel. VITUKI-témajelentés, kézirat. Témaszám: III. 1.2.27/1974
20. MAJOR P.: Síkvidéki erdő hatásának vizsgálata a talajvízpárolgás és tényleges beszivárgás folyamataira. *Hidrológiai Közöny*, 1974/6
21. MAJOR P.: Actual Infiltration and Evaporation Determined from Data Observed on Groundwater and Soil Moisture. *WMO Technical Conference on Assessment of Areal Evaporation*. Budapest, May 1977/a
22. MAJOR P.: Javaslat egy új talajvízészlelő hálózat kialakítására. Kézirat, Budapest, 1977/b
23. McCULLOUGH, I. S. G.: Examples of Assessment of Areal Actual Evapotranspiration by Indirect Methods. General report, topic III. *WMO Technical Conference on Assessment of Areal Evaporation*. Budapest, May 1977
24. MUSTONEN, S.—McGUINNESS, I. L.: Estimating Evapotranspiration in a Humid Region. *Agricultural Research and Development Centre, Technical Bulletin*, 1389. Coshocton, Ohio, 1968
25. OVH: A Vízügyi Ágazat információ rendszere. A kézi és gépi nyilvántartási rendszer alapjai. (Tervezet) Budapest, 1974
26. PENMAN H.: Evaporation — An Introductory Summary. *Netherlands Jour. Agric. Sci.* Wageningen, 1956
27. PERRIER, A.: Projet de definitions concernant l'évapotranspiration en fonction de consideration theoriques et pratiques. (Rapport national francais). *ICID International Round Table Conference on „Evapotranspiration”* R: 1/3. Budapest, 1977
28. PETRASOVITS I.: Az öntözött növényállományok vízigénye. Doktori értekezés. Gödöllő, 1970
29. PETRASOVITS I.—BALOGH J.: Az evapotranspirációs kutatások magyarországi helyzete és nemzetközi vonatkozásai. *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* (1974)
30. PÉCZELY, T.: Proposals Concerning the Basic Terminology of Evapotranspiration. *ICID Round Table Conference on Evapotranspiration*. Budapest, May 1977
31. STAROSOLSKY, Ö.: A Meteorológiai Világszervezet (WMO) területi párolgási konferenciája. *Vízügyi Közlemények*, 1977/3
32. SZÁSZ G.: Az öntözés néhány kérdésének klimatológiai vizsgálata a debreceni löszháton. A Debreceni Agrártudományi Főiskola centenáriumi ünnepei. Debrecen, 1968
33. SZÁSZ G.: A termesztett növények vízigényének és az öntözés gyakoriságának meteorológiai vizsgálata. *Növénytermelés*, 22/3 (1973)
34. SZÁSZ G.: A hajdúsági löszhát talajának vízháztartási vizsgálata. *Agrártudományi Közlemények*, 33 (1974)
35. SZÁSZ G.: Vélemény „Az evapotranspirációval kapcsolatos magyarországi vizsgálatok áttekintése és javaslat folytatásuk megszervezésére” c. vitaindító anyagról. (Kézirat) Debrecen, 1977
36. SALAY, G.—B. TOUSSAINT: Der Bodenfeuchte-, Lysimeter- und Grundwasser-Messdienst des Landes Hessen. *Deutsche Gewässerkundliche Mitteilungen*, 21, H. 3. (1977)
37. SZESZTAY, K.: Thornthwaite C. W. vízmérleg számítási módszere és a Tiszavölgy vízháztartása. *Hidrológiai Közöny*, (1961)/1
38. SZESZTAY, K.: Magyarország öntözővízszükséglete és a Kárpát-medence vízháztartása. Beszámoló a VITUKI 1961. évi munkájáról. Budapest, 1964
39. SZESZTAY, K.: Optimális vízrajzi észlelőhálózat kialakítása: Evapotranszspirációs hálózat kialakítása. Koncepció-javaslat, előzetes tervezet (kézirat), Budapest, 1978
40. SZIGYÁRTÓ Z.: Alapösszefüggések a meglevő öntözőrendszerek terhelhetőségének a meghatározásához. *Hidrológiai Közöny* (1975)/9
41. TÄUMER, F.: Eine Methode zur Bestimmung der Gebietsverdunstung auf meteorologischer Grundlage. Leipzig, 1955
42. TURC, L.: Calcul graphique de l'évapotranspiration potentielle. *L'eau*, (1963)/8
43. UN: Manual for the Compilation of Balances of Water Resources and Needs. New York, 1974
44. VAN BAVEL, I.: Potential Evaporation: The Combination Concept and its Experimental Verification. *Water Resources Research*, 2, 3. (1966)/3

45. VANCsó I.: Adatgyűjtemény a vízfelületek párolgásáról. Az országos kádhálózat 1959-1968. évi adatai. VITUKI, Budapest, 1971
46. WMO: Measurement and Estimation of Evaporation and Evapotranspiration. WMO. No. 201. TP. 105. Tech. Note No. 83, Geneva, 1966
47. WMO: Guide to Hydrological Practices (Third Ed.). WMO—NO. 168. Geneva, 1974
48. WMO: Secretariat: WMO Activities Related to Evaporation. *Technical Conference on Assessment of Areal Evaporation. Budapest, May 1977*

Survey on the Investigations in Connection with the Evapotranspiration and a Proposal for the Organization of their Continuation in Hungary. — The purpose of the paper is to sum up the knowledge on the evapotranspiration, to outline the observational and research activities in this respect in Hungary and to offer a proposal for the future organization of these activities with peculiar interest in the hydrological relations of the evapotranspiration.

Untersuchungen in Ungarn im Zusammenhang mit der Evapotranspiration und ein Vorschlag für die Organisierung der Fortsetzung derselben. — Der Zweck dieser Abhandlung ist die kurz umrissene Darstellung der Kenntnisse bezüglich der Evapotranspiration und ein Überblick über die desbezüglichen Beobachtungs- und Forschungsarbeiten in Ungarn, sowie ein Vorschlag zur Organisierung dieser Tätigkeit mit besonderer Hinsicht auf die hydrologischen Beziehungen der Evapotranspiration.

PERIODIKUSAN TERHELT KÖR ÉS KÖRGYŰRŰ ALAKÚ LEMEZEK SZÁMÍTÁSA*

-- Helyzetkép

MÁRKUS GYULA**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

Ez a helyzetkép ismertetést ad a periodikusan terhealt kör és körgyűrű alakú lemezek számítása c. segédletről, és az annak kiadását megelőző időszakról. Vázolja a 30 évvel ezelőtti állapotot egy folyadéktároló medence tervezésének tükrében. Rámutat az akkori hiányosságokra és ecseteli azt a folyamatot, amelynek eredményeként a kör-szimmetrikus szerkezetek méretezésére vonatkozóan új számítási eljárás alakult ki. A körszimmetria és antimetria lehetőséget ad arra, hogy egy térbeli szerkezet számítását síkban végezzük el. A nyomatékostás módszer alkalmazása ezen területen is rendkívüli előnyökkel jár. Az új kiadvány a részfelületen, vonalak mentén (sugár, körív), vagy pontszerűen ható terhek hatására a kör- illetve körgyűrűalakú lemez alakváltozásainak és metszeterőinek a meghatározása nyújt lehetőséget. A terhelő erőket Fourier-sorok alakban adja meg. Közli a lemez differenciálegyenletét, annak megoldását és a gyakorlatban előforduló kerületi feltételeket. Az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazása 640 oldalon kerül bemutatásra. Végül 110 numerikus táblázat egészíti ki a segédletet.

Amikor 30 évvel ezelőtt jelen helyzetkép szerzője belépett a MÉLYÉP-TERV-hez, első feladata egy két-rekeszes, koncentrikus elrendezésű sík földemmel és fenéklemével rendelkező, földalatti víztároló medence tervezése volt. Csupán két forrásmunka állt rendelkezésére: az egyik *Emperger Handbuch für Eisenbetonbau* IX. kötete (Behälter); a másik pedig a Fővárosi Vízművek háború előtt megépült 10 000 m³-es medencéjének tervei, statikai számításokkal együtt. Ez a terv számára nagyon tapulságos volt. Már az első átnézéskor több olyan szerkezeti részletet és számítási megoldást fedezett fel, amellyel nem értett egyet. Ellentmondásos volt számára, hogy egy körszimmetrikus, tehát poláris szerkezeten belül a földemet ortogonális rendszerben elhelyezett gombaoszlopokkal támasztották alá. A földlemez csak felfeküdt a hengeres oldalfalakra és nem kapcsolódott sarokmereven azokhoz. Az egyes szerkezeti elemeket — földlemez, külső és belső hengerhéj, fenéklemez — egymástól függetlenül méretezték. A hengerhéjakat pl. a fenéklemezbe befogottak tekintették. Ha csak az egyik rekesz volt töltve, nem vették figyelembe a támaszok relatív süllyedését. Nem használták ki a térbeli szerkezet adta lehetőségeket. Ma már teljesen más szemlélettel nézzük ezeket a műtárgyakat. A pontosabb eljárásokkal számított szerkezetek igénybevételei néhol 100%-osan eltérnek az akkoriaktól. Abban az időben azonban a betonacél megengedett feszültsége folyadéktároló esetén mindössze 1000 kg/cm² volt, így minden, a számításban elkövetett hibára az anyagban kellő tartalékok álltak rendelkezésre.

* Előadásra került a Műszaki Mechanikai Bizottság 1978. október 26-i ülésén

** Dr. Márkus Gyula, 1112 Budapest, Süveg u. 4/a

Az első javítás, amit jelen helyzetkép szerzője a szerkezeten eszközölt az volt, hogy az oszlopokat koncentrikus körök mentén helyezte el, és alul-felül körgerendákkal látta el azokat. Így a fenék- és födémlemez „többitámaszúvá” vált. Ilyen lemezek vasalási rendszerére (sugár és érintőirányú vasak) vonatkozóan nem állt rendelkezésre semmiféle irodalom. Érdekes módon el volt misztifikálva a középoszlop kérdése. A pontszerű támasz feletti végtelen nagyságú nyomatékoktól a tervezők megriadtak.

A második lépésben a szerző a fenék- és födémlemezt, valamint a két hengeres határoló falat együtt dolgozó térbeli szerkezetnek tekintette, amelyen a körszimmetria miatt lehetőség nyílt az átmérő síkjában zárt keretszerkezetként való számításra. Ily módon a keretszerkezeteknél széles körben elterjedt nyomatékosztási módszer alkalmazására is mód adódott. Mind a körlemezeknek, mind a hengerhéjaknak a számítására vonatkozó képletek nagyon bonyolultak voltak és a logarléccel való számítást lehetetlenné tették. Több mint tíz év munkáját vette igénybe azoknak a táblázatoknak a kidolgozása kézi számológéppel, amelyek ma már logarléc használatát is megengedik.

A következő lépés a többi forgáshéjnak a számítására vonatkozó képletek levezetése és a térbeli rendszerbe való beillesztése volt. A szerző eredményei először különböző segédletekben, majd 1964-ben 60 ív terjedelmű könyvben jelentek meg a Műszaki Könyvkiadónál (*Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása*). Ezt nemsokára követte az Akadémiai Kiadó és a Werner Verlag közös kiadásában megjelenő német nyelvű könyv (*Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke*).

Ezeknek a munkáknak nem volt átütő sikerük. A tervezők idegenkedtek az újfajta számítási eljárás elsajátításától. Volt a MÉLYÉPTERV-ben olyan szerkezetes osztály, ahol nem is volt szabad ezzel a módszerrel számítani.

A 70-es évek elején gyökeres változás történt. Az egyetemről kikerültek azok a fiatalok, akik már a szerző által ismertetett új eljárást tanulták. Egy-szeriben eltűntek a könyvtárakból a szerző munkái. A német kiadó is jelentkezett 1976-ban egy azonnali második kiadással, sőt a napokban jelenik meg a harmadik német nyelvű, lényegében változatlan kiadás. A magyar nyelvű kézirat 16 évvel ezelőtt készült, ami meglehetősen nagy idő a technika rohamos fejlődésére való tekintettel. Ez indokoltá teszi a könyv teljes átdolgozását, felfrissítését. Így rövidesen sor fog kerülni egy jóval bővebb, két kötetes kiadás megjelenésére.

Vállalatunk igen sok toronyszerű szerkezet tervezésével foglalkozik. Fő profilunk közé tartozik a víztornyok, hűtőtornyok, televíziós tornyok és a gyárkérmények építése. Ezek szintén körszimmetrikus szerkezetek, a rájuk ható szélterhelés azonban antimetrikus jellegű. Nagy gondjaink voltak ezen építmények alaplemezeinek a méretezésekor, ugyanis anyagtakarékosság miatt a toronyszerű hengeres törzs által közvetített terheket kettős csonka kúp-héjjal adtuk át az alaplemezre. Ez azt jelentette, hogy a többitámaszú körle-

mez antimetrikusan megoszló terhelést kapott. Jelen helyzetkép szerzőjének az antimetrikusan terhelt körlemezekre vonatkozó tanulmányai először ismét a vállalat segédletei között jelentek meg. A megoldás lényege ismét a nyomtétosztás módszerének erre a területre való alkalmazása volt. A táblázatok számadatainak a meghatározása már Elliot National 803 B típusú programozható számológéppel történt. 1973-ban sor került a kibővített munkának könyv-alakban való közzétételére is az Akadémiai Kiadó és a Wilhelm Ernst & Sohn közös kiadásában (*Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung*). Ezt a művet 1977-ben Moszkvában az orosz nyelvű kiadás követte.

Az elmúlt 25 év alatt csak a szerző osztálya több mint 500 folyadéktároló medencét, víztornyot, szennyvíztisztítási műtárgyat méretezett az említett munkák segítségével.

Az élet nem állt meg, a tervezőkkel szembeni igény egyre növekedett, újfajta szerkezetek és technológiák kerültek alkalmazásra. A munkaerő hiány az ács-munka egyszerűsítését követelte, elmaradtak a nagy élőmunkát igénylő körgerendák. A kör alakú medencék földemjének megtámasztására koncentrikus körök mentén elhelyezett gombaoszlopokat használtunk. Később már a rendkívül munkaigényes oszlopfejek is elmaradtak. A cölöp- és résfalas mélyalapozási módszerek pontszerűen és vonalak mentén terhelik kör alakú alaplemezeinket. Előfordult olyan technológiai megoldás is a vegyiparban, hogy egy kör alakú alaplemeze több toronyszerű építményt állítottak fel. Szóba került egy finn víztorony építési mód szabadalmának a megvásárlása, amikor is közös alaplemezen egymás mellett három darab víztornyot kellett volna megépíteni.

Ezek a feladatok ösztönözték arra a 70-es évek elején a szerzőt, hogy bővebben foglalkozzék a periodikusan terhelt körlemezekkel. Hét év munkájának eredményeként elkészítette a *Periodikusan terhelt kör- és körgyűrű alakú lemezek, különös tekintettel az alapozásokra* című háromkötetes segédletet.

A tervező vállalatok dolgozóinak elsőrendű feladata a népgazdaságnak időben jó tervekkel való ellátása. A kutatás csak másodrendű, azt is lehet mondani, csupán melléktevékenység, amire rendszerint minimális idő áll rendelkezésre. Néhány lelkes tervező csak hobby-szerűen űzi ezt a tevékenységet, a többség kényelmesebb utat választ és inkább kutató intézményeket, tanszékeket bíz meg problémája megoldásával. Sajnos a feladatok többségükben sürgős megoldást kívánnak és nem engedik meg azt, hogy a tervezésre szánt igen rövid időbe egy főhivatású kutató szervezet fél-, nemegyszer egyéves munkaidejét is bekalkuláljuk. Így az adott problémákkal legtöbbször saját magunknak kell megbírkoznunk.

A szerző által készített segédletnek az volt a célja, hogy olyan eszközt adjon a tervezők kezébe, amelynek segítségével koncentráltan, vonal mentén (sugár, érintőirány) és felületen szakaszosan ható terhelések esetében meg tudják határozni kör- és körgyűrűalakú lemezek alakváltozásait és igénybevételeit különböző perem feltételek esetében. A tervezési munka közben nincs

arra idő, hogy bonyolult levezetéseket eszközölhessünk, ezért igyekezett a szerző a gyakorlatban előfordulható minden feladatot tárgyalni és az eredményeket képletszerűen, vagy táblázatosan közzétenni.

A segédlet három fő részből áll.

Az *első kötet* azokat az elméleti tudnivalókat foglalja össze, amelyek szükségesek ahhoz, hogy a tervező olyan feladatot is meg tudjon oldani, amelyet a segédlet nem tartalmaz. Ezeken kívül tartalmazza a lemezelméletre vonatkozó ismereteket, a körlemez differenciálegyenletét, majd bemutatja a gyakorlatban szóba jöhető terheléseket. Így került sor a körszimmetrikusan, az antimetrikusan, majd a szakaszosan megoszló terhek összeállítására. Utóbbiakat a segédlet sorbafejtett alakjukkal adja meg. Ezután részletesen tárgyalja a differenciálegyenlet különböző felületi terhelésekhez tartozó partikuláris megoldásait. Olyan szakaszos felületi terhelésekkel foglalkozik, amelyek sugárirányban a dimenzió nélküli koordináta valamilyen hatványa szerint változnak, érintő irányban pedig egyenletesen megoszlóak. Határátmenet esetében a felületi terhek sugár-, illetve érintőirányú vonalerőkbe mennek át. Egyúttal megadja a körlemez differenciálegyenletének általános megoldását. A szakirodalom sem a partikuláris, sem az általános megoldásokat ilyen részletességgel nem tárgyalja, levezetésük meglehetősen sok munkát igényelt. A kötet a végén néhány oldalon keresztül a gyakorlatban előforduló megtámasztási módokhoz tartozó kerületi feltételeket mutatja be.

A *második kötet* különböző lemezfeladatokat tárgyal. Annak ellenére, hogy a szerző korábbi munkái részletesen foglalkoztak a körszimmetrikusan és antimetrikusan terhelt körlemezekkel, a segédlet sok ilyen jellegű feladatot tartalmaz. Ezeknek az a céljuk, hogy vizsgálni lehessen a lemez erőjátékát különböző módon terhelt változó nagyságú felületeken megoszló, azonos nagyságú eredő erő, vagy nyomaték esetében. A valóságban koncentráltan ható erő, vagy nyomaték nem fordul elő, a terhelésnek mindig van hatásfelülete. Ekkor pedig végtelen nagyságú nyomatékról már nem beszélhetünk. Jól használhatók a szóban forgó eredmények gombafödémek méretezésekor is. A közölt példákból kitűnik, hogy a szerző megoszló terhelés esetében szorzóként a lemez méretein kívül mindig az eredő erőt, vagy nyomatékot adja meg. Ennek különösen nagy előnye van akkor, ha különböző terheléseket szuperponálunk.

A periodikusan terhelt kör- és körgyűrűalakú lemezeknél a segédlet külön tárgyalja a csak koszinuszfüggvény és külön a csak szinusz-függvény szerint változó terheléseket. Utóbbi esetben a kialakult antimetria tengelyek mentén érintő irányban elfordulásokat megengedő sugárirányú támaszokat képzelhetünk, ami kör- és körgyűrűcikk alakú lemezek számítására ad lehetőséget.

A segédlet részletesen foglalkozik az egy koncentrált erővel terhelt, pereménél szabadon felfekvő és befogott körlemezekkel. A sugár tizedeiben támadó erő esetére olyan táblázatokat közöl, amelyek segítségével az oszlopo-

kon nyugvó körlemezek lehajlásai és nyomatékai számíthatók. E táblázatok segítségével meg lehetett szerkeszteni a körlemez közép-, negyed- és perempontjának nyomatéki hatásfelületeit is. Ezek sokkal részletesebbek mint a Pucher-félék, azonkívül itt a sugár-, vagy érintőirányú nyomaték meghatározásához elegendő egyetlenegy érték leolvasása.

A segédlet szabad peremű olyan körlemezt is tárgyal, amelyen az excentrikusan elhelyezkedő koncentrált erőt egyenletesen változó talajreakció egyenlíti. Ezzel a lemeztípussal a szakirodalom nem foglalkozik. A fejezetet kiegészítő táblázatok igen érdekes feladatok megoldását teszik lehetővé. Egy ilyen példa az olyan lineárisan változóan terhelt körlemez esete, amely hat különböző sugarú körön elhelyezett támaszon nyugszik. Ugyanazon táblázati adatok segítségével meg voltak szerkeszthetők a körlemez közép-, negyed- és perempontjának nyomatéki hatásfelületei is.

Természetesen a körcikk alakú felületen egyenletesen megoszló terhelés a határátmenet elvégzése után egyenletesen változó vonalerőbe megy át.

Olyankor, amidőn a terhelő erő (esetleg egy gombaoszlop reaktív ereje) a lemez vastagsági méreteihez képest nagy felületen oszlik meg, a megoldás során igen sok integrálási állandót kell meghatározni. Ezekhez a számításokhoz, természetesen, legalább közepes nagyságú számítógépekre van szükség.

A kör- és körgyűrűcikk alakú lemezek statikai mennyiségeinek a meghatározásakor csupán szinusz függvényeket tartalmazó Fourier-sorokat használunk. Az eredmények hasonlatosak a csak koszinusz függvényeket tartalmazó terheléseknél kapottakhoz. A tervezési munka során nagyon sok ilyen természetű problémát kell megoldanunk. A nagy méretek miatt rendszerint nem elegendők a szakirodalom adatai, amikor is egyes szerzők csupán a szögfelező sugár mentén adnak lehajlás, vagy nyomaték értéket.

Az új segédlet foglalkozik a pereme mentén, vagy egy belső köríve mentén oszlopokkal alátámasztott körlemezekkel is. Valamennyi feladat esetében rövid támaszhosszakat tételez fel, mert csak akkor indokolható az egyenletesen megoszló reakcióerő. Számítási módszert hoz a körszimmetrikusan és antiszimmetrikusan megoszló terhelésekre, valamint excentrikusan támadó koncentrált erő esetére is.

A segédlet legértékesebb része a *harmadik kötetben* foglalt 110 táblázat. Ezeknek kidolgozása egy szerzői kollektíva sokéves áldozatos munkájának az eredménye. Ezt a munkát csak az tudja igazán értékelni, aki számítógépekkel foglalkozik, aki saját bőrén tapasztalta azt, hogy mit jelent egy hosszú levezetésben, vagy egy programban a hibát megkeresni. A sok numerikus eredmény a levezetett képletek ellenőrzésére is szolgált.

Befejezésül még meg kell említeni, hogy az alábbi feladatok, bár kidolgozásra kerültek, már nem kerülhettek bele a segédletbe:

— Pereme mentén szakaszosan befogott körlemezek. Olyan körlemezek, amelyekhez az oszlop sarokmereven kapcsolódik.

— Süllyedő alátámasztású szakaszosan szabadon felfekvő, illetve befo-
gott körlemezek.

— Körlemez konzolok, vagyis azok a körlemezek, amelyek csak egy tet-
szőlegesen elhelyezett sarokmereven kapcsolt oszloppal vannak alátámasztva.

— Három ponton felfekvő körlemezek. Ezek egyik támasza a peremen,
a másik kettő pedig az említett támaszt a középponttal összekötő egyeneshez
képest szimmetrikusan helyezkedik el.

— A pereme mentén hosszabb szakaszokon alátámasztott körlemezek.
Ezek esetében már nem lehet egyenletesen megoszló reakcióerővel számolni.
Ilyen természetű feladatokra vonatkozóan a segédlet szerzője egy kollokációs
eljárást dolgozott ki. A támaszhosszat egyenlő nagyságú szakaszokra bontotta
fel és ezeken egyelőre egyenletesen megoszló ismeretlen reaktív erőket és nyo-
matékokat tételezett fel. Ezek intenzitását abból a feltevésből határozta meg,
hogy a szakaszok közepén kielégüljenek az előírt peremfeltételek.

A fent felsorolt feladatok megoldását a szerző különböző szacikkekben
és egy könyvben fogja közzétenni.

E helyen is hálás köszönet illeti a MÉLYÉPTERV Vezetőségét és annak
főhatóságát, az Építésügyi és Városfejlesztési Minisztériumot azért a tekin-
télyes anyagi támogatásért, amellyel az említett segédlet megjelenését lehe-
tővé tették.

Calculation of Slabs of Circular and Annular Forms Subjected to Periodic Loads. —
The textbook treating the calculation of circular and annular slabs submitted to periodic
loads, and the period prior to its publication are described. The situation in this field of thirty
years ago is outlined in connection with designing a storage basin of liquids. The deficiencies in
this field and in this period are shown and the process which resulted in the development of new
calculation methods for designing axisymmetrical structures. The axisymmetry and anti-
symmetry permit to carry out the calculations of a space structure in plane. The procedure of
moment distribution may conveniently applied also in this field. The new publication permits
to determine the deformations and stress resultants of slabs of circular or annular form submitted
to loads acting on a part of the surface, along lines (i.e. along the radii or circular arcs) or con-
centrated. The external forces are given in the form of Fourier's series. The differential equa-
tion of the slab is presented together with its solution and with the boundary conditions the
most frequently encountered. The practical application of the theoretical results are demon-
strated through 640 pages of the textbook which, at its end, is completed by the publication of 110
numerical charts.

Berechnung periodisch belasteter Kreis- und Kreisringplatten. — Berichtet wird über
einen Behelf für die Berechnung der durch periodische Belastung beanspruchten Kreis- und
Kreisringplatten und über die Zeit vor der Veröffentlichung dieses Behelf. Der Stand vor
dreißig Jahren auf diesem Gebiet wird dargestellt im Zusammenhang mit dem Entwurf eines
Flüssigkeitsbehälters. Es werden die damaligen Mängel angeführt, und der Vorgang geschildert,
dessen Ergebnis die Entwicklung einer neuen Methode für die Berechnung von kreissymmet-
rischen Konstruktionen wurde. Die Kreissymmetrie und Antimetrie ermöglichen die Anwen-
dung einer Berechnung in der Ebene einer Raumkonstruktion. Das Momentenverteilungsver-
fahren kann auch auf diesem Gebiet sehr vorteilhaft angewandt werden. Die neue Ausgabe
ermöglicht die Ermittlung der Verformungen und der Schnittkräfte von Kreis- und Kreisring-
platten, die durch auf einige Flächenteile, linienmäßig verteilt oder konzentriert wirkenden
Kräfte belastet werden. Die äußeren Kräfte werden in der Form einer Fourrierschen Reihe
dargestellt. Es werden die Differentialgleichung, deren Lösung und die am häufigsten hervor-
kommenden Randbedingungen angeführt. Die praktische Anwendung der theoretischen Erge-
bnisse wird über 640 Seiten des Behelfs demonstriert. Schließlich wird das Buch durch 110
Zahlentabellen ergänzt.

EGY FELSŐ KORLÁT A HETEROGÉN ANYAGÚ PRIZMATIKUS RUDAK CSAVARÁSI MEREVSÉGÉRE

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett 1977. október 28-án]

A tanulmány tömör keresztmetszetű, heterogén de izotrop prizmatikus rudak csavarási merevségére egy egyenlőtlenségi relációt ad meg, mégpedig felső korlátot. A korlát bizonyítása a heterogén anyagú prizmatikus rudak csavarási feladatára vonatkozó újabb irodalmi eredmények alkalmazásával történt.

Jelölések

x, y derékszögű Descartes-féle koordináták,
 e_x, e_y , az x, y koordinátarendszer egységvektorai,
 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y$ Hamilton-féle differenciáloperátor,
 \cdot, \cdot két vektor skaláris szorzatának jele,
 $\bar{G} = G(x, y)$ csúszató rugalmassági modulus,
 $U = U(x, y)$ feszültségfüggvény,
 T x, y síkbeli, egyszeresen összefüggő korlátos tartomány,
 g a T tartomány határgörbéje,
 S csavarási merevség,
 M csavaró-nyomaték,
 θ fajlagos elcsavaródás szöge,
 $f_x = f(x), \tilde{f} = \tilde{f}(x)$ segédfüggvények,
 $s_x(y), s_y(x), S_x, S_y$ és egyéb mennyiségeket, változókat a szövegben értelmezzünk.

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az 1. ábrán vázolt tömör keresztmetszetű, heterogén, de izotrop, lineárisan rugalmas anyagú prizmatikus rúd csavarási feladata a következő peremérték problémára vezet, [1]:

Meghatározandó az a T tartományon és a T tartomány g határgörbéjén folytonos $U = U(x, y)$ kétváltozós függvény, amely a T tartományban a

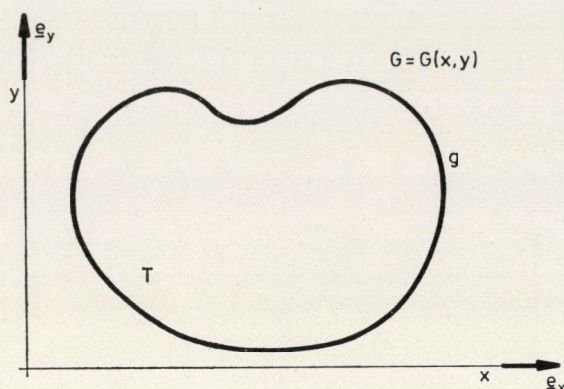
$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{G} (\nabla U) \right] = -2 \quad (1)$$

parciális differenciálegyenletet, a T tartomány határán — a g görbén — pedig az

$$U = 0 \quad (2)$$

homogén peremfeltételt elégíti ki.

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehéritő u. 24, IV/1.



1. ábra. Tömör keresztmetszet

A keresztmetszet

$$S = \frac{M}{\vartheta} \quad (3)$$

formulával értelmezett S csavarási merevsége az (1), (2) által kijelölt kerületértékprobléma $U = U(x, y)$ megoldásának az ismeretében az alábbi módon számítható:

$$S = 2 \int_T U dT. \quad (4)$$

Jelen tanulmány az S csavarási merevséggel kapcsolatban az alábbi egyenlőtlenségi relációt ismerteti:

$$S \leq S_x + S_y, \quad (5)$$

ahol

$$S_x = \int_{Y_1}^{Y_2} s_x(y) dy, \quad S_y = \int_{X_1}^{X_2} s_y(x) dx, \quad (6), (7)$$

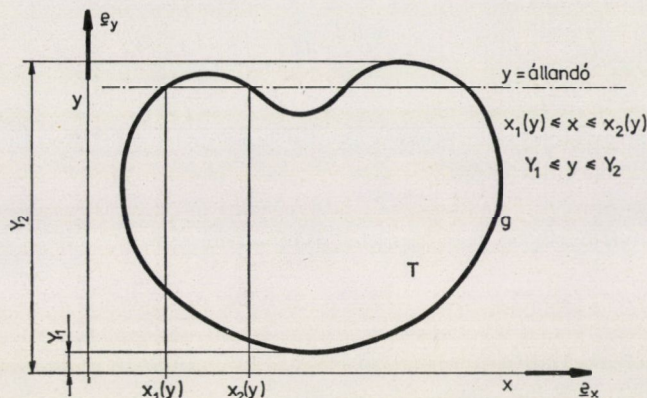
$$s_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) [x - \bar{x}(x, y)]^2 dx, \quad (8)$$

$$\bar{x}(x, y) = \frac{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) x dx}{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) dx}, \quad (9)$$

$$s_y(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) [y - \bar{y}(x, y)]^2 dy, \quad (10)$$

$$\bar{y}(x, y) = \frac{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) y dy}{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) dy}. \quad (11)$$

A fenti formulákban szereplő $x_1(y)$, $x_2(y)$ a T tartomány g határgörbéjének $y = \text{állandó}$ egyenletű egyenessel való metszéspontjának abszcisszáit jelenti, hasonlóan értelmezett $y_1(x)$ és $y_2(x)$, azaz a g határgörbe $x = \text{állandó}$ egyenletű egyenessel való metszéspontjának ordinátáit $y_1(x)$, $y_2(x)$ jelöli. Az $x_1(y)$, $x_2(y)$, Y_1 , Y_2 jelentését a 2. ábra, az $y_1(x)$, $y_2(x)$, X_1 , X_2 jelentését pedig a 3. ábra szemlélteti.



2. ábra. Az $y = \text{állandó}$ egyeneshez tartozó $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ intervallum

2. Az (5) egyenlőtlenségi reláció igazolása

Előljáróban olyan segédteteleket, formulákat ismertetünk, amelyek alapvető szerepet játszanak a csavarási merevségre vonatkozó egyenlőtlenségi reláció bizonyításánál.

A jól ismert

$$\nabla \cdot \left[U \frac{1}{G} (\nabla U) \right] = \frac{1}{G} (\nabla U)^2 + U \nabla \cdot \left[\frac{1}{G} (\nabla U) \right] \quad (12)$$

azonosságból integrálással az alábbi egyenletet kapjuk, ha tekintettel vagyunk az (1) egyenletre:

$$\int_T U \nabla \cdot \left[\frac{1}{G} (\nabla U) \right] dT = \int_T \frac{1}{G} (\nabla U)^2 dT - 2 \int_T U dT. \quad (13)$$

A Gauss-féle integrálatalakítási tétel és a (2) egyenlet alkalmazásával belátható, hogy

$$\int_T U \nabla \cdot \left[\frac{1}{G} (\nabla U) \right] dT = 0. \quad (14)$$

A (14), (17), (4) egyenletek kombinálásával a következő alapvető eredményt tudjuk levezetni:

$$S = \int_T \frac{(\nabla U)^2}{G} dT. \quad (15)$$

A (15) és a (4) egyenletek felhasználásával jutunk a (16) egyenletre:

$$S = - \int_T \frac{(\nabla U)^2}{G} dT + 4 \int_T U dT. \quad (16)$$

A csavarási merevségre vonatkozó egyenlőtlenségi reláció igazolása a (16) formula felhasználásával történik.

A T tartományból az $y = \text{állandó}$ egyenesek (2. ábra) véges számú intervallumot hasítanak ki. Egy tipikus ilyen intervallum

$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y). \quad (17)$$

Jelölje $f = f(x)$ az alábbi peremértékfeladat megoldását:

$$\left[\frac{1}{G(x, y)} f'(x) \right]' + 1 = 0, \quad (18)$$

$$f[x_1(y)] = 0, \quad f[x_2(y)] = 0. \quad (19a), (19b)$$

A (18) egyenletben vesszõ az x változó szerinti differenciálás jele.

Legyen

$$s_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x) dx. \quad (20)$$

Elemi számolással igazolható, hogy

$$s_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{1}{G(x, y)} [f'(x)]^2 dx. \quad (21)$$

Tekintsük a következő előírással értelmezett $k_x = k_x[\tilde{f}(x)]$ függvényt:

$$k_x = k_x[\tilde{f}(x)] = - \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{1}{G(x, y)} [\tilde{f}'(x)]^2 dx + 2 \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \tilde{f}(x) dx, \quad (22)$$

ahol $\tilde{f} = \tilde{f}(x)$ az $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ zárt intervallumban folytonos, az $x_1(y) < x < x_2(y)$ nyílt intervallumban pedig szakaszonként folytonosan differenciálható olyan egyváltozós függvényt jelöl, amely az

$$\tilde{f}[x_1(y)] = 0, \quad \tilde{f}[x_2(y)] = 0 \quad (23), (24)$$

homogén peremfeltételeket kielégíti.

A (25) egyenlőtlenségi reláció igazolása megtalálható bármely variáció-számítással foglalkozó kézikönyvben (pl. [2], [3]):

$$s_x(y) \geq k_x[\tilde{f}(x)]. \quad (25)$$

Elemi számolással igazolható, hogy

$$s_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) [x - \bar{x}(x, y)]^2 dx, \quad (26)$$

ahol

$$\bar{x}(x, y) = \frac{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) x dx}{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) dx}. \quad (27)$$

A T tartományból az $x = \text{állandó}$ egyenesek által kihatott

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

intervallumokhoz (3. ábra) az előbbieket szerint eljárva hozzárendelhetjük az $s_y = s_y(x)$, $k_y = k_y(\tilde{f})$, $\tilde{f} = \tilde{f}(y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$ függvényeket. Ezen mennyiségek formálisan a már levezetett eredményekből — $s_x = s_x(y)$, $k_x = k_x[\tilde{f}(x)]$, $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ — az x és y változók felcserélésével állíthatók elő. Így írhatjuk, hogy

$$s_y(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) [y - \bar{y}(x, y)]^2 dy, \quad (28)$$

ahol

$$\bar{y}(x, y) = \frac{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) y dy}{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) dy}. \quad (29)$$

Nyilván fennáll az alábbi egyenlőtlenségi reláció a (25) mintájára:

$$s_y(x) \geq k_y[\tilde{f}(y)], \quad (30)$$

ahol

$$k_y[\tilde{f}(y)] = - \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{1}{G(x, y)} [\tilde{f}(y)]^2 dy + 2 \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \tilde{f}(y) dy. \quad (31)$$

A (30) formulában szereplő $\tilde{f} = \tilde{f}(y)$ függvény az $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ zárt intervallumban folytonos az $y_1(x) < y < y_2(x)$ nyílt intervallumban pedig szakaszanként folytonosan differenciálható olyan egyváltozós függvényt jelöl, amely az

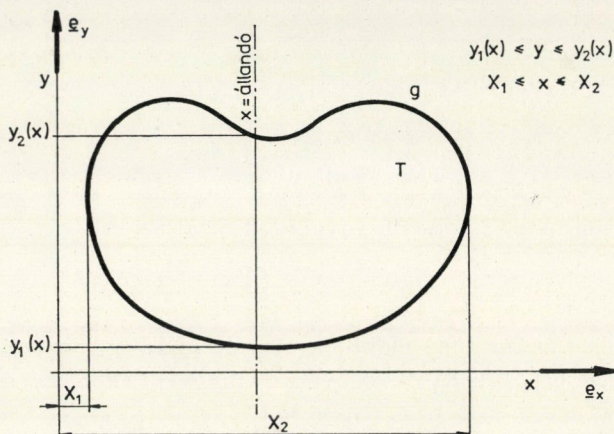
$$\tilde{f}[y_1(x)] = 0, \quad \tilde{f}[y_2(x)] = 0 \quad (32a), (32b)$$

homogén peremfeltételeket kielégíti.

Megjegyzendő, hogy a (31) formulában a vessző az y szerinti deriváltat jelöli.

A (25) egyenlőtlenségi reláció alapján írhatjuk az $\tilde{f}(x) = U(x, y)$ választással, hogy

$$s_x(y) \geq - \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{1}{G(x, y)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx + 2 \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} U dx. \quad (33)$$



3. ábra. Az $x = \text{állandó}$ egyeneshez tartozó $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ intervallum

Összegezve a fenti integrálokat az $y = \text{állandó}$ vonalhoz tartozó (x_1, x_2) intervallumokra, majd y szerint integrálva kapjuk, hogy

$$\int_{y_1}^{y_2} s_x(y) dy \geq - \int_T \frac{1}{G} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dT + 2 \int_T U dT. \quad (34)$$

Hasonló módon eljárva, a (29) egyenlőtlenségi relációból kiindulva nyerjük az alábbi formulát:

$$\int_{x_1}^{x_2} s_y(x) dx \geq - \int_T \frac{1}{G} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 dT + 2 \int_T U dT. \quad (35)$$

Legyen

$$S_x = \int_{y_1}^{y_2} s_x(y) dy, \quad S_y = \int_{x_1}^{x_2} s_y(x) dx. \quad (36), (37)$$

A (33), (35) egyenlőtlenségek összeadásával, a (36), (37) jelölések és a (16) formula alkalmazásával az

$$S \leq S_x + S_y \quad (38)$$

formula adódik.

3. Homogén anyagú prizmatikus rúdra vonatkozó felső korlát

A $G = G(x, y) =$ állandó esetben $s_x(y)$ és $s_y(x)$ viszonylag egyszerűen kiszámítható. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$s_x(y) = G \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} (x - \bar{x})^2 dx, \quad (39)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1(y) + x_2(y)}{2}, \quad (40)$$

$$s_y(x) = G \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (y - \bar{y})^2 dy \quad (41)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} \quad (42)$$

alakú lesz. A kijelölt integrálások elvégzésével azt kapjuk, hogy

$$s_x(y) = G \frac{d_x^3(y)}{12}, \quad s_y(x) = G \frac{d_y^3(x)}{12}, \quad (43), (44)$$

$$d_x(y) = x_2(y) - x_1(y), \quad d_y(x) = y_2(x) - y_1(x). \quad (45), (46)$$

A fentieknek megfelelően S_x -re és S_y -ra az

$$S_x = G \int_{y_1}^{y_2} \frac{d_x^3(y)}{12} dy, \quad S_y = G \int_{x_1}^{x_2} \frac{d_y^3(x)}{12} dx \quad (47), (48)$$

eredmény adódik. A csavarási merevségre vonatkozó

$$S \leq S_x + S_y \quad (49)$$

felső korlátnak igen egyszerű mechanikai interpretáció adható, a jól ismert

$$S < GI_p \quad (50)$$

relációval történő összevetés elemzésével. I_p a T tartománynak az x, y koordinátarendszer kezdőpontjára számított másodrendű nyomatékát jelöli. Igazolható, hogy (50) akkor lesz a legélesebb felső korlát az S csavarási merevség számára, ha az x, y koordinátarendszer kezdőpontja a keresztmetszet súlypontjában van.

Legyen az x, y koordinátarendszer a keresztmetszet súlypontjában. Jelölje I_x, I_y a keresztmetszetnek a súlyponti x, y tengelyekre vonatkozó másodrendű nyomatékait. Nyilván

$$I_p = I_x + I_y, \quad (51)$$

ahol I a keresztmetszetnek a keresztmetszet súlypontjára vonatkozó másodrendű nyomatéka. Az I_x és I_y értelmezéséből következik, hogy

$$I_y = \int_T x^2 dT = \int_{y_1}^{y_2} q_x(y) dy, \quad (52)$$

$$q_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} x^2 dx = \frac{x_2^3(y) - x_1^3(y)}{3}, \quad (53)$$

$$I_x = \int_T y^2 dT = \int_{x_1}^{x_2} q_y(x) dx, \quad (54)$$

$$q_y(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y^2 dy = \frac{y_2^3(x) - y_1^3(x)}{3}. \quad (55)$$

A Steiner-tétel alkalmazásával írható, hogy

$$s_x(y) \leq Gq_x(y), \quad s_y(x) \leq Gq_y(x). \quad (56), (57)$$

Az (56), (57) egyenlőtlenségi relációk következménye, hogy

$$S_x \leq GI_y, \quad S_y \leq GI_x \quad (58), (59)$$

azaz

$$S_x + S_y \leq G(I_x + I_y) = GI_p. \quad (60)$$

Ez utóbbi eredményből pedig az következik, hogy (49) egyenlőtlenségi relációtól élesebb felső korlátot kapunk az S csavarási merevség számára, mint az (50) formula alkalmazása által. Ezen állítás illusztrálására tekintsük az alábbi példát:

A 4. ábrán vázolt egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú tömör keresztmetszetre vonatkozólag az alábbi eredményeket tudjuk levezetni:

$$I_p = \frac{1}{18} a^4,$$

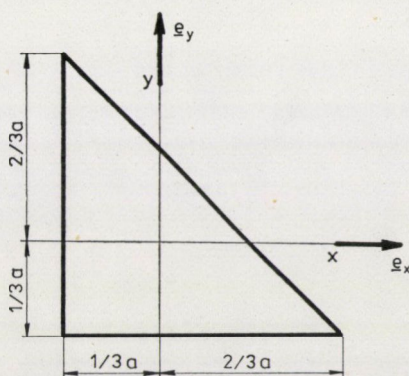
$$S_x = \frac{1}{48} a^4 G, \quad S_y = \frac{1}{48} a^4 G.$$

Jelen esetben az

$$S^* = S_x + S_y = \frac{1}{24} a^4 G$$

háromnegyed része az

$$S^{**} = GI_p = \frac{1}{18} a^4 G$$



4. ábra. Egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú keresztmetszet

menyiségnek. Tehát az (49) egyenlőtlenségi reláció élesebb felső korlátot ad a csavarási merevség számára ebben a feladatban, mint a jól ismert (50) egyenlőtlenségi reláció.

IRODALOM

1. ZIENKIEWICZ Ely I. F.: Torsion of Compound Bars (a relaxation solution). *Intern. Journal of Mech. Sci.* 1. (1960), 356—365
2. COURANT R.—HILBERT D.: *Methods of Mathematical Physics. Vol. 1.* Interscience, New York, 1953
3. WEINSTOCK R.: *Calculus of Variations with Application to Physics and Engineering*, McGraw-Hill, 1952

A Top Value for the Torsional Stiffness of Prismatic Bars Made of Heterogeneous Material

An inequality relation, i.e. a limiting top value is derived for the torsional stiffness of prismatic bars made of heterogeneous, yet isotropic material. The verification of the limiting value was carried out with the help of the latest results published by the literature on the problem of torsioning prismatic bars made of heterogeneous material.

Höchstgrenze für die Torsionssteifheit der prismatischen Stäbe aus heterogenem Material.

Für die Torsionssteifheit von prismatischen Stäbe aus ungleichartigem, jedoch isotropem Material wird eine Ungleichheitsrelation, und zwar eine Höchstgrenze abgeleitet. Der Nachweis der Höchstgrenze wurde mit Hilfe der neuesten Ergebnisse in der einschlägigen Fachliteratur inbezug auf die Untersuchungen der Torsionsprobleme von prismatischen Stäbe aus heterogenem Material durchgeführt.

KÖNYVSZEMLE

Franz, G.: (szerkesztő):

BETON-KALENDER 1978

TASCHENBUCH FÜR BETON-, STAHLBETON- UND SPANNBETONBAU, SOWIE DIE VERWANDTEN FÄCHER

Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München—Düsseldorf 1978

A BETON-KALENDER, a betonszakma kétkötetes standard zsebkönyve immár 67. kiadásában áll a vasbetonszakma művelőinek rendelkezésére.

A zsebkönyv első kötete 1165 oldal terjedelemben 12 fejezetet foglal magában. Ezek részletesen foglalkoznak többek közt a vasbeton alapanyagainak tulajdonságaival (Prof. J. BONZEL, W. SCHUMACHER), a három- és négyoldalt felfekvő, valamint a többtámaszú lemezek erőjátékával (Prof. F. CZERNY), a szilárdságtannak a mérnöképítészetben fontos feladataival (Prof. N. DIMITROV), a rúdszerkezetek számításával (H. AHRENS, Prof. H. DUDDECK), a vasbetonszerkezetek kurrens méretezési szabályaival (E. GRASSER), a karcsú szerkezeti elemek méretezési problémáival (Prof. K. KORDINA, Prof. U. QUAST), valamint a feszített betonszerkezetek kérdésével (Prof. H. RÜSCH, Prof. H. KUPFER).

A könyv második kötete 1006 oldal terjedelmű. Ennek mintegy a felét az NSZK-ban érvényes építési szabványok és szabályzatok kimerítő ismertetése foglalja el (H. GOFFIN). Igen részletezettek a kétirányú feszültségi állapotban levő lemezszerkezetek (táblák) számítását (W. SCHLEE), valamint a betonútépítés kérdéseit tárgyaló fejezetek (J. SCHLUMS, Prof. D. SCHWÄR).

Az új kiadás a régebbi kiadásokból átvett fejezetek gyökeres átdolgozását tette szükségessé. Erre főként az adott okot, hogy az NSZK-ban 1978. január 1-től kezdve a régebbi mértékegységek helyett az új SI-mértékegységrendszert vezették be, ami egyúttal egyes anyagelnevezések megváltozását is maga után vonta.

A könyv előszava melegen emlékszik meg a 88 éves korban elhunyt magyar származású E. RAUSCH profeszorról, a zsebkönyv „Gépalapok” című fejezetének kiváló szerzőjéről. Az új kiadásban ezt a tárgykört a szállókésekre és földrengések okozta igénybevételekre való méretezés problémáival kibővítve F. P. MÜLLER tárgyalja. Új a zsebkönyvben a holland vasbetonszabályzatot részletesen ismertető fejezet is (W. HOF).

Végigtekintve a zsebkönyv gazdag és igen változatos anyagán, egyértelműen megállapítható, hogy a könyv neves szerkesztője, Prof. G. FRANZ híven őrködött a jól bevált hagyományokon: az új kiadás — a régiekhez hasonlóan — kitűnően szolgálja a betonépítéssel érdekelteket és mint ilyen hasznos segítséget nyújt a betonépítéssel foglalkozó szakköröknek messze az ország határain túl is.

Dr. Csonka Pál

T. Kallard:

EXPLORING LASER LIGHT

Optosonic Press, 1977.

Ez a könyv célkitűzéseit tekintve a lézerek alkalmazásával foglalkozó, nem feltétlenül lézeres alapismeretekkel rendelkező, de a klasszikus optikában járatos szakembereknek, kutatóknak és oktatóknak szól.

A szerkesztő sikeresen oldotta meg azt a feladatot, hogy ne csak egy szűk olvasótábornak készítsen erről az igen érdekes, s egyre nagyobb érdeklődést kiváltó területről kézikönyvet, hanem egy jóval szélesebb körnek ír az egyszerű ismeretterjesztésnél többet nyújtva, a részletesebb információkra több mint 200 hivatkozásban utaló művében. Külön említést igényel a javasolt segédanyagok jó csoportosítása (a fejezetek végén megadott hivatkozások összegzése, azok szerzők és tárgy szerinti csoportosítása), valamint egy rövid ajánlás a fontosabb lézeres

berendezéseket és optikai eszközöket gyártó cégek megadásával. További segítséget nyújt a szerkesztő azzal is, hogy megadja a szakterülettel foglalkozó lényegesebb folyóiratok jegyzékét.

A könyv tartalmát tekintve laboratóriumi gyakorlatok és előadás demonstrációk formájában közli azokat a klasszikus ismereteket és a legfrissebb kutatási eredményeket, amelyek alapul szolgálhatnak a héliumneon lézerek alkalmazási példáiból kiindulva egy jóval szélesebb méréseszközfejlesztési igényekkel jelentkező olvasóréteg számára is.

A könyv jellegét tekintve hézgapótló szerepet tölt be a tudományos mélységű publikációk és a már főleg kifejlesztett eszközöket ismertető lézeres alkalmazástechnikai könyvek között.

A kiadvány 298 oldalon, 276 illusztrációval 112 témakört emel ki az optika területéről, s minden témát olvasmányosan, ugyanakkor olyan mélységig tár fel, hogy az olvasottak alapján a szükséges eszközökkel és alapismeretekkel rendelkező olvasó rekonstruálni tudja az egyes vizsgálati eljárásokat, s az irodalmi utalások alapján bármely témában tovább tudjon lépni az egyszerű demonstráción. Példaként említhetők ilyen címszavak, mint „optikai pad és tartozékai”, „tükrök görbületének mérése”, „optikai mikrométer”, „Michelson, Mach-Zender és Jamin interferometerek”, „lézeres Doppler-féle sebességmérés”, „törésmutató meghatározás”, „360°-os holográfia” stb.

Összegezve megállapítható, hogy a könyv éppen hézgapótló jellege miatt keresett mű lesz a lézerek és az optika iránt érdeklődő olvasók számára.

Dr. Bitó János

Ferenc Kovács:

HOCHFREQUENZANWENDUNGEN VON HALBLEITER-BAUELEMENTEN

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978

A félvezető eszközök fizikájával, konstrukciójával és alkalmazásával a világirodalomban rengeteg áttekintő szakmunka foglalkozik; sokkal kevesebb azonban a jó monográfia, amely egy-egy részletkérdést olyan mélységben tárgyalna, ahogyan arra a szóban forgó területen dolgozó mérnöknek szüksége van. Magyarország viszonylag előnyös helyzetben van, mert a Budapesti Műszaki Egyetem szakmérnöki tanfolyamainak előadói az egyes részterületeket gondosan feldolgozták.

Ennek az összehangolt munkának egyik értékes eredménye volt dr. Kovács Ferenc „Félvezetők nagyfrekvenciás alkalmazása” című nagy sikerű könyve, amely most német változatban látott napvilágot. A szerző átdolgozta a magyar kiadás szövegét, felfrissítette a képanyagot és a legújabb anyaggal egészítette ki az irodalomjegyzéket. A hangsúly azonban továbbra is a bipoláris eszközökön maradt; a térvezérlésű tranzisztorok, valamint a nagyfrekvenciás integrált áramkörök tárgyalása rövidebb.

A munka először a nagyfrekvenciás félvezető eszközöket ismerteti, azután a széles sávú, majd a keskeny sávú erősítők felépítésével, tulajdonságaival és méretezésével foglalkozik, kitér a mikrohullámú körökre és a nagyfrekvenciás teljesítményerősítőkre; majd a nemlineáris alkalmazások (keverés, sokszorozás, oszcilláció) tárgyalása után a nagyfrekvenciás zaj rövid bemutatásával zárul.

A szerző nagy szolgálatot tett az áramkörtervezőknek. Könyve az alapok logikus tárgyalásán túl valóban tájékoztatást ad az egyes megoldások előnyeiről, hátrányairól, a méretezés lépéseiről és lehetővé teszi az eligazodást a folyóiratcikkek bozótjában. Bizonyos, hogy a német kiadás fogadtatása ugyanolyan kedvező lesz, mint a magyaré volt.

Dr. Valkó I. P.

Dr. Kozák Miklós és munkatársai:

HIDRAULIKAI PÉLDATÁR

Tankönyvkiadó, Budapest 1977.

A szerzők könyvüket elsősorban az egyetemi oktatás hasznos segédkönyvének szánták. A feldolgozott példaanyagot ennek megfelelően választották ki, s nagyon szerencsésen e válogatás a vízepítő mérnöki gyakorlatban előforduló hidraulikai számítások teljes körét felöleli. Didaktikai célokat szolgál a könyv szerkezeti felépítése: az egyes fejezetek (témakörök) tömör elméleti összefoglalással kezdődnek és ezt követik az egyes feladatok konkrét numerikus megoldásai, amelyek a könnyebb érthetőség érdekében ábrákkal, vázlatokkal egészülnek ki.

A folyadékok fizikai tulajdonságaival foglalkozó bevezető fejezet után a hidrosztatika témaköre következik. Sík és görbült felületekre ható nyomóerők számításával; a nyomás alatti abszolút, valamint a relatív nyugalomban levő folyadékterekkel és a folyadékba merülő testek úszásproblémáival kapcsolatos feladatok megoldása a tárgya e fejezetnek.

A könyv több, mint harmad részét teszi ki a vízépítő mérnöki gyakorlatban igen jelentősnek számító szabad felszíni vízmozgásokkal foglalkozó következő két fejezet. A harmadik fejezetben először a nyílt medrekben kialakuló permanens egyenletes, valamint fokozatosan változó, majdútána a nem permanens vízmozgásokra találja az olvasó olyan példák megoldását, amelyek nemcsak az egyetemi hallgatóságnak tanulságosak, hanem a praktizáló mérnököknek is hasznos segítséget nyújtanak ilyen jellegű feladataik megoldásakor. A bonyolult feladatok megoldásához a szerzők a számítógépi programok listáit is közlik, ami a gyakorlati felhasználás során különösen hasznos lehet. A műtárgyak környezetében kialakuló vízmozgásokkal foglalkozó negyedik fejezet példái egy-egy konkrét gyakorlati esetet dolgoznak fel. Ilyenek: a fenékküszöb feletti vízszint meghatározása; medencékből és tartályokból, továbbá zsilip tábla alatti kifolyási problémák megoldása; bukógátak, energiatörő berendezések, csőátereszek és surrantók hidraulikai méretezése.

Az ötödik fejezet nyomás alatti csővezetékekben kialakuló permanens és nem permanens vízmozgásokkal kapcsolatos feladatok megoldására mutat be példákat, amelyek mindegyike egyben mintapéldául is szolgál a mérnöki alkalmazásokra.

A könyv hatodik, egyben utolsó fejezetét a szerzők a porózus közegben kialakuló szivárgás problémakörének szentelték. Ebben a fejezetben gátak alatti szivárgásokkal kapcsolatos feladatok megoldása található.

A könyv szerzői — tekintettel arra, hogy a hidraulikai számítások a vízépítési és vízgazdálkodási feladatok megoldásában egyre nagyobb jelentőségre tesznek szert — a példák kiválasztása során a didaktikai célok mellett elsősorban arra ügyeltek, hogy a gyakorlatban előforduló feladatokat dolgozzanak ki, ezzel is hangsúlyozva azt, hogy a mérnöki tevékenység kereteit mindenkor a népgazdasági igények szabják meg. Mivel pedig ma már igen sokszor olyan igényekkel találja magát szemben a praktizáló mérnök, amelyeknek gazdaságos kielégítése csak korszerű számítógépekkel lehetséges, a szerzők nagyon helyesen ilyen feladatok bemutatására is törekedtek. E feladatok megoldásához komplett számítógépi programokat közölnek ALGOL—60 nyelven az ODRA—1204 típusú gépre. Az elmondottak miatt nemcsak egyetemi hallgatóknak, hanem a vízépítő gyakorlatban tevékenykedő mérnököknek is igen hasznos segítőtársa lehet e könyv.

Dr. Czibere Tibor

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Geszti P. Ottó—Tevan György: A Kron-féle hálózatszámítás lineáris vektorterek elméletén alapuló egyszerű változata</i>	197
<i>Singer Dénes: Műszaki rendszerek dinamikájának egységes bondgráf reprezentációjáról, I.</i>	233
<i>Bosznay Ádám: Szerkezetek sajátfrekvenciáinak kontinuum-modellt alkalmazó számítása</i>	249
<i>Pethő Szilveszter: Szilárd szemcsék mozgás törvényei centrifugális erőterben</i>	265
<i>Kontur István: Sztochasztikus keveredési modell a Paks alatti Duna-szakaszra</i>	271
<i>Roller Béla: A térbeli rúdszerkezetek statikájának áttekintése különös tekintettel a modern numerikus módszerekre</i>	285
<i>Ortutay Miklós—Pethő Szilveszter: Tromp-függvények új mérőszámai</i>	303
<i>Ecsedi István: Az elasztosztatika egy egyenlőtlenségi relációjáról</i>	315
<i>Domokos Miklós: Az evapotranszpirációval kapcsolatos magyarországi vizsgálatok áttekintése és javaslat folytatásuk megszervezésére</i>	325
<i>Márkus Gyula: Periodikusan terhelt kör és körgyűrű alakú lemezek számítása</i>	361
<i>Ecsedi István: Egy felső korlát a heterogén anyagú prizmatikus rudak csavarási merevségére</i>	367

KÖNYVSZEMLE

<i>Franz, G.: Beton-Kalender 1978 (Csonka, P.)</i>	377
<i>Kallard, T.: Exploring Laser Light (Bitó J.)</i>	377
<i>Kovács, F.: Hochfrequenzanwendungen von Halbleiterbauelementen (Valkó I. P.)</i>	378
<i>Kozák, Miklós és munkatársai: Hidraulikai példatár</i>	378

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat nyomdába érkezett: 1979. II. 6. — Terjedelem: 16,10 (A/5) ív,

78.6779 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Geszti, P. O.—Tevan, Gy.</i> : Eine auf der Theorie der linearen Vektoren beruhende einfache Variante der Kronschen Netzwerkberechnung	197
<i>Singer, D.</i> : Einheitliche Behandlung von dynamischen Systemen mit Hilfe der Bond-graphtechnik, I.	233
<i>Bosznay, Á.</i> : Berechnung der Eigenfrequenzen von Konstruktionen mit Kontinuummodellen	249
<i>Pethő, Sz.</i> : Die Bewegungsgesetze von festen Körpern in einem Zentrifugalkraftfeld	265
<i>Kontur, I.</i> : Ein stochastisches Mischungsmodell für den Donauabschnitt unterhalb Paks	271
<i>Roller, B.</i> : Statik der räumlichen Stabtragwerke mit besonderer Rücksicht auf die modernen numerischen Methoden	285
<i>Ortutay, M.—Pethő, Sz.</i> : Neue Maßzahlen für TROMP-Funktionen	303
<i>Ecsedi, I.</i> : Über eine Ungleichheitsrelation der Elastostatik	315
<i>Domokos, M.</i> : Untersuchungen in Ungarn im Zusammenhang mit der Evapotranspiration und ein Vorschlag für die Organisierung der Fortsetzung derselben	325
<i>Márkus, G.</i> : Berechnung periodisch belasteter Kreis- und Kreisringplatten	361
<i>Ecsedi, I.</i> : Höchstgrenze für die Torsionssteifheit der prismatischen Stäbe aus heterogenem Material	367

BUCHBESPRECHUNG

<i>Franz, G.</i> : Beton-Kalender 1978 (Csonka, P.)	377
<i>Kallard, T.</i> : Exploring Laser Light (Bitó, J.)	377
<i>Kovács, F.</i> : Hochfrequenzanwendungen von Halbleiter-Bauelementen	378
<i>Kozák, M. et al.</i> : Hidraulikai példatár (Czibere, T.)	378

CONTENTS

<i>Geszi, P. O.—Tevan, G.</i> : A Simple Variant of Kron's Network Calculation, Based on the Theory of Linear Vectors	197
<i>Singer, D.</i> : Unified Bondgraph Representation of Dynamic Systems, I.	233
<i>Bosznay, Á.</i> : Computation of Eigenfrequencies Using Continuum-Models	249
<i>Pethő, Sz.</i> : Die Bewegungsgesetze von festen Körpern in einem Zentrifugalkraftfeld	265
<i>Kontur, I.</i> : A Stochastic Mixing Model for the Danube Beaches below Paks	271
<i>Roller, B.</i> : Survey on the Statics of Space Latticeworks with Particular Consideration of the Up-To-Date Numerical Methods	285
<i>Ortutay, M.—Pethő, Sz.</i> : New Characteristics for TROMP Functions	303
<i>Ecsedi, I.</i> : On an Inequality Relation of the Elasto-Statics	315
<i>Domokos, M.</i> : Survey on the Investigations in Connection with the Evapotranspiration and a Proposal for the Organization of their Continuation in Hungary	325
<i>Márkus, Gy.</i> : Calculation of Slabs of Circular and Annular Forms Subjected to Periodic Loads	361
<i>Ecsedi, I.</i> : A Top Value for the Torsional Stiffness of Prismatic Bars Made of Heterogeneous Material	367

BOOK REVIEW

<i>Franz, G.</i> : Beton-Kalender 1978. (Csonka, P.)	377
<i>Kallard, T.</i> : Exploring Laser Light (Bitó, J.)	377
<i>Kovács, F.</i> : Hochfrequenzanwendungen von Halbleiter-Bauelementen (Valkó, I. P.)	378
<i>Kozák, M.</i> : Hidraulikai példatár (Czibere, T.)	378